This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

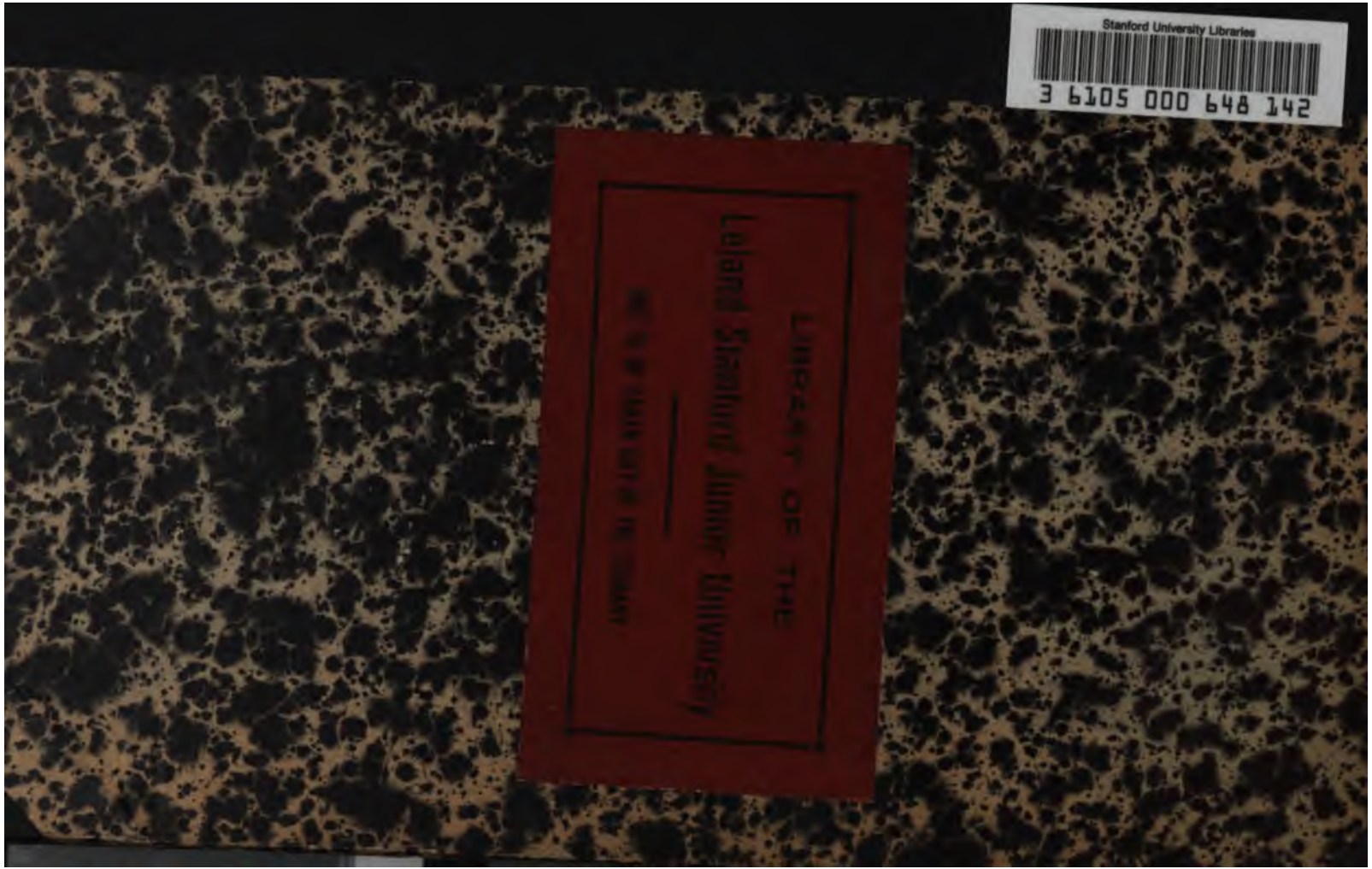
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

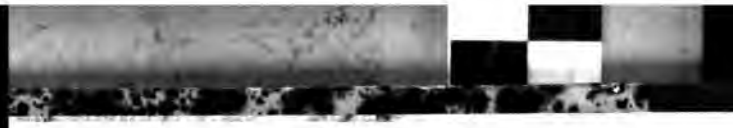
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


Stanford University Libraries
3 6105 000 648 142
LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University



ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND III.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND III.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT UND ACHTUNDDREISSIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG.

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. HELMHOLTZ

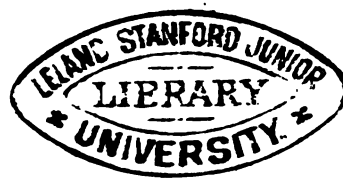
HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST VIER FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1878.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



A. 14401.

Inhalt.

Neue Folge. Band III.

Zweites Heft.

		Seite
I.	W. Beetz. Der Universalcompensator	1
II.	W. Beetz. Ueber die electromotorische Kraft und den inneren Widerstand einiger Thermosäulen	4
III.	W. v. Bezold. Die Theorie der stationären Strömung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten betrachtet . .	12
IV.	E. Riecke. Ueber einen Tangentenmultiplicator und über die electromotorische Kraft des Grove'schen Elementes	36
V.	P. Glan. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit eines Körpers auf die Menge des von ihm absorbirten Lichtes. . . .	54
VI.	E. Ketteler. Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressibelen Aether.	83
VII.	E. Lommel. Ueber Fluorescenz	113
VIII.	W. Wernicke. Zur Metallreflexion	126
IX.	J. J. Mackenzie und E. L. Nichols. Ueber die Volumenvermehrung der Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen	134
X.	E. Riecke. Einige Beobachtungen an dem Radiometer	142
XI.	F. Auerbach. Bestimmung der Resonanztöne der Mundhöhle durch Percusion	152
XII.	F. Auerbach. Ueber die Tonhöhe einer Stimmgabel in einer incompressibeln Flüssigkeit	157

Geschlossen am 15. Januar 1878.

1878. ANNALEN № 1.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE BAND III.

I. *Der Universalcompensator; von W. Beetz.*

Zur Ausführung der von mir vorgeschlagenen Methode für Messung innerer Batteriewiderstände[1]), welche gleichzeitig die Vergleichung zweier electromotorischer Kräfte in sich schliesst, habe ich mich früher eines geradlinigen Stromcompensators und zweier Stöpselrheostaten bedient, von denen der eine am unteren Ende des Compensatordrahtes (d. h. am Nullpunkte seiner Theilung) der andere am oberen eingeschaltet wird. Hr. Kohlrausch hat diese Zusammenstellung dadurch vereinfacht, dass er dem Compensator zwei Schlitten gibt[2]); durch dieses Hülfsmittel sind die Messungen innerhalb der a. a. O. angegebenen Grenzen sehr bequem ausführbar, über dieselben muss man aber wieder zur Einschaltung weiterer Widerstände greifen. Da ich mich neuerdings meiner Methode zu verschiedenen Zwecken vielfach bedient habe, so habe ich mir in der Werkstätte von M. Th. Edelmann einen Messapparat, den Universalcompensator, herstellen lassen, der nicht nur alle für die Ausführung der gedachten Methode nöthigen Vorrichtungen in sich schliesst, sondern auch noch manche andere Anwendungen zulässt.

Der Universalcompensator besteht aus einer Fussplatte von Holz oder Schiefer, auf welcher einander parallel ein dicker Silberdraht *AA* (Taf. I Fig. 1) und ein Platindraht *bb* ausgespannt sind, welcher bei einer Länge von ungefähr

1) Pogg. Ann. CXLII. p. 573. 1871.
2) Kohlrausch, Leitf. d. prakt. Physik. 3. Aufl. p. 173.

1 *m* genau den Widerstand 1 S.-E. hat. Unter *b b* ist eine Theilung angebracht, durch welche seine Länge in 100 Theile getheilt ist. Beide Drähte können durch einen Schlitten von Platinblech *s* mit einander verbunden werden. Die beiden Stöpselrheostaten *c* und *d* enthalten jedesmal die Widerstände 1, 2, 2, 5, 10 S.-E. Ein Vergleich mit Fig. 1a zeigt, wie dieselben dem Schema entsprechend in die Stromleitung eingefügt werden. Mit Beibehaltung der in meiner angezogenen Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen bedeutet *E* die electromotorische Kraft der compensirenden, *e* die der compensirten Säule, *G* das Spiegelgalvanometer. 1, 2 und 3 sind drei Klemmschrauben, von denen 1 den Federschlüssel trägt, welcher beim Andrücken sich zuerst an 2 anlegt und dadurch nur die compensirende Säule schliesst, beim weiteren Druck aber 3 kurz berührt und dadurch die compensirte Säule und das Galvanometer momentan mit in den Stromkreis aufnimmt. Die Säule *e* kann aus der Verbindung dadurch ausgeschaltet werden, dass man aus dem dreigetheilten Messingklotz *m* den verbindenden Stöpsel auszieht; wird derselbe in das Nebenloch gesteckt (wie es in der Figur gezeichnet ist), so schaltet er schnell statt *e* das Daniell'sche Normalelement [1]) (oder unter Umständen mehrere solche Normalelemente) in die Leitung ein. Soll nun der Apparat zur Messung eines inneren Widerstandes gebraucht werden, so nimmt die zu untersuchende Säule den Platz *E* ein, der Stöpsel in *m* schaltet das Normalelement *D* in den Strom; man stellt eine Compensation her, wobei der Schlitten *s* die Drahtlänge *a* abschneidet, während die Widerstandswerthe in den beiden Rheostaten $= c$ und d sein mögen. Hierauf stellt man eine zweite Compensation her, während diese beiden Rheostatenwiderstände $= c'$ und d' sind, die abgeschnittene Drahtlänge aber $= a'$; der Widerstand von *b b* ist ein für allemal = 1 S.-E. Dann hat man allgemein:

1) Vgl. Pogg. Ann. CL. p. 541. 1873.

$$w = \frac{(c + a)(1 + c' + d') - (c' + a')(1 + c + d)}{(c' + a') - (c + a)}.$$

Dieser Ausdruck wird aber in den meisten Fällen sehr viel einfacher, weil man nur dann den Rheostaten d anzuwenden hat, wenn die früher von mir angegebene Grenze überschritten wird.

Soll mittelst dieses Apparates eine electromotorische Kraft e mit der Einheitskraft D verglichen werden, so muss im allgemeinen zuerst durch das soeben beschriebene Verfahren der innere Widerstand der compensirenden Säule w bestimmt werden. Dann wird durch Umstecken des Stöpsels in m das Element D aus- und dafür e eingeschaltet und wieder eine Compensation hergestellt, bei welcher die Rheostatenwiderstände $= c_1$ und d_1, die abgeschnittene Drahtlänge $= a_1$ gefunden wird. Dann hat man das Verhältniss:

$$\frac{e}{D} = \frac{(c_1 + a_1)(1 + c + d + w)}{(c + a)(1 + c_1 + d_1 + w)}.$$

Dieser Ausdruck nimmt ebenfalls eine sehr viel einfachere Gestalt an, wenn man mit einer Kraft e zu thun hat, welche durch E bei gleicher Rheostatenstellung compensirt werden kann, wie D, d, h. wenn $c = c_1$ und $d = d_1$ wird. Dann bekommt man:

$$\frac{e}{D} = \frac{c_1 + a_1}{c + a},$$

man braucht also w gar nicht zu finden und misst e wirklich „nach der Elle". Man wird lieber in den betreffenden Fällen für D mehrere Normalelemente substituiren, um den einfachen Fall herzustellen, als die langweilige Rechnung ausführen.

Ich habe den Universalcompensator vorzugsweise benutzt zur Messung Volta'scher Polarisationen. Für diesen Zweck dient eine, am Federschlüssel angebrachte Zusatzvorrichtung. Die Feder trägt nämlich, durch eine isolirende Unterlage von ihr getrennt, bei p eine Platinplatte, welche in der Ruhelage der Feder fest gegen einen ebenfalls isolirten Platinstift anliegt. Die Platte ist mit einem

Pole der Batterie, welche das Electrodenpaar *e* polarisiren soll, verbunden, der Stift durch diese Electroden hindurch mit dem anderen Batteriepol. Während der Ruhelage des Schlüssels ist also die Electrolyse in ungestörtem Gange, beim Andrücken des Schlüssels an die Leiter 2 und 3 wird der electrolysirende Strom momentan ausgeschaltet, die Electroden aber werden in die Verbindung als compensirte Kette eingeführt.

Endlich hat der Universalcompensator noch die Einrichtung bekommen, um ihn ganz wie das Siemens'sche Universalgalvanometer[1]) zur Messung beliebiger Widerstände nach der Brückenmethode zu benutzen. Für diesen Zweck dient die in Taf. I Fig. 2 gegebene Anordnung, welche aus dem Schema Fig. 2a sofort klar wird. Der dritte Rheostat *k*, welcher jetzt zur Verwendung kommt, enthält nur die Widerstäde 1, 10 und 100 S.-E. Der zu messende Widerstand wird bei *x* eingeschaltet, nachdem durch den Stöpsel im zweigespaltenen Messingklotze *n* eine neue Verbindung hergestellt ist. Die Relation, durch welche der Widerstand *x* gefunden wird, ist:

$$x = k \cdot \frac{d + 1 - a}{c + a}.$$

II. *Ueber die electromotorische Kraft und den inneren Widerstand einiger Thermosäulen; von W. Beetz.*

Unter den thermoelectrischen Säulen, welche zur Hervorbringung stärkerer electrischer Ströme empfohlen worden sind, haben sich vorzüglich zwei Eingang in die Praxis verschafft: die von Noë und die von Clamond, modificirt von Koch. Die Noë'sche Säule ist in ihrer ursprünglichen Form, in welcher die Elemente so angeordnet sind,

1) Brix Z. S. XV. p. 1. 1868.

dass sämmtliche Löthstellen in einer Geraden liegen und durch eine Reihe kleiner Gasflammen geheizt werden, von Hrn. von Waltenhofen auf ihre electromotorische Kraft und ihren Widerstand untersucht und beschrieben worden[1]). Die abgeänderte Gestalt, in welcher die Elemente so angebracht sind, dass alle Löthstellen in einer Kreisperipherie liegen und mittelst kupferner Heizstifte durch eine einzige Gasflamme erhitzt werden, ist ebenfalls von Hrn. von Waltenhofen beschrieben worden und sowohl dieser Physiker[2]), als auch neuerdings Hr. Streintz[3]) haben die Constanten solcher Säulen bestimmt. Ueber die Clamond'sche Säule hat Hr. Rolland[4]) Messungen veröffentlicht, welche den besonderen Zweck haben, die Abhängigkeit des inneren Widerstandes der Säule von dem Grade der Erhitzung zu bestimmen. Ueber ihre electromotorische Kraft sind mir nur die älteren Angaben von Clamond und Mure[5]) bekannt.

Was zunächst die Widerstandsbestimmung an Thermosäulen betrifft, so möchte ich an das erinnern, was ich früher über diesen Gegenstand gesagt habe[6]). Wenn während der Widerstandsmessung ein Strom durch die Löthstelle eines Thermoelementes geht, so setzt sich der primären electromotorischen Kraft desselben, E, eine secundäre entgegen, welche man als die Peltier'sche Polarisation bezeichnen kann, und die der Stromstärke gerade proportional, $= ik$, ist. Wenn daher der Gesammtwiderstand der Säule $= x$ ist, so wird jetzt die Stromstärke:

$$i = \frac{E - ik}{x} = \frac{E}{x + k}$$

werden, d. h. jene der Stromstärke proportionale Gegenkraft spielt die Rolle wie ein von der Stromstärke unab-

1) Pogg. Ann. CXLIII. p. 113; Carl Repert. VII. p. 1. 1871.
2) Pogg. Ann. CXLVI. p. 617. 1872.
3) Carl Repert. XIII. p. 4. 1877. Beibl. I. p. 426.
4) C. R. LXXXIV. p. 1026. 1877. Beibl. I. p. 354.
5) C. R. LXVIII. p. 1455. 1869.
6) Pogg. Ann. CXXIX. p. 520. 1866.

hängiger Leitungswiderstand. Dieser Thatsache ist es zuzuschreiben, dass die verschiedenen Methoden der Widerstandsbestimmung für ein und dieselbe Combination verschiedene Werthe ergeben. Vor allem wird man solche Methoden vermeiden müssen, welche einen andauernden Stromschluss verlangen, und unter diesen wieder solche, welche (wie die Ohm'sche oder die von Rolland benutzte Wheatstone'sche) aus mehreren hinter einander auszuführenden Messungen bestehen, bei denen der Strom wohl im Galvanometer, aber nicht in der Säule die gleiche Stärke hat. Es ergibt sich zwar aus den Messungen, dass jene, oben mit k bezeichnete Widerstandsvermehrung nicht sehr gross ist gegen x selbst, immerhin macht sie die Messungen unsicher und Hr. Rolland hat selbst bemerkt, dass wohl die Veränderungen in der electromotorischen Kraft seiner Säule nicht ohne Einfluss auf das Ergebniss seiner Widerstandsmessungen geblieben sind.

Um den normalen Widerstand einer Säule zu bestimmen, bediene ich mich deshalb immer nur der Brückenmethode, wobei ich den Strom, welcher durch die Zweigleitungen geführt wird, nur momentan schliesse[1]). Der so erhaltene normale Widerstand ist aber nicht der, welcher während der Arbeitsleistung der Thermosäule wirklich vorhanden ist. Um diesen zu finden, wende ich die Methode an, welche mir schon früher zur Bestimmung innerer Widerstände von Batterien, besonders auch von Thermosäulen, gedient hat[2]). Diese Methode, darauf beruhend, dass der Strom eines Daniell'schen Normalelementes zweimal hinter einander bei verschiedener Schlittenstellung nach der du Bois'schen Compensationsmethode durch die Thermosäule (als compensirende Säule) auf Null gebracht wird, verlangt ebenfalls nur einen momentanen Stromschluss. Der Werth k kommt deshalb äusserst wenig in Betracht; immerhin wird es nie gelingen, ihn ganz un-

1) Vgl. hierüber meine oben angezogene Arbeit.
2) Pogg. Ann. CXLII. p. 573. 1871.

schädlich zu machen, da die compensirende Säule immer etwas vor der compensirten geschlossen werden muss. Für die Bestimmung der electromotorischen Kraft einer Thermosäule compensire ich durch eine beliebige Säule (ein oder mehrere Grove'sche Elemente) einmal das Daniell'sche Normalelement und gleich darauf die Thermosäule, so dass das Verhältniss der beiden durch den Schlitten vom Compensatordraht abgeschnittenen Stücke ohne weiteres die electromotorische Kraft in der Einheit D=1 angibt. Für diese Messungen habe ich mich stets des im vorhergehenden Aufsatze beschriebenen Universalcompensators bedient.

Die Angaben, welche die Herren von Waltenhofen und Streintz über die Noë'sche Thermosäule gemacht haben, sind wohl so erschöpfend, dass weitere Mittheilungen über dieselbe unnöthig wären. Aber die erwähnten Angaben beziehen sich auf neue Apparate, diejenigen, welche ich im Nachfolgenden mache, auf eine viel und leider oft ohne die nöthige Vorsicht benutzte lineare Säule von 80 Elementen, welche in vier Gruppen von je 20 abgetheilt sind. Die Säule ist eine der älteren, welche Noë construirt hat, und zeigt schon äusserlich einige Defecte; die negativen Kupferdrähte, welche mit ihrem Ende nur wenig in die positiven Antimon-Zinkcylinder hineinragen, sind theilweise ganz von denselben getrennt, oberflächlich oxydirt und berühren sie nur durch Federdruck. In der That ging denn auch von dem Strome einer vierpaarigen Stöhrer'schen Chromsäurebatterie gar nichts durch die ganze Säule hindurch. Ebenso wenig zeigten von den vier Abtheilungen der Säule, welche mit *A*, *B*, *C* und *D* bezeichnet werden mögen, *A*, *C* und *D* irgendwelche Leitungsfähigkeit, der Widerstand in *B* dagegen war relativ gering, nämlich =1,495 S.-E. Ich hielt demnach die Säule für ganz unbrauchbar geworden und war um so mehr überrascht, als sie beim Erhitzen (bei Benutzung aller 80 Elemente hinter einander) in der Minute 5,3 ccm Knallgas lieferte. Es waren wohl zwei Umstände, welche jetzt die

Leitung vermittelten, nämlich die Vermehrung des mechanischen Druckes, mit welchem sich das Kupfer an die Metallegirung infolge der Ausdehnung beider anlegte, dann aber die Vergrösserung, welche die Leitungsfähigkeit von Metalloxyden beim Erhitzen erfährt[1]). Die Messung der electromotorischen Kräfte der vier Gruppen ergab:

$A = 1{,}604$, $B = 1{,}595$, $C = 1{,}604$, $D = 1{,}621$ D.

80 Elemente = 6,424 D. 1 Element = 0,08 D.

Als die sichtbar schadhaften Stellen der Säule durch Löthung ausgebessert waren, liessen sich die Widerstände der vier Grupen bestimmen; es war der von:

$A = 3{,}8$, $B = 1{,}5$, $C = 14{,}0$, $D = 30{,}5$ S.-E.,

die electromotorischen Kräfte aber hatten dadurch so gut wie keine Veränderung erfahren. Die Widerstandsbestimmungen, welche an der Säule nach der Compensationsmethode ausgeführt wurden, während dieselbe in Thätigkeit war, ergaben begreiflicherweise wiederum eine bedeutende Widerstandsabnahme beim Erwärmen, so zwar, dass der Gesammtwiderstand der 80 Elemente, der nach obiger Messung ursprünglich = 50 S.-E. war, bis auf 5,9 S.-E. hinabging.

Was aus diesen Versuchen hervorgeht, ist, dass selbst die stark abgenutzte Säule noch einige ihrer guten Eigenschaften bewahrt hat. Die electromotorische Kraft eines Elementes der linearen Säule soll nach von Waltenhofen ungefähr = 0,10 D. sein, bei starker Ueberhitzung = 0,13 D., während derselbe die electromotorische Kraft eines Elementes der mit Heizstiften geheizten Cylindersäule = 0,08 D. fand. Hierbei waren die Heizstifte schwach glühend erhalten. Hr. Streintz fand für die Kraft eines Elementes einer solchen Cylindersäule nur 0,04 D. (108 Elemente = 4,3 D.) und nahe übereinstimmend damit lieferte mir eine von Dörffel in Berlin gearbeitete 20-

1) Vgl. meine Untersuchungen in Pogg. Ann. CXI. p. 619. 1860.

paarige Cylindersäule durch einen einfachen Bunsenbrenner erhitzt nur die Kraft 0,97 D., also für ein Element 0,048 D.; diese Kraft wuchs aber beim Erhitzen mit einem Dreiflammenbrenner bis 1,41 D., also für ein Element auf 0,07 D. Den Normalwiderstand dieser Säule fand ich = 1,32 S.-E.; während des Erhitzens wurde er nach der Compensationsmethode = 1,52 S.-E. gefunden. Die alte, abgenutzte Säule hatte also immer noch eine verhältnissmässig sehr hohe electromotorische Kraft. Dass diese überhaupt abgenommen hatte, war wohl den eingeschobenen Oxydschichten zuzuschreiben.

Die andern guten Eigenschaften der Noë'schen Säule sind: ihre sofortige Verwendbarkeit, sobald einmal die Gasbrenner angezündet worden sind, und die grosse Gleichmässigkeit der Wirkung in den vier Gruppen. Hieran hatte der Gebrauch nichts geändert.

Die Clamond'sche Säule, von der mir zwei Exemplare in der von Koch in Eisleben ausgeführten Construction zu Gebote standen, hat gegen die Noë'sche den Nachtheil, dass sie lange (eine Stunde lang) geheizt werden muss, ehe sie zu ihrer vollen Wirkung gelangt, dagegen den grossen Vortheil der Dauerhaftigkeit und Unveränderlichkeit, indem sämmtliche Elemente in einen Thonmantel eingebettet sind. Die eine der beiden Säulen (I) wurde durch ein Brennerrohr mit dem von Koch beigegebenen Gasregulator geheizt, die andere (II) ohne solchen Regulator. Jede der Säulen besteht aus 120 Elementen, welche in vier Gruppen zu je 30 abgetheilt sind. Die Widerstände der einzelnen Gruppen, sowie der ganzen Säule, wurden nach der Brückenmethode bestimmt und zwar einmal mit momentanem Stromschluss, einmal mit dauerndem. Hierdurch wurden die beiden Werthe x und x' gefunden, deren Differenz $x' - x = k$ den durch die Peltier'sche Polarisation scheinbar hinzukommenden Widerstand ausdrückt. Es wurde gefunden für:

	Säule I.			Säule II.		
	x	x'	k	x	x'	k
Abtheilung *A*	0,560	0,575	0,015	0,705	0,720	0,015
„ *B*	0,555	0,570	0,015	0,820	0,835	0,015
„ *C*	0,500	0,514	0,014	0,795	0,810	0,015
„ *D*	0,445	0,459	0,014	0,796	0,810	0,014
Summe:	2,060	2,118	0,058	3,110	3,170	0,060
Ganze Säule	2,060	2,119	0,059	3,116	3,175	0,059

Die Abtheilung *A* ist die oberste, *D* die unterste.

Die electromotorische Kraft der beiden Säulen fand ich sehr viel geringer, als sie der Angabe nach sein sollte. Während Herr Koch angibt, dass seine Säule in seinem Voltameter eine Knallgasentwickelung von 7 bis 8 ccm in der Minute gebe, gelang es mir nie, viel über 4 ccm zu erhalten. Ich möchte daraus indess nicht schliessen, dass nicht unter günstigeren Bedingungen eine grössere Wirkung erzielt werden könne. Die folgenden Zahlen sollen nicht die electromotorischen Kräfte angeben, welche man mit den Koch'schen Säulen überhaupt erreichen kann, sondern nur die, welche man in der Regel erhält, wobei ich bemerke, dass meine Versuche an sehr heissen Sommertagen angestellt worden sind, so dass die Luftkühlung eine äusserst ungünstige war; auch war der Gasdruck ein geringer.

		Säule I.	Säule II.
Abtheilung *A*	=	0,920 D.	0,867 D.
„ *B*	=	0,815 „	0,880 „
„ *C*	=	0,557 „	0,650 „
„ *D*	=	0,338 „	0,274 „
120 Elemente	=	2,630 D.	2,671 D.
1 Element	=	0,022 „	0,022 „

Was aus diesen Zahlen vor allem hervorgeht, ist, dass die Brenner ganz ungünstig angebracht sind. Die Gase der Flamme erhitzen die oberen Abtheilungen der Säulen weit stärker, als die unteren, so dass die letzteren weitaus nicht ausgenutzt werden. Ich habe den Brenner

der Säule I herausgenommen und tiefer gelegt und dann bei gleichem Gasverbrauch, wie früher, die folgenden electromotorischen Kräfte gefunden:

Abth. $A=0{,}655$, $B=0{,}819$, $C=0{,}800$, $D=0{,}619$ D.
Summa: 2,893 D.

Jetzt waren die mittleren Abtheilungen am stärksten erwärmt. Wenn das Brennerrohr ausser der gehörigen Tiefe auch noch die richtige Länge erhält, so wird die electromotorische Kraft der ganzen Säule noch erheblich gesteigert werden können.

Um endlich einen Begriff zu bekommen von der Veränderung, welche der Widerstand dieser Thermosäulen durch die Erwärmung erfährt, habe ich die Säule I mit allmählich zunehmender Flammengrösse geheizt, und jedesmal, wenn eine Constanz erreicht war, durch die Compensationsmethode den Widerstand und die electromotorische Kraft bestimmt. Es wurde gefunden:

elomot. Kraft	0	1,96	2,23	2,39	2,55	2,96 D.
Widerstand	2,060	2,204	2,358	2,496	2,705	2,932.

Ein bestimmtes Gesetz, welches die beiden gefundenen Grössen mit einander verbindet, lässt sich nicht erwarten, da die Luftkühlung nicht immer dieselbe war; jedenfalls findet eine ziemliche Regelmässigkeit in der Widerstandszunahme mit der Temperatur statt und zwar in einem Betrage, gegen den der oben gefundene Werth von k nur gering ist.

Was die aus den mitgetheilten Versuchen sich ergebenden Schlüsse über die Brauchbarkeit der Noë'schen und Clamond-Koch'schen Thermosäulen betrifft, so gewinnt die letztere durch ihre grosse Solidität den Vorzug für technische Zwecke. Dass sie lange vor dem Gebrauche angeheizt werden muss, ist hierfür gleichgültig; einmal in Thätigkeit, arbeitet sie mit grosser Constanz, sowohl in Bezug auf ihre electromotorische Kraft, als auf ihren Widerstand fort. Auch wenn bei gleicher Elementenzahl die electromotorische Kraft hinter der der Noë'schen Säule

zurückbleibt, wird ihre Brauchbarkeit nicht geringer, da die Vermehrung der Elemente leicht zu bewerkstelligen ist. Nur die Brenner müssen, den obigen Angaben entsprechend, zweckmässiger construirt werden. Dagegen bietet die Noë'sche Säule für Laboratorienzwecke die grosse Annehmlichkeit, dass man (durch Koppelung mehrerer Cylindersäulen) eine ergiebige Stromquelle schnell zur Hand hat, deren electromotorische Kraft ebenfalls recht constant ist und deren Dauerhaftigkeit in der neuen Construction auch schon wesentlich gewonnen hat.

III. *Die Theorie der stationären Strömung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten betrachtet; von W. v. Bezold.*

(Aus den Sitzungber. d. k. bayr. Akad. 2. Juni 1877, vom Hrn. Verfasser mitgetheilt.)

Wenn man die von Kirchhoff[1]) gegebene Ableitung der Ohm'schen Gesetze oder auch die von Clausius[2]) durchgeführten Untersuchungen über die von einem galvanischen Strome im Leiter gethane Arbeit aufmerksam betrachtet, so kann es kaum entgehen, dass dieselben im wesentlichen nicht nur für electrische Ströme giltig sind, sondern dass sie mit kleinen Abänderungen gerade so gut auf andere Arten stationärer Ströme übertragbar sind.

Thatsächlich haben auch z. B. die Gesetze für den Durchgang der Wärme durch parallele Wände von geringer Dicke[3]) und grosser Flächenausdehnung genau dieselbe Form, wie die Ohm'schen. Das gleiche gilt von den Formeln, welche die Luftmengen angeben, die bei ein-

1) Pogg. Ann. LXXVIII. p. 506.
2) Pogg. Ann. LXXXVII. p. 415, XC. p. 513.
3) Péclet. Traité de la Chaleur (3) I. p. 408.

seitigem Ueberdrucke durch poröse Wandungen hindurch gepresst werden[1]), nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle der im Ohm'schen Gesetze vorkommenden electromotorischen Kräfte (d. i. Spannungsdifferenzen) in dem einen Falle Temperatur-, in dem anderen Druckdifferenzen treten.

Auch das in den Lehrbüchern viel benutzte Gleichniss, bei welchem man statt des galvanischen Stromes einen Wasserstrom betrachtet, lässt sich viel weiter verfolgen, als man im ersten Augenblicke glauben möchte. So kann man z. B. verschiedene Eigenthümlichkeiten der galvanischen Kette trefflich versinnlichen, wenn man sich an Stelle der Elemente Pumpwerke gesetzt denkt, welche Wasser um bestimmte Höhen heben, während Röhren von dem oberen Ende einer jeden Pumpe zu dem unteren der nächstfolgenden führen und so bei Thätigkeit der Pumpen einen geschlossenen Strom ermöglichen. Entnähme die erste der Pumpen ihr Wasser einem grossen Reservoir, z. B. einem See, während die letzte das gehobene Wasser in ein eben solches Reservoir entleerte, so hätte man bei fortgesetzter Wirksamkeit der Pumpen ebenfalls einen stationären Strom, gerade wie in einer Telegraphenleitung, deren Enden mit Erdplatten verbunden sind u. s. w.

Dieses Gleichniss liesse sich noch viel weiter ausspinnen, ohne die Analogie zu verlieren.

Eine so weit gehende Uebereinstimmung ist nicht denkbar ohne tiefere innere Begründung und muss unwillkürlich dazu anregen, weitere Studien in diesem Sinne durchzuführen.

Es schien deshalb angezeigt, einmal den Versuch zu machen, ob es nicht möglich sei, ganz allgemeine Gesetze aufzustellen, welche für alle Arten stationärer Ströme gültig sind, und welche alsdann sowohl die Ohm'schen und Kirchhoff'schen Gesetze der Stromesleitung und Stromverzweigung als auch das Lenz-Joule'sche Gesetz der Erwär-

1) C. Lang Z. S. f. Biol. II. Bd. XI. p. 323.

mung durch den Strom als specielle Fälle in sich schliessen müssten.

Einer solch allgemeinen Untersuchung sollen die folgenden Zeilen und voraussichtlich noch einige spätere Mittheilungen gewidmet werden, da sich thatsächlich zeigen wird, dass eine Menge von Fragen der Mechanik, und zwar aus sehr verschiedenen Gebieten, eine Behandlung unter diesem Gesichtspunkte gestatten. Wenn hier die Beispiele für die einzelnen Sätze zunächst der Lehre vom galvanischen Strome entnommen werden, so liegt der Grund darin, dass es besonders interessant schien, zu zeigen, dass verschiedene der dort längst bekannten und bewiesenen Sätze nicht sowohl in dem Wesen der Electricität wurzeln, als vielmehr dem stationären Strome eigen sind, und dass sie den Grundanschauungen über dieses Wesen noch äusserst weiten Spielraum gewähren.

Um das Verständniss zu erleichtern, müssen jedoch vor allem einige Definitionen gegeben, beziehungsweise ins Gedächtniss zurückgerufen werden.

Definitionen und einleitende Bemerkungen.

Wenn ein System von Punkten sich in der Weise bewegt, dass an bestimmten, dem Systeme angehörigen Stellen des Raumes jederzeit genau der nämliche Bewegungszustand herrscht, so nennt man die Bewegung an jenen Stellen „stationär“ und zwar wollen wir sie in diesem Falle als „einfach stationär“ bezeichnen.

Tritt eine solche Gleichheit des Bewegungszustandes nur innerhalb gewisser Perioden ein, so dass innerhalb jeder Periode sich dieselben Bewegungszustände in genau gleicher Weise wiederholen, so soll die Bewegung „periodisch stationär“ heissen.

Streng genommen ist eine einfach stationäre Bewegung nur denkbar bei continuirlicher Vertheilung der bewegten Massen; bei discontinuirlich vertheilten kann sie nur periodisch sein, aber diese Periode kann unendlich klein werden im Vergleiche mit den übrigen in Betracht kom-

menden Zeiten und man darf dann eine solche Bewegung mit demselben Rechte als einfach stationäre betrachten, mit welchem man z. B. einen schweren Körper als continuirlich mit Masse erfüllt ansieht, obwohl man sich denselben aus Atomen zusammengesetzt denkt.

Der Allgemeinheit wegen soll im Folgenden immer von Punkten die Rede sein, da die so durchgeführten Betrachtungen auch jenen Fall in sich schliessen, wo die Anzahl der in einem Raumstücke enthaltenen Punkte unendlich gross wird, ein Fall, den man, wie bemerkt, bei einfach stationärer Bewegung immer voraussetzen muss. Dabei sollen diese Punkte, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, immer als materielle Punkte, d. h. als träge Massen aufgefasst werden, obwohl verschiedene der später aufzustellenden Sätze auch bei rein mathematischen Punkten gültig bleiben. Inwiefern sich die Sätze für die Bewegung träger Massen auf die Fortpflanzung blosser Zustände übertragen lassen, muss in jedem einzelne Falle besonders entschieden werden[1]).

Bewegen sich durch eine Linie oder durch einen Complex stetig neben einander verlaufender Linien Punkte in der Art, dass durch jede Fläche, welche sämmtliche Linien schneidet, in gleichen Zeiten die gleiche Punktenzahl hindurchgeht, so nennt man das ganze einen stationären Strom. Der Strom ist einfach stationär, wenn diese Zeiten beliebig kurz gewählt werden können, periodisch stationär, wenn die Bedingung nur für bestimmte, aber gleich lange, Zeiträume erfüllt ist.

---

1) So kann man z. B. eine Schwingung, welche die Gesammtenergie $\frac{mv^2}{2}$ besitzt und sich mit der Geschwindigkeit c längs einer Geraden fortpflanzt, in vielen Fällen durch eine Masse $M=\frac{mv^2}{c^2}$ ersetzt denken, welche sich mit der Geschwindigkeit c in derselben Geraden bewegt. Die Möglichkeit, eine grosse Zahl von optischen Erscheinungen mit Hülfe der Emanationstheorie zu erklären, beruhte nur darauf, dass eine solche Vertauschung translatorischer Bewegungen mit oscillatorischen innerhalb gewisser Grenzen zulässig war.

Beispiele eines einfach stationären Stromes bieten, abgesehen vom galvanischen Strome und von den Wärmeströmen, die Bewegungen in Wasser- und Gasleitungen oder in den Röhren einer Wasserheizung, oder die Bewegungen der Luft in Kaminen und Ventilationsanlagen, annäherungsweise auch die Bewegungen des Wassers in Flüssen und Kanälen, das Ausströmen von Gasen und Dämpfen bei constantem Ueberdruck u. s. w.

Periodisch stationäre Ströme erhält man, wenn man z. B. in einen galvanischen Strom einen Selbstunterbrecher einschaltet, oder bei den gewöhnlichen Pumpen, beim hydraulischen Widder, bei der Dampfmaschine u. s. w.

Den Weg, welchen ein Punkt eines Stromes durchläuft, nennt man Stromlinie.

Eine Fläche, welche sämmtliche Stromlinien senkrecht schneidet[1]), heisst ein Querschnitt des Stromes.

Den Inbegriff aller durch ein Element eines Querschnitts gehenden Stromlinien nennt man einen Stromfaden.

Durchlaufen dieselben Punkte den nämlichen Querschnitt immer wieder, so nennt man den Strom in sich geschlossen.

Ein Strom kann in sich geschlossen sein, ohne dass die einzelnen Stromfäden in sich geschlossen sind.

Treten die Stromfäden an einzelnen Stellen auseinander, so dass sie nicht mehr mit einander in Berührung stehen, so heisst der Strom verzweigt.

Die Menge der Punkte, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Stromes geht, dient als Maass für die „Stromintensität“ oder „Stromstärke.“ Sie soll mit i bezeichnet werden.

Beim einfach stationären Strom ist die Stromstärke

---

1) Man kann nicht behaupten, dass immer eine solche Fläche existire; wo dies nicht der Fall ist, müssen eben besondere Untersuchungen darüber angestellt werden, ob die im Folgenden zu gebenden Sätze noch anwendbar sind.

constant, d. h. sowohl von der Zeit als auch von der Lage des betreffenden Querschnittes unabhängig.

Beim periodisch stationären Strome ist die „mittlere Stromintensität“ constant. Bezeichnet man demnach diese mittlere Intensität durch J, die Periode aber durch T, so muss für jeden Querschnitt und für jede Zeit t:

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i\,dt$$

constant sein.

In dieser Mittheilung sollen nur einfach stationäre Ströme betrachtet werden.

Auch sollen die Entwickelungen zunächst auf Stromfäden beschränkt werden, deren Querschnitt so klein ist, dass man in allen Punkten eines solchen Querschnitts die Geschwindigkeit u. s. w. gleich annehmen darf.

Ist die eben genannte Bedingung auch für die Querschnitte eines ganzen Stromes erfüllt, so sind selbstverständlich die gewonnenen Sätze sofort auf den ganzen Strom übertragbar.

Theorie der einfach stationären Strömung.

§. 1. Denkt man sich aus einem einfach stationären Strome einen Stromfaden herausgenommen, der an einer beliebigen Stelle den (unendlich kleinen) Querschnitt q hat, und nennt man die Geschwindigkeit, mit welcher die Punkte durch diesen Querschnitt fliessen, v, die Dichtigkeit der Punkte aber, d. h. die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Punkte oder eine ihr proportionale Grösse, also auch die in der Volumeneinheit enthaltene Masse, δ, so ist:

$$i = vq\delta. \tag{1}$$

Wenn nämlich die Punkte mit der Geschwindigkeit v durch den Querschnitt fliessen, so füllen die während einer Zeiteinheit hindurchgegangenen ein Element des Stromfadens von der Basis q und von der Höhe v und ihre Menge, beziehungsweise die in dem Element enthal-

tene Masse ist alsdann $q v \delta$, diese Menge ist aber das Maass der Stromstärke.

δ soll die Massendichtigkeit oder die Dichtigkeit des strömenden Mediums heissen, nicht zu verwechseln mit der Stromdichte ϱ. Letztere wird gemessen durch die Menge der in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fliessenden Punkte und es ist demnach:

$$\varrho = \frac{i}{q}. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) ergeben sich sofort zwei wichtige Folgerungen für zwei extreme Fälle.

Ist nämlich δ constant $= \delta^*$, so ist auch $\frac{i}{\delta^*}$ constant, etwa $= \varkappa$, und demnach:

$$v = \frac{i}{q\delta^*} = \frac{\varkappa}{q}, \tag{3}$$

d. h. die Geschwindigkeit ist in diesem Falle dem Querschnitt umgekehrt proportional, während die Stromesdichtigkeit:

$$\varrho = \frac{i}{q} = v\delta^*$$

wird und mithin der Geschwindigkeit proportional ist.

Diesen Fall hat man bei incompressibeln Flüssigkeiten von constanter Temperatur vor sich.

Ist dagegen $q\delta$ constant, d. h. rücken die Punkte in demselben Maasse aneinander, in welchem der Querschnitt abnimmt, so ist auch v constant $= v^*$ und $\varrho = \delta v^*$ sagt in diesem Falle aus, dass die Stromesdichtigkeit der Dichtigkeit des strömenden Mediums proportional ist.

Es soll später gezeigt werden, dass man sich den galvanischen Strom von dieser Beschaffenheit zu denken hat.

§. 2. Wählt man einen Querschnitt als Ausgangspunkt und schneidet man, von diesem anfangend, im Sinne der Stromesrichtung eine Länge s von dem Stromfaden ab, so sind q und v nur Functionen von s, während i davon unabhängig, d. h. allenthalben constant ist.

Die Beschleunigung, welche die strömenden Punkte an einer gegebenen Stelle erfahren, ist, sobald einmal der

Strom stationär ist, und nur diesen Fall betrachten wir hier, eine Function von s.

Es gibt demnach für die accelerirenden Kräfte, d. h. für die im Sinne der Stromesrichtung wirkenden, jedenfalls eine Kräftefunction V, deren negativer Differentialquotient $-\frac{dV}{ds}$ die im Sinne der Stromesrichtung auf die Masseneinheit wirkende beschleunigende Kraft ist. Da man in allen Fällen, wo diese Kraft die Folge von Anziehungen oder Abstossungen ist, dieselbe den Massen proportional setzen muss, auf welche sie wirkt, so ist die Kraft, welche auf die in einem Stromelemente von der Länge ds enthaltenen Massen $q\delta ds$ wirkt, $= -q\delta\frac{dV}{ds}ds$ und mithin die Beschleunigung φ im Sinne der Stromesrichtung:

$$\varphi = -\frac{q\delta\, ds\frac{dV}{ds}}{q\delta ds} = -\frac{dV}{ds}.$$

Um die Gesammtbeschleunigung zu erhalten, muss man noch die im entgegengesetzten Sinne thätigen retardirenden Kräfte in Rechnung bringen. Bezeichnet man die durch sie hervorgebrachte Verzögerung ihrem absoluten Werthe nach durch ξ, so erhält man als Gesammtbeschleunigung:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi. \tag{4}$$

Hierbei empfiehlt es sich, den negativen Werth des Differentialquotienten als Beschleunigung anzusehen, weil bei Wirkung der Schwerkraft $V = gh$ wird, wo h die Höhe über der Erdoberfläche ist, und man bei Wasserströmen die Richtung von oben nach unten als positive ansieht, während bei galvanischen Strömen V die Potentialfunction ist und auch dort im Sinne des sinkenden Werthes von V die Strömung erfolgt.

Die Betrachtungen in diesem Paragraphen sind so geführt, als ob das strömende Medium aus einzelnen freien Massenpunkten bestände. Sie sind jedoch auch dann noch gültig, wenn zwischen den Punkten dieses strömenden

Systemes Kräfte thätig sind, sofern man nur unter $\frac{dV}{ds}$ und ξ nicht nur die von aussen wirkenden, sondern die Summe dieser Kräfte und der aus den Verbindungen entspringenden versteht.

§. 3. Die Gleichung (4) soll zunächst dazu verwerthet werden, die von dem Strome geleistete Arbeit zu ermitteln.

Die Kraft, welche auf die im Stromelemente vom Querschnitt q und von der Länge ds befindliche Masse ausgeübt wird, ist:

$$q\delta\frac{dv}{dt}ds = -q\delta\frac{dV}{ds}ds - q\delta\xi ds.$$

Dem entsprechend erhält man die während der Zeiteinheit geleistete Arbeit durch Multiplication dieses Werthes mit v, d. h. mit dem Wege, durch welchen diese Kraft während der Zeiteinheit thätig ist.

Die Arbeit ist mithin:

$$vq\delta\frac{dv}{dt}ds = -vq\delta\frac{dV}{ds}ds - vq\delta\xi ds,$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $vq\delta = i$ und

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \text{ ist:}$$

$$iv\frac{dv}{ds}ds = -i\frac{dV}{ds}ds - i\xi ds.$$

Diese Arbeit stellt sich als Differenz der Arbeiten der accelerirenden und retardirenden Kräfte dar.

Von den drei hier stehenden Grössen bietet die letzte das meiste Interesse dar, d. h. es ist von besonderer Bedeutung, die Arbeit kennen zu lernen, welche auf einer bestimmten Strecke zur Ueberwindung der Widerstände zu leisten ist. Bezeichnet man diese Arbeit für das zwischen s' und s'' liegende Stromstück durch U, während die dem s' und s'' entsprechenden Werthe von V, v, q und δ ebenfalls durch die entsprechenden Indices charakterisirt werden sollen, so findet man:

$$U = \int_{s'}^{s''} i\xi\, ds = i(V'' - V''') - i\left(\frac{v''^2}{2} - \frac{v'^2}{2}\right)$$

oder:

$$U = i\left(V' + \frac{v''^2}{2}\right) - i\left(V''' + \frac{v''^2}{2}\right), \tag{5}$$

oder wenn man:

$$i\left(V' + \frac{v'^2}{2}\right) = U' \text{ und } i\left(V''' + \frac{v''^2}{2}\right) = U''' \text{ setzt,}$$

$$U = U' - U''.$$

Hierbei ist aber $i\,V'$ nichts anderes als die sogenannte potentielle, $i\frac{v'^2}{2}$ die actuelle Energie, ihre Summe also die Gesammtenergie.

Der Satz heisst demnach: die in der Zeiteinheit auf dem Stromstücke von der Länge s zur Ueberwindung der Widerstände verbrauchte Arbeit ist gleich dem Verluste an Gesammtenergie, welchen die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fliessende Masse auf dem Wege s erleidet.

Dieser Satz enthält natürlich nichts Neues in sich, sondern ist nach dem Gesetze der Erhaltung der Kraft selbstverständlich, trotzdem schien seine Ableitung auf diesem Wege wegen des Folgenden unerlässlich.

Unter Benutzung der Gleichung (1) geht die Formel (5) in die folgende über:

$$U = i(V' - V''') + \frac{i^3}{2}\left[\frac{1}{(q'\delta')^2} - \frac{1}{(q''\delta'')^2}\right]$$

oder auch:

$$U = i(V' - V''') + \frac{i}{2}\left[\left(\frac{\varrho'}{\delta'}\right)^2 - \left(\frac{\varrho''}{\delta''}\right)^2\right].$$

Diese Formen gestatten besonders einfache Behandlung der beiden oben erwähnten extremen Fälle.

Ist nämlich δ constant, so ergibt sich:

$$U = i(V' - V''') + \frac{i}{2\delta^2}(\varrho'^2 - \varrho''^2);$$

ist dagegen $q\delta$ oder, was das nämliche ist, v constant, so wird:

$$U = i\,(V' - V''').$$

Sind die retardirenden Kräfte derartig beschaffen, dass die zu ihrer Ueberwindung erforderliche Arbeit nur in Wärme verwandelt wird, wie dies z. B. bei Reibungswiderständen der Fall ist, so erhält man die auf der betrachteten Strecke des Stromfadens entwickelte Wärme Q durch die Formel:

$$Q = AU,$$

wo A das calorische Aequivalent der Arbeit ist.

Unter Anwendung auf Electricität ist alsdann Formel (5) nichts anderes als das Lenz-Joule'sche Gesetz.

Man kann demnach auch die Formel (5) als die auf alle Arten einfach stationärer Ströme anwendbare Erweiterung dieses Satzes betrachten.

§. 4. Wäre s die ganze Länge eines in sich geschlossenen Stromes und würde das Gesetz:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

allenthalben die gleiche Form behalten und auch nirgends Unstetigkeiten vorkommen, welche eine Integration durch den ganzen Stromkreis unzulässig erscheinen liessen, so wäre $v' = v''$ und $V' = V''$ und mithin auch:

$$U = \int_{s'}^{s''} i\,\xi\,ds = 0$$

oder da ξ, so lange es unter die oben gegebene Definition fällt, sein Zeichen nicht wechseln kann:

$$\xi = 0.$$

Wenn demnach ein stationärer geschlossener Strom überhaupt möglich sein soll, so müssen entweder die Widerstände überall gleich 0 sein, oder es müssen die Werthe von V Unstetigkeiten zeigen, oder es müssen an die Stelle von ξ an einzelnen Strecken Ausdrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen, d. h. noch andere accelerirende Kräfte als die durch $\frac{dV}{ds}$ ausgedrückten treten.

Dies lässt sich folgendermaassen näher untersuchen:

Man theilt den ganzen Strom in $2n$ Stücke in der Art, dass auf den Strecken $1, 3 \ldots (2n-1)$ die Gleichung (4) in der oben bezeichneten Weise gültig bleibt, während die Strecken $2, 4 \ldots 2n$ die Ausnahmsstellen enthalten sollen, wobei es aber durchaus nicht nöthig ist, dass all diese Strecken mit geradem Index wirklich solche enthalten, sondern nur vorausgesetzt ist, dass auf den ungeradzahligen keinesfalls solche vorkommen.

Dann gelten jedenfalls die Gleichungen:

$$U_1 = U'_1 - U''_1 = i\left(V'_1 + \frac{v'^2_1}{2}\right) - i\left(V''_1 + \frac{v''^2_1}{2}\right)$$

$$U_3 = U'_3 - U''_3 = i\left(V'_3 + \frac{v'^2_3}{2}\right) - i\left(V''_3 + \frac{v''^2_3}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_{2n-1} = U'_{2n-1} - U''_{2n-1} = i\left(V'_{2n-1} + \frac{v'^2_{2n-1}}{2}\right) - i\left(V''_{2n-1} + \frac{v''^2_{2n-1}}{2}\right).$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man:

$$(6) \qquad \sum_1^n U_{2\nu-1} = \sum_1^n (U'_{2\nu+1} - U''_{2\nu-1})$$

wobei man nur zu beachten hat, dass für den geschlossenen Strom der Index $(2n+1)$ mit dem Index 1 identisch, d. h.:

$$U'_{2n+1} = U'_1 \text{ wird.}$$

Dieser Satz lässt sich folgendermaassen aussprechen:

Nimmt man aus einem geschlossenen Strome beliebig viele Stücke heraus, welche jedoch sämmtlich der Bedingung genügen, dass auf ihnen die Totalenergie (immer bezogen auf die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fliessende Masse) im Sinne der Stromesrichtung abnimmt, so erhält man den auf sämmtlichen Stücken in der Zeiteinheit erfolgenden Verlust an totaler Energie, indem man die Sprünge, welche diese Grösse beim Uebergange von einem Stücke zum nächstfolgenden erleidet, addirt. Dabei ist dieser Sprung, d. h. die Differenz positiv zu rechnen, wenn die Totalenergie im Anfangspunkte des im Sinne der

Stromesrichtung nachfolgenden Stückes grösser ist als am Ende des vorhergehenden.

Sind die widerstehenden Kräfte der Art, dass aller Aufwand von Energie zur Erzeugung von Wärme dient, so gibt diese Summe die auf den betreffenden Stromstücken entwickelte Wärme in mechanischem Maasse.

Da dieser Satz gültig bleibt, ohne irgendwelche Rücksicht auf das Verhalten der zwischenliegenden, mit geradem Index behafteten Stücke, so umfasst er auch jenen Fall, wo diese Stücke unendlich kurz werden und der Trennungspunkt zweier aufeinanderfolgender Strecken mit ungeradem Index ein Discontinuitätspunkt wird.

Ist v auf jedem der betrachteten Stromstücke constant, d. h. $v_1' = v_1''$ u. s. w., so wird:

$$\sum_1^n U_{2\nu-1} = i \sum_1^n (V'_{2\nu+1} - V''_{2\nu-1})$$

oder wenn man die zwischenliegenden Stücke vom Index 2ν ganz ignorirt und fortlaufend zählt:

$$(7) \qquad \sum_1^n U_\mu = i \sum_1^n (V'_{\mu+1} - V''_\mu) = i \sum_1^n V_{\mu,\mu+1},$$

wo die Differenz

$$V'_{\mu+1} - V''_\mu = V_{\mu,\mu+1} \text{ gesetzt ist.}$$

Beim galvanischen Strome ist $V_{\mu,\mu+1}$ nichts anderes als die an der Berührungsstelle der Leiter μ und $(\mu + 1)$ herrschende electromotorische Kraft oder:

$$\sum_1^n U_\mu = i \Sigma E$$

und die im ganzen Schliessungsbogen entwickelte Wärmemenge ist demnach:

$$(8) \qquad \Sigma Q = A i \Sigma E,$$

ein Satz, der jedoch nur auf die metallischen Theile des Schliessungsbogens anwendbar ist, und auch hier nur nach Ausschluss der Berührungsstellen verschiedener Metalle, d. h. ohne Berücksichtigung des Peltier'schen Phänomens.

Die Formel (6) wirft ein interessantes Licht auf Fälle, wo eine Querschnittsänderung eintritt:

Nimmt man nämlich ein Stromstück heraus, in welchem $q'' > q'$, so wird, wie oben bemerkt, bei einer incompressibeln Flüssigkeit $v' > v''$ und ist demnach in der Formel:

$$U = i(V' - V'') + i\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{v''^2}{2}\right),$$

welche den Aufwand an totaler Energie auf dem betrachteten Stücke darstellt, nicht nur die erste Differenz positiv, sondern auch die zweite.

Wenn hingegen $q' > q''$, so ist die zweite negativ. Würde man nun in den beiden Fällen Strecken von solcher Länge wählen, dass $(V' - V'')$ den gleichen Werth behielte, so würde das Gesammtresultat im ersteren Falle grösser werden als im zweiten.

Nimmt man an, dass der ganze Aufwand von Energie zu Wärmeentwickelung diene, so würden demnach bei einer incompressibeln oder nur schwach compressibeln Flüssigkeit die Uebergangsstellen von engerer zu weiterer Leitung eine grössere Wärmeabgabe zeigen als Stellen, an welchen die Leitung enger wird.

Da beim galvanischen Strome ein solcher Einfluss von Querschnittsänderungen nicht nachweisbar ist, so folgt wenigstens unter Zugrundelegung einer unitarischen Anschauung schon hieraus, dass man sich die Geschwindigkeit v, wenigstens in einem und demselben Materiale constant zu denken hat, im Gegensatze zu Edlund, der diese Geschwindigkeit dem Querschnitte umgekehrt proportional annimmt[1]). Wenn man von der binären Hypothese ausgeht, und dem entsprechend den Strom als Doppelstrom betrachtet, kann dieses negative Resultat kein Kriterium abgeben.

§. 5. Nach dieser Betrachtung der Strecken mit ungeradem Index, d. h. jener Strecken, auf welchen das Gesetz:

1) Vetensk. Akadem. Handlingar. XII. Nr. 8. §. 6.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

gültig ist, und ξ ein blosser Widerstand, sollen nun auch die Strecken mit geradem Index betrachtet werden, von welchen schon vorhin bewiesen wurde, dass auf ihnen wenigstens theilweise andere Gesetze gelten müssen. Dabei soll jedoch zunächst vorausgesetzt werden, dass weder V noch v Unstetigkeiten aufweise und demnach $U_2' = U_1''$, $U_2'' = U_3'$ u. s. w. sei.

Dann werden die auf den Strecken mit geradem Index eintretenden Energie-Verluste, beziehungsweise Gewinne durch folgende Ausdrücke dargestellt werden:

$$U_2 = U_2' - U_2'' = U_1'' - U_3'$$
$$U_4 = U_4' - U_4'' = U_3'' - U_5'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{2n} = U_{2n}' - U_{2n}'' = U_{2n-1}'' - U_1.$$

Addirt man sowohl diese Gleichungen, sowie die unter (6) aufgeführten zusammen, so kommt:

$$(9) \qquad \sum_1^n U_{2\nu-1} + \sum_1^n U_{2\nu} = 0.$$

Da nun $\sum_1^n U_{2\nu-1}$ immer positiv ist, so muss $\sum_1^n U_{2\nu}$ jedenfalls negativ sein, d. h. es müssen unter den Grössen $U_{2\nu}$ jedenfalls welche vorkommen, die keinen Energieverlust, sondern einen Energiegewinn darstellen.

Theilt man den Strom in der Art, dass die Trennungsstellen der geradzahligen und ungeradzahligen Strecken mit den Maximal- und Minimalwerthen von U zusammenfallen, so müssen selbstverständlich sämmtliche Werthe $U_{2\nu}$ negativ sein.

Für eine solche Strecke stellen sich die Verhältnisse folgendermaassen:

Unter allen Bedingungen bleibt die Gleichung bestehen:

$$(10) \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} + \Xi,$$

wo Ξ die Gesammtbeschleunigung ist, welche die Masseneinheit von Kräften erleidet, die nicht bei der Bildung der Kräftefunction V berücksichtigt wurden.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit ids und bringt man alsdann $-i\frac{dV}{ds}ds$ von der rechten auf die linke Seite, so bekommt man:

$$dU_{2\nu} = i\,\Xi\,ds$$

oder:

$$U''_{2\nu} - U'_{2\nu} = i\int_{s'}^{s''} \Xi\,ds. \tag{11}$$

Da der Voraussetzung gemäss auf dem betrachteten Stücke ein Energiezuwachs eintritt, so ist diese Differenz positiv und muss demnach auch Ξ, wenigstens eine Strecke weit, positiv sein.

Mithin kann Ξ keinenfalls auf dem ganzen Stücke eine aus blossen Widerständen entspringende negative Beschleunigung, d. h. Verzögerung sein.

Da jedoch auch auf diesen Stücken solche Widerstände nicht ausgeschlossen sind, so muss im allgemeinen:

$$\Xi = \eta - \xi$$

sein, wo η die (positive) Beschleunigung ist, welche die Masseneinheit durch Kräfte erfährt, die aus der Kräftefunction V nicht ableitbar sind.

Der ganze Gewinn an Energie in einem solchen Stücke stellt sich also durch die Formel dar:

$$U''_{2\nu} - U'_{2\nu} = i\,(V''_{2\nu} - V'_{2\nu}) + i\left(\frac{v''^2_{2\nu}}{2} - \frac{v'^2_{2\nu}}{2}\right) = i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \eta_{2\nu}\,ds - i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\,d \tag{12}$$

während die auf dem Stücke zu leistende Arbeit:

$$L_{2\nu} = i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \eta_{2\nu}\,ds = U''_{2\nu} - U'_{2\nu} + i\int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\,ds \quad \text{ist.} \tag{13}$$

Wird diese Arbeit durch Aufwand von Wärme geleistet, so muss die Wärmemenge $Q_{2\nu} = AL_{2\nu}$ verschwinden,

wenn die widerstehenden Kräfte von zu leistender äusserer Arbeit herrühren. Hat jedoch die Verzögerung $\xi_{2\nu}$ ihren Grund in Kräften, die nach Art eines Reibungswiderstandes wirken, so wird durch ihre Ueberwindung wieder Wärme erzeugt und die verschwindende Wärmemenge ist alsdann nur:

$$(14) \qquad Q_{2\nu} = A L_{2\nu} - Ai \int_{s'_{2\nu}}^{s''_{2\nu}} \xi_{2\nu}\, ds = A\,(U''_{2\nu} - U'_{2\nu}).$$

Um die Bedeutung der hier eingeführten Grössen anschaulicher zu machen, sei erwähnt, dass in dem Falle, wo man durch ein Pumpwerk und eine vom oberen Ende der Pumpe zum unteren geführte Rückleitung einen Flüssigkeitsstrom herstellen würde, die Pumpe selbst als Strecke von geradem Index also etwa als s_2 zu betrachten ist und dass in diesem Falle $i\int \eta_2\, ds$ ausgedehnt durch die Höhe der Pumpe, die ganze zu deren Betrieb einschliesslich der Reibungswiderstände erforderliche Arbeit repräsentiren würde, während sich das ξ_2 auf die Reibungswiderstände in der Pumpe bezöge.

Solange keine Unstetigkeiten in den Werthen von V und v und mithin auch in den Werthen von U vorkommen, ist $U''_{2\nu} = U'_{2\nu+1}$ und $U'_{2\nu} = U''_{2\nu-1}$ und mithin auch:

$$L_{2\nu} = U'_{2\nu+1} - U''_{2\nu-1} + X_{2\nu},$$

wenn man unter $X_{2\nu}$ die Arbeit versteht, welche zur Ueberwindung der Widerstände während der Zeiteinheit auf dem Stücke 2ν zu leisten ist. Diese Gleichung bleibt richtig, wie kurz auch das Stück mit dem Index 2ν sein mag, so dass auch für den Fall, wo dieses Stück verschwindend klein wird und nur eine Discontinuität zwischen den auf $(2\nu-1)$ und $(2\nu+1)$ bezüglichen Grössen eintritt, die Gleichung Gültigkeit behält. Dabei empfiehlt es sich jedoch, in einem solchen Falle $L_{2\nu} = L_{2\nu-1,\,2\nu+1}$ zu setzen und einfach fortlaufende Indices $\mu, \mu+1$ zu wählen,

so dass schliesslich $L_{\mu,\mu+1}$ statt $L_{2\nu}$ und $X_{\mu,\mu+1}$ statt $X_{2\nu}$ zu schreiben ist und die ganze Gleichung übergeht in:

$$L_{\mu,\mu+1} = U'_{\mu+1} - U''_{\mu} + X_{\mu,\mu+1}. \tag{15}$$

Für den Fall, dass alle Arbeitsleistung auf Kosten von Wärme geschieht und auch die Widerstandsarbeiten, wenn solche bei unendlich kurzen Stücken überhaupt noch vorkommen sollten, in Wärme verwandelt werden, erhält man bei entsprechender Bezeichnung und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass eine verschwindende Wärmemenge als eine auftretende negative angesehen werden kann, als erzeugte Wärmemenge an der Uebergangsstelle:

$$Q_{\mu,\mu+1} = A\,[U''_{\mu} - U'_{\mu+1}], \tag{16}$$

ein Ausdruck, der unter den eben gemachten Voraussetzungen stets negativ sein, und demnach eine verschwindende Wärmemenge darstellen wird.

Es ist natürlich nicht undenkbar, dass auch auf den Strecken mit abnehmender Energie, wie sie oben betrachtet wurden, ausser $-\frac{dV}{ds}$ noch andere Kräfte eine in demselben Sinne wirkende Beschleunigung hervorbringen, die dann auch wieder durch η oder, wenn wir der gerade betrachteten Strecke den Index ν geben, η_ν bezeichnet werden mag. Alsdann wird die auf einer solchen Strecke zur Ueberwindung von Widerständen verbrauchte Arbeit:

$$L_\nu = U'_\nu - U''_\nu + \int_{s'_\nu}^{s''_\nu} i\,\eta_\nu\,ds = U'_\nu - U''_\nu + Y_\nu.$$

Geht diese Arbeit in Wärme über, so ist die erzeugte Wärmemenge:

$$Q = A\,L_\nu.$$

Muss jedoch die Arbeit Y selbst wieder auf Kosten der dem Körper innewohnenden Wärme geschaffen werden, so wird wiederum wie oben:

$$Q_\nu = A\,L_\nu - A\,Y_\nu = A\,(U'_\nu - U''_\nu).$$

Solange die Bedingungen der Stetigkeit erfüllt sind,

kann man auch hier wiederum $U'_\nu = U''_{\nu-1}$ und $U''_\nu = U'_{\nu+1}$ setzen, oder: $Q_\nu = A[U''_{\nu-1} - U'_{\nu+1}]$.

Schrumpft die Strecke mit dem Index ν mehr und mehr zusammen und setzt man dann μ statt $(\nu - 1)$, und $(\mu + 1)$ statt $(\nu + 1)$, und bezeichnet man analog wie oben Q_ν in diesem Falle durch $Q_{\mu,\mu+1}$ so erhält man:

$$Q_{\mu,\mu+1} = A[U''_\mu - U'_{\mu+1}]$$

also genau dieselbe Formel wie oben.

Diese Formel gibt demnach für Unstetigkeitsstellen sowohl die verschwindenden als auch die auftretenden Wärmemengen an.

In ihrer Anwendung auf den galvanischen Strom enthält sie den Ausdruck für das Peltier'sche Phänomen.

Dieser Ausdruck gewinnt jedoch dadurch ein besonderes Interesse, dass er auf einen Umstand hinweist, den man meines Wissens bisher bei diesem Vorgange nicht in Betracht gezogen hat. Er zeigt nämlich, dass unter der Annahme einer unitarischen Anschauung die Erwärmungen und Abkühlungen an den Berührungsstellen zweier verschiedener Leiter nicht nur von ihrer Spannungsdifferenz (Potentialniveau-Differenz), sondern auch von den Geschwindigkeiten abhängen, welche zu beiden Seiten der Berührungsstelle herrschen. Man sieht dies sofort, wenn man den Ausdruck (16) ausführlich schreibt, dann erhält man:

$$Q_{\mu,\mu+1} = Ai[V''_\mu - V'_{\mu+1}] + Ai\left[\frac{v''^2_\mu}{2} - \frac{v'^2_{\mu+1}}{2}\right].$$

Der Wärmeverbrauch an einer solchen Trennungsstelle wird demnach grösser sein, als die blosse Potentialniveau-Differenz erfordert, wenn zugleich eine Zunahme der Geschwindigkeit erfolgt (was ja bei geringerer Dichtigkeit δ auf dem Leiter $(\mu + 1)$, auch ohne Querschnittsänderung der Fall ist), geringer, wenn die Geschwindigkeit abnimmt.

Trotzdem wird das Gesetz, welches aus den Favre'schen

Versuchen[1]) abgeleitet wurde, und wonach die algebraische Summe aller an den Berührungsstellen verschiedener Leiter verschwindenden und auftretenden Wärmemengen gleich sein muss den in den Leitern selbst entwickelten, dadurch nicht gestört. Bildet man nämlich $\Sigma Q_{\mu,\mu+1}$ für einen in sich geschlossenen Stromeskreis, so ist:

$$\sum_1^n Q_{\mu,\mu+1} = -Ai\sum_1^n E_{\mu,\mu+1} + Ai\sum_1^n\left(\frac{v_\mu''^2}{2} - \frac{v_{\mu+1}'^2}{2}\right).$$

Erinnert man sich nun daran, dass bei geschlossenem Strome $v_{n+1}' = v_1'$, und vereinigt man dann in der letzten rechts stehenden Summe, das 2te mit dem 3ten, das 5te mit dem 6ten Gliede u. s. w. und schliesslich das letzte mit dem ersten, so erhält man für einen geschlossenen Strom:

$$\sum_1^n\left(\frac{v_\mu''^2}{2} - \frac{v_{\mu+1}'^2}{2}\right) = \sum_1^n\left(\frac{v_\mu''^2}{2} - \frac{v_\mu'^2}{2}\right),$$

und da, wie schon in §. 4 bemerkt und später in §. 6 noch bewiesen werden soll:

$$v_\mu'' - v_\mu' = 0,$$

auch:

$$\sum_1^n\left[\frac{v_\mu''^2}{2} - \frac{v_{\mu+1}'^2}{2}\right] = 0$$

und mithin:

(17) $$\Sigma Q_{\mu,\mu+1} = -Ai\Sigma E$$

oder im Zusammenhalte mit Formel (8):

(18) $$\Sigma Q_\mu + \Sigma Q_{\mu,\mu+1} = 0,$$

wie es Favre's Versuche verlangen.

Der von Edlund[2]) gezogene Schluss, dass die beim Peltier'schen Phänomen auftretenden oder verschwindenden Wärmemengen der Spannungsdifferenz der beiden Metalle proportional seien, ist demnach nur bindend, wenn entweder die Hypothese von dem Doppelstrome festgehalten wird, oder wenn bei unitarischer Anschauung die Ge-

1) Ann. de chim. et de phys. (1) XL. 1854.
2) Pogg. Ann. CXXXVII.

schwindigkeit v in der ganzen Kette allenthalben die gleiche ist, ohne Rücksicht auf das Material der einzelnen Theile.

Die Einwände, welche, abgesehen von dem eben berührten Punkte, der meines Wissens bisher unbeachtet blieb, von Wüllner[1]) gegen Edlund's Folgerungen erhoben wurden, sind mir nicht verständlich.

Dagegen geht aus den eben angestellten Betrachtungen hervor, dass unter Annahme des Doppelstromes die an Löthstellen auftretenden oder verschwindenden Wärmemengen den auf electrostatischem Wege ermittelten Spannungsdifferenzen genau proportional sein müssten. Abweichungen von dieser Proportionalität würden demnach sowohl diese Annahme als eine unhaltbare kennzeichnen als auch darthun, dass die Geschwindigkeiten v, mit denen sich die electrischen Massen (sofern sich solche für die in Wahrheit noch unbekannten Vorgänge substituiren lassen) im Strome bewegen, in den verschiedenen Leitern verschiedene seien.

§. 6. Es erübrigt uns noch die Lösung der Aufgabe, unter gegebenen Verhältnissen die Stärke des entstehenden Stromes zu bestimmen.

Man muss zu dem Ende untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichung (4) d. i.:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{ds} - \xi$$

allgemeine Lösungen gestattet.

Dies ist in zwei ziemlich umfassenden Fällen möglich, nämlich einmal wenn $dv = 0$ und $\xi = \varphi(v) \,.\, f(s)$ ist, und ferner, wenn für ξ die Bedingung $\xi = v^2 \varphi(s)$ erfüllt ist, ohne dass deshalb $dv = o$ zu sein brauchte.

Den ersten Fall hat man vor sich, wenn eine incompressibele Flüssigkeit bei constantem Querschnitt gegeben ist, oder wenn $q\delta$ constant ist, in welchem Falle man das

1) Experimentalphysik. 3. Aufl. IV p. 555—556.

strömende Medium als absolut compressibel bezeichnen könnte.

Gleichung (4) aber wird:

$$\frac{dV}{ds} = -\xi$$

und wenn man beachtet, dass man statt $\varphi(v)$ gerade so gut $\psi(i)$ schreiben kann, weil $i = vq\delta$ und $q\delta$ constant ist:

$$\frac{dV}{ds} = -\psi(i) f(s), \tag{19}$$

oder wenn man aus dem Strome das zwischen den Längen s' und s'' liegende Stück herausnimmt und integrirt:

$$V' - V'' = \psi(i) \int_{s'}^{s''} f(s)\, ds. \tag{20}$$

Hat man nun einen in sich geschlossenen Strom und nimmt man aus diesem einzelne (getrennte) Stücke heraus, für welche das oben aufgestellte Grundgesetz gültig ist, und setzt man:

$$\int_{s'}^{s''} f(s)\, ds = F(s),$$

so wird:

$$\begin{gathered} \psi(i) F(s_a) = V_a' - V_a'', \quad \psi(i) F(s_b) = V_b' - V_b'' \ldots \\ \psi(i) F(s_n) = V_n' - V_n'', \end{gathered} \tag{21}$$

oder wenn man alle rechts und alle links stehenden Glieder addirt, $\psi(i) \Sigma F(s_n) = \Sigma V_{n,n+1}$, wo $V_{n,n+1} = V_{n+1}' - V_n''$ ist, d. h. gleich dem Sprunge der Kräftefunction, der beim Uebergang vom Stücke n zum Stücke $(n+1)$ stattfindet.

Bezeichnet man die inverse Function von ψ durch Ψ, so kann man auch setzen:

$$i = \Psi \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma F(s_n)}, \tag{22}$$

ein Satz, den man als die Verallgemeinerung des Ohm'schen Gesetzes bezeichnen kann.

$\psi(i) F(s_n)$ ist die Arbeit, welche der Strom auf der Strecke s_n während der Zeiteinheit leistet.

Für $\psi(i) = i$ geht die Formel über in:

$$i = \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma F(s_n)} \cdot \tag{23}$$

Für $\psi(i) = i$ und $f(s) = \frac{1}{q_n k_n}$ d. h. für $\xi_n = \frac{v_n \delta_n}{k_n}$ und $dq_n = 0$ aber erhält man:

$$i = \frac{\Sigma V_{n,n+1}}{\Sigma \frac{s_n}{k_n q_n}},$$

wobei jedoch immer noch angenommen ist, dass die einzelnen Stromstücke *a*, *b* u. s. w. durch endliche Strecken von einander getrennt seien und nur auf keinem derselben V unstetig werde[1]).

Denkt man sich nun die Endpunkte dieser Stücke näher und näher aneinanderrückend, bis sie an den Unstetigkeitsstellen von V einander berühren, so treten an die Stelle von $V_{n,n+1}$ eben die Spannungsdifferenzen zwischen den verschiedenen Leitern oder die sogenannten electromotorischen Kräfte, d. h. man hat alsdann:

$$i = \frac{\Sigma E}{\Sigma \frac{s}{kq}}$$

oder das Ohm'sche Gesetz in seiner gewöhnlichen Form.

Hat man einen verzweigten Strom und durchläuft man einen in sich geschlossenen Kreis, so bleiben für einzelne Stücke dieses Kreises die Gleichungen (21) ebenfalls noch gültig, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann i nicht auf allen Stücken den gleichen Werth hat. Die Summation liefert deshalb in diesem Falle das Resultat:

$$\Sigma \psi(i_n) F(s_n) = \Sigma V_{n,n+1},$$

während für die von einem Verzweigungspunkte ausgehenden Ströme die Kirchhoff'sche Bedingung:

$$\Sigma i = 0$$

gelten muss.

Die Lösung einer Verzweigungsfrage reducirt sich also auch hier auf ein Eliminationsproblem.

---

1) Zu dem nämlichen Gesetze für den Widerstand, den ein Leiter dem galvanischen Strom im gewöhnlichen (mechanischen) Sinne des Wortes entgegensetzt, kommt Edlund in Vetensk. Akadem. Handlingar XII. Nr. 8. §. 10.

§. 7. Auch bei wechselndem Werthe der Geschwindigkeit gibt es doch, wie schon bemerkt, einen Fall, in dem eine Lösung der Gleichung in ähnlicher Weise wie oben möglich ist, nämlich dann, wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist: $\xi = v^2 \varphi(s)$.

Die Einsetzung dieses Ausdruckes in (4) ergibt:

$$-\frac{dV}{ds} = v^2 \varphi(s) + \tfrac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}, \tag{24}$$

oder wenn man sich daran erinnert, dass:

$$v = \frac{i}{q\delta}$$

und $q\delta$ als Function von s betrachtet werden kann und demnach auch $\frac{\varphi(s)}{q\delta}$ als solche, so dass man $\frac{\varphi(s)}{q\delta} = f(s)$ setzen darf, so erhält man für ein Stromstück, das ganz und gar dem betreffenden Gesetze unterworfen ist, die Gleichung:

$$\begin{aligned} V' - V'' &= i^2 \int_{s'}^{s''} f(s)\, ds + \frac{i^2}{2}\left[\frac{1}{q''^2\delta''^2} - \frac{1}{q'^2\delta'^2}\right] \\ &= i^2\left[\left(F(s'') + \frac{1}{2q''^2\delta''^2}\right) - \left(F(s') + \frac{1}{2q'^2\delta'^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{25}$$

oder wenn man den in Klammer stehenden Ausdruck durch W_s bezeichnet:

$$V' - V'' = i^2 W_s. \tag{26}$$

W_s ist analog wie oben die Arbeit, welche der Strom 1 auf der Strecke s leistet.

Zerfällt man den ganzen Strom wieder in verschiedene Stücke, so ergeben sich ähnlich wie oben die Gleichungen:

$$i^2 W_1 = V_1' - V_1'',\ i^2 W_2 = V_2' - V_2'', \ldots .\ i^2 W_n = V_n' - V_n''$$

oder nach Summation:

$$i^2 \sum_1^n W_\nu = V_1' - V_n'' + \sum_1^{n-1} V_{\nu,\nu+1},$$

was für einen geschlossenen Strom, wo $V_1' = V_{n+1}''$ zu setzen ist,

$$i^2 \Sigma W_n = \Sigma V_{n,n+1} \tag{27}$$

ergibt, oder:

$$(28) \qquad i = \frac{\sqrt{\Sigma V_{n,n+1}}}{\sqrt{\Sigma W_n}}.$$

Im Falle einer Stromverzweigung tritt an Stelle von Gleichung (27) für jeden in sich geschlossenen Stromeskreis die Gleichung:

$$(29) \qquad \Sigma i_n^2 W_n = \Sigma V_{n,n+1},$$

während die Gleichung:

$$\Sigma i = 0$$

für jeden Verzweigungspunkt nach wie vor bestehen bleibt.

Die zuletzt entwickelten Gleichungen schliessen die Formeln für die Bewegungen der Luft in weiten Röhren, also z. B. für die Bewegung in Kaminen oder Ventilationsanlagen in sich.

IV. *Ueber einen Tangentenmultiplicator und über die electromotorische Kraft des Grove'schen Elementes; von Eduard Riecke.*

(Aus den Göttinger Nachr. v. 7. Juli 1877 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

I.

In einer in Pogg. Ann. CXLV. veröffentlichten Arbeit habe ich den Satz bewiesen:

„Ein spiralförmig von einem galvanischen Strom umzogenes Ellipsoid übt auf einen in seinem Inneren befindlichen magnetischen Punkt eine constante, von der Lage desselben unabhängige Wirkung aus. Das Potential dieser Wirkung hat den Werth:

$$\Omega_i = ni\{(M-4\pi)mx + (P-4\pi)py + (R-4\pi)rz\},$$

wo x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes mit Bezug auf die Hauptaxen des Ellipsoides, n die Zahl der Windungen, welche auf die Längeneinheit der Axe kommen, m, p und r die Richtungscosinusse dieser Axe be-

zeichnen. Endlich sind M, P und R gewisse, von den Dimensionen des Ellipsoides abhängende Constante."

Schon in einer vorläufigen Anzeige in den Götting. Nachr. vom J. 1870 p. 109 habe ich darauf hingewiesen, dass in dem vorstehenden Satz das Princip für die Construction eines Multiplicators liegt, bei welchem die Directionskraft für beliebige Ablenkungen der Nadel constant bleibt. Durch wiederholte Bestimmungen der Empfindlichkeit von Multiplicatoren mit Nadelablesung, welche einen Uebungsgegenstand für das hiesige physikalische Praktikum bildeten, bin ich inzwischen auf die ausserordentliche Inconstanz dieser Empfindlichkeit bei den gebräuchlichen Constructionen aufmerksam geworden und es war dies die Veranlassung zu der Construction eines Multiplicators nach dem oben angegebenen Princip. Da bei dem nur in provisorischer Weise hergestellten Apparat ein Mittel zur Vermeidung der Parallaxe nicht vorhanden war, auch die über der Theilung spielenden Zeiger nicht gegen Luftzug geschützt waren, so bot die Ablesung nicht den Grad von Genauigkeit dar, wie er bei vollkommener Einrichtung leicht zu erreichen ist; trotz dieser Unvollkommenheiten ergeben die im Folgenden mitgetheilten Messungen einen solchen Grad von Uebereinstimmung der Versuche mit der Theorie, dass durch dieselben die Anwendbarkeit des Princips in vollkommen genügender Weise bewiesen sein dürfte.

Es möge zunächst die aus der Theorie sich ergebende Formel für die Empfindlichkeit des Multiplicators angegeben werden. Setzen wir an Stelle eines dreiaxigen Ellipsoides ein abgeplattetes Rotationsellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und lassen wir die Axe der dasselbe umziehenden Spirale zusammenfallen mit der z-Axe des Coordinatensystems, so werden die Richtungscosinusse m und p gleich Null, $r=1$, und das Potential der auf das Innere des Ellipsoides ausgeübten Wirkung wird somit:

$$\Omega_i = n\,(R - 4\pi)\,z.$$

Setzt man: $\lambda^2 = \frac{a^2}{b_2^2 - a^2}$,

so ergibt sich für R der Werth:

$$R = 2\pi\lambda(\lambda^2 + 1)\left\{\text{arc tg}\,\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right\}.$$

Die auf eine im Inneren des Multiplicators befindliche Magnetnadel von der Einheit des magnetischen Moments durch die Einheit der Stromintensität ausgeübte Directionskraft, d. h. die Empfindlichkeit des Multiplicators erhält den Werth: $-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = n(4\pi - R)$.

Bei der Herstellung des Multiplicators wurde in folgender Weise verfahren. In zwei Scheiben aus Buchsbaumholz wurden zwei vollkommen gleiche kreisförmige Vertiefungen eingedreht, so dass, wenn die beiden Scheiben mit diesen Vertiefungen aufeinandergelegt wurden, ein zur Aufnahme der Magnetnadel hinreichender Hohlraum entstand. Die beiden Scheiben wurden dann aufeinandergeleimt, so dass die Ränder der Vertiefungen genau auf einander passten, hierauf zusamen abgedreht, so dass ein abgeplattetes Rotationsellipsoid entstand, dessen Rotationsaxe mit der Axe des inneren cylindrischen Hohlraums, dessen Aequatorialebene mit der Berührungsfläche der beiden Holzstücke zusammenfiel. Dieses Ellipsoid wurde nach der Richtung der Rotationsaxe durchschnitten; in die beiden so entstandenen Hälften wurden in der Richtung der Rotationsaxe halbkreisförmige Kanäle eingefeilt; wurden dann die beiden Halbellipsoide wieder zusammengesetzt, so entstand ein kreisrundes Loch, durch welches der die Magnetnadel tragende Stift frei drehbar in das Innere des Ellipsoides hinabgehen konnte. An dem über dem Multiplicator befindlichen Ende dieses Stiftes war ein Bügel befestigt, welcher mit einer feinen Stahlspitze in eine konisch ausgedrehte Stahlpfanne eingesetzt war, und gleichzeitig die zur Ablesung dienenden Zeiger trug.

Der in ganze Grade getheilte Kreis, sammt der den Magnet tragenden Pfanne war mit der hölzernen Fuss-

platte des Apparates in fester Verbindung; in diese letztere konnten die an Schlitten befestigten Halbellipsoide von beiden Seiten her eingeschoben werden, so dass sich die Schnittflächen fest aneinanderlegten, und der Suspensionsstift frei durch die in der Richtung der Axe bleibende Oeffnung hindurchging. Da bei der Wickelung des Multiplicators auf die Längeneinheit der Spiralaxe durchweg gleich viel Windungen kommen mussten, so wurden in der Peripherie des Aequatorialkreises senkrecht gegen die Richtung der Spiralaxe Messingstifte eingeschlagen, welche nach der Richtung der Axe in gleichen Abständen von einander sich befanden; beim Wickeln mussten dann zwischen je zwei aufeinanderfolgende Stifte gleich viel Windungen gelegt werden.

Die grosse Axe des Holzellipsoides war gleich 120 mm, die kleine Axe gleich 30 mm; daraus ergibt sich für die Empfindlichkeit der Ausdruck:

$$-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = 3{,}4073 \,.\, n \,.\, \pi.$$

Es wurden im ganzen 5 verschiedene Windungslagen aufgewunden und ihre Empfindlichkeit gemessen. Bei der zuerst gewickelten Lage kamen auf 1 mm der Axe 1,8505 Windungen; es war also für dieselbe:

$$-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = 19{,}80.$$

Da der zu dieser ersten Lage gebrauchte Draht zu dick war und die einzelnen Windungen sich zum Theil überdeckten, so konnte ohne zu grosse Unregelmässigkeit keine zweite Windungslage aufgewickelt werden; es wurde daher die ganze Lage wieder abgenommen und von einem erheblich dünneren Drahte zwei Lagen von gleicher Windungszahl wie zuvor übereinander aufgewunden; der theoretische Werth der Empfindlichkeit war demnach ebenfalls:

$$-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = 19{,}80.$$

Ueber diese beiden Lagen dünnen Drahtes wurden sodann noch zwei Lagen dickeren Drahtes gewickelt, für

welche $n = 0{,}4626$ und daher der theoretische Werth der Empfindlichkeit:

$$-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = 4{,}95 \quad \text{war.}$$

II.

Die Empfindlichkeit der zuerst aufgewundenen und später wieder entfernten Drahtlage wurde in doppelter Weise gemessen. Bei der ersten Bestimmung wurde der Strom von 4 Grove'schen Elementen zwischen einer Tangentenbussole und dem Multiplicator verzweigt, und die Widerstände so abgeglichen, dass die Ablenkungen beider nahezu gleich waren. Die bei verschiedenen in den unverzweigten Theil des Schliessungskreises eingeschalteten Widerständen beobachteten gleichzeitigen Ablenkungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Ablenkungen der Tangentenbussole.						
54,5	54,7	44,1	34,3	23,2	14,0	6,8°.
Ablenkungen des Multiplicators.						
55,0	55,3	44,5	34,8	23,6	14,0	7,0°.
Empfindlichkeit.						
18,10	18,17	18,08	18,23	18,30	17,98	18,53

Mittel: 18,20.

Aus der bekannten Empfindlichkeit der Tangentenbussole, sowie aus dem Verhältniss der Widerstände der beiden Zweige ergaben sich die in der dritten Reihe enthaltenen Werthe der Empfindlichkeit des Multiplicators. Die unter den einzelnen Werthen hervortretenden Abweichungen werden den Betrag der Beobachtungsfehler nicht übersteigen; die grosse Abweichung von dem theoretischen Werth der Empfindlichkeit, 19,80, dürfte ihren Grund zum Theil in Unregelmässigkeiten der Windung, zum Theil in dem Fehler haben, welcher bei dem geringen in den Zweig der Tangentenbussole eingeschalteten Widerstand in dem Verhältniss der Widerstände beider Zweige wohl eintreten konnte.

Bei der zweiten Bestimmungsweise der Empfindlich-

keit, welche bei den folgenden Messungen stets zur Anwendung kam, wurde aus der bekannten electromotorischen Kraft der vier zur Stromerzeugung dienenden Grove'schen Elemente und dem bekannten Widerstande des Schliessungskreises die Stromstärke berechnet; diese gab dann in Verbindung mit der beobachteten Ablenkung die Empfindlichkeit des Multiplicators.

Die electromotorische Kraft der 4 Grove'schen Elemente wurde zum Zweck der vorliegenden Messungen wiederholt bestimmt; die Resultate dieser Bestimmungen sollen am Schlusse dieses Aufsatzes mitgetheilt werden.

Die Werthe der Empfindlichkeit, wie sie nach der zweiten Methode erhalten wurden, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt mit den Widerständen des Schliessungskreises und den Ablenkungen des Multiplicators:

Widerstand:	505,8	705,8	1,0058	1405,8	2005,8	4005,8.
Ablenkung:	56,15	46,95	36,90	28,20	20,65	10,50°.
Empfindlk.:	18,64	18,68	18,68	18,64	18,67	18,36

Mittel: 18,61.

Es zeigen diese Werthe eine weit grössere Uebereinstimmung als die nach der ersten Methode erhaltenen (zwischen 20° und 60° bis auf $\frac{1}{166}$ des mit Ausschluss der letzten Beobachtung berechneten Mittelwerthes). Der Grund liegt ohne Zweifel darin, dass die Fehler, soweit sie die relativen Werthe der Empfindlichkeit beeinflussen, hier allein von den Ablesungsfehlern am Multiplicator herrühren, während bei der vorhergehenden Bestimmung die Ablesungsfehler an Tangentenbussole und Multiplicator sich bei jeder einzelnen Messung combiniren. Der absolute Unterschied, welcher zwischen den nach beiden Methoden erhaltenen Mittelwerthen vorhanden ist, bestätigt die Annahme, dass das Verhältniss der Widerstände der beiden Zweige bei der ersten Messung einen Fehler enthält.

Von den 4 Windungslagen, welche nach Abnahme der

im Vorhergehenden besprochenen aufgewickelt wurden, besass die erste einen Widerstand von 14,16, die zweite einen Widerstand von 13,85 Einheiten; der Widerstand der beiden oberen Windungen dicken Drahtes zusammen betrug 0,1 S.-E. In den folgenden Tabellen sind die für diese 4 Windungslagen erhaltenen Resultate zusammengestellt:

I. Lage.

Widerstand:	515,7	715,7	1015,7	1415,7	2015,7	4015,7.
Ablenkung:	59,10	50,46	40,61	31,49	23,31	12,27°.
Empfindlk.:	20,09	20,19	20,28	20,21	20,23	20,26
					Mittel =	20,21.

II. Lage.

Widerstand:	515,3	715,3	1015,3	1415,3	2015,3	4015,3.
Ablenkung:	58,07	49,13	39,31	30,55	22,43	11,76°.
Empfindlk.:	19,26	19,25	19,36	19,46	19,37	19,46
					Mittel =	19,36.

Die grösste Abweichung der für die Empfindlichkeit sich ergebenden Werthe vom Mittelwerth beträgt bei beiden Windungslagen 0,6%. Der Ablesungsfehler dürfte bei der nur provisorisch ausgeführten Theilung auf 0,2° anzuschlagen sein. Bezeichnen wir durch C die Empfindlichkeit, durch ΔC den infolge der Ungenauigkeit der Ablesung entstehenden Fehler, so ist:

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm \frac{2 d\varphi}{\sin 2\varphi},$$

also für den kleinsten und den grössten Ablenkungswinkel von 12°, resp. 59°:

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm 0{,}017, \quad \text{resp. } = \pm 0{,}008.$$

Es ergibt sich hieraus, dass die Abweichungen der Empfindlichkeit von dem Mittelwerth innerhalb der Beobachtungsfehler liegen. Die Abweichungen der aus den Beobachtungen sich ergebenden Mittelwerthe der Empfind-

lichkeit von dem theoretischen Werthe 19,80 betragen bei der ersten Lage 2,1 %, bei der zweiten Lage 2,2 % des letzteren Werthes.

III. Lage.

Widerstand:	126,6	201,6	301,6	501,6	1001,6.	
Ablenkung:	60,22	47,96	36,55	24,39	12,70°.	
Empfindlk.:	5,15	5.21	5,21	5,30	5,26	= 5,23.

IV. Lage.

Widerstand:	126,6	201,6	301,6	501,6	1001,6.	
Ablenkung:	59,43	46,65	35,33	23,01	12,23°.	
Empfindlk.:	5,00	4,97	4,98	4,96	5,06	= 4,99.

Die Abweichungen vom Mittelwerth betragen bei der dritten Lage 1,5 %, bei der vierten Lage 1,4 % desselben. Die Abweichungen von dem theoretischen Werth 4.95, bei der dritten Lage 5,6 %, bei der vierten 0,8 % des letzteren. Die grösseren Abweichungen, welche bei diesen beiden Lagen eintreten, haben ihren Grund ohne Zweifel darin, dass die Windungen derselben die Fläche des Multiplicators nicht vollständig überdeckten, sondern von einander durch grössere Lücken getrennt waren.

Es wurden daher die beiden Windungslagen dicken Drahtes verbunden, so dass der Strom beide nach einander durchfloss und dabei folgende Werthe der Empfindlichkeit erhalten, welche in der That eine weit bessere Uebereinstimmung zeigen.

III. und IV. Lage verbunden.

Widerstand:	251,7	401,7	601,7	1001,7	2001,7.
Ablenkung:	60,17	47,65	36,20	23,50	12,50°.
		Empfindlichkeit.			
Beobachtet:	10,22	10,27	10,26	10,15	10,32 = 10,24.
Berechnet:	10,15	10,18	10,19	10,26	10,32 = 10,22.

Die berechneten Werthe der Empfindlichkeit sind durch Addition der entsprechenden für die dritte und vierte Windungslage gesondert bestimmten Werthe erhal-

ten. Nehmen wir das Mittel aus den beobachteten und berechneten Werthen, indem wir den ersteren das doppelte Gewicht beilegen, so ergeben sich die folgenden Werthe:

$$10{,}20 \quad 10{,}24 \quad 10{,}24 \quad 10{,}19 \quad 10{,}32 = 10{,}24.$$

Die grösste Abweichung vom Mittelwerth beträgt 0,8 %; die Abweichung von dem theoretischen Werth 9,90 beträgt 3 % dieses Werthes.

Mit den verbundenen Windungen der dritten und vierten Lage wurde schliesslich noch der Versuch gemacht, ob die Constanz der Empfindlichkeit auch bei Benutzung eines astatischen Nadelpaares sich erhielte, ob also das zu Grunde liegende Princip sich auch zur Construction von Thermomultiplicatoren verwenden liesse. Wenn die erlangten Resultate auch nicht vollkommen befriedigend waren, ohne Zweifel infolge störender Einflüsse der an dem Apparat befindlichen Messingtheile, so dürften sie doch genügen, um die Anwendbarkeit des Princips zur Construction von Thermomultiplicatoren nachzuweisen.

Das astatische Paar war an einem Coconfaden an der Decke des Zimmers aufgehängt, der Abstand der beiden Magnete, von welchen der untere im Inneren des Multiplicators sich befand, betrug 200 mm, so dass die Wirkung, welche der obere Magnet von dem Multiplicator erlitt, gegen die auf den inneren Magnet ausgeübte sehr klein und jedenfalls dem Cosinus des Ablenkungswinkels proportional war. Die Bedingung für das Gleichgewicht des astatischen Paars bei irgendeiner durch einen Strom i hervorgerufenen Ablenkung ist demnach folgende:

$$m_i C \,.\, i \,.\, \cos\varphi = (m_i - m_a)\left(1 + \Theta \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right) T \sin\varphi.$$

Hier sind m_i und m_a die magnetischen Momente des inneren und äusseren Magnets, C die Empfindlichkeit des Multiplicators, Θ der Torsionscoëfficient und T die Horizontalintensität; die Gleichung gibt:

$$\frac{m_i}{m_i - m} \,.\, C \,.\left(1 - \Theta \,.\, \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right).\, i = T \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Als Empfindlichkeit des Multiplicators möge bezeichnet werden der Ausdruck:

$$D = \frac{m_i}{m_i - m_a} \cdot C\left(1 - \Theta \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}\right).$$

Wie man sieht, ist wegen der Torsion die Empfindlichkeit des Multiplicators von dem Ablenkungswinkel abhängig; da indessen die Torsion des benutzten Coconfadens sehr klein war, so wurde bei den im Folgenden mitgetheilten Messungen keine Rücksicht auf dieselbe genommen.

Bei der zuerst getroffenen Einrichtung waren die magnetischen Momente der beiden Stäbe:

$$m_i = 2448000 \qquad m_a = 2358000.$$

Die Empfindlichkeiten des Multiplicators sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt mit den eingeschalteten Widerständen, den Ablenkungen und den aus den Ablenkungen berechneten Ruhelagen des astatischen Systems.

Widerstand:	501	751	1001	1501	2501	5001.
Ablenkung:	55,7	44,4	36,1	26,4	16,5	8,6°.
Ruhelage:	3,4	3,0	2,3	1,6	1,3	1,5°.
Empfindlichk.:	117,4	115,9	115,0	117,1	116,2	118,5.

Es wurde nun der Magnetismus des oberen Stabes verstärkt, wodurch gleichzeitig der Werth des Torsionscoëfficienten auf 0.01 erhöht wurde. Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Widerstand:	2001	3001	4001	6001	9001	18001.
Ablenkung:	62,15	50,85	42,25	30,55	21,10	10,90°.
Ruhelage:	0,6	359,7	358,1	356,1	355,1	354,7°.
Empfindlichk.:	176,4	171,6	169,3	165,0	161,8	161,5.

Durch die in beiden Beobachtungsreihen hervortretende Aenderung der Ruhelage, wie der Grösse der Ablenkung wird die Existenz eines localen Einflusses sehr wahrscheinlich gemacht, und durch diesen Localeinfluss

finden auch die Aenderungen der Empfindlichkeit, wie sie namentlich bei dem stärker astatischen System sich zeigen, eine genügende Erklärung.

III.

Zur Vergleichung mögen im Folgenden die Empfindlichkeiten einiger anderen Multiplicatoren mit Zeigerablesung mitgetheilt werden.

Differentialmultiplicator v. Hipp.

Ablenkungswinkel:	10	20	30	40	50	60°.
Empfindlichkeit:	19,73	26,40	25,72	21,90	16,70	13,40.

Hipp'sches Galvanoskop.

Ablenkungswinkel:	10	20	30	40	50	60	70°.
Empfindlichk.:	8,14	12,16	12,66	10,41	7,91	6,32	5,00.

Melloni'scher Multiplicator.

Sehen wir ab von der Torsion des Aufhängungsfadens, so wird die Bedingung für das Gleichgewicht des astatischen Paares bei der Ablenkung φ in folgender Weise sich darstellen:

$$i \,.\, C\,(m + m')\cos\varphi = (m - m')\; T \sin\varphi,$$

woraus:

$$i \,.\, C \,.\, \frac{m + m'}{m - m'} = T \,\mathrm{tg}.\,\varphi.$$

Als Empfindlichkeit des Multiplicators bezeichnen wir den Ausdruck:

$$D = C \,.\, \frac{m + m'}{m - m'},$$

in welchem C die Empfindlichkeit der beiden Multiplicatoren für die einzelnen Nadeln des Systems, m und m' die magnetischen Momente der letzteren bezeichnen. Es ergaben sich theils durch Vergleichung mit einer Tangentenbussole, theils durch directe Bestimmung mit Hülfe der bekannten electromotorischen Kraft eines Grove'schen Elementes die folgenden Werthe der Empfindlichkeit D:

Ausschlag:	10	20	30	40	50	60	70	80°.
Empfindlk.:	2965	2982	2936	2811	2634	2463	2160	1822.

Nervander's Tangentenbussole.

Durch eine ziemliche Constanz der Empfindlichkeit zeichnet sich der von Nervander construirte Multiplicator aus, und zwar ist der Grund hierfür der, dass Nervander, wie es scheint, durch Probiren zu einer Form gelangt ist, welche sich der von mir auf theoretischem Wege gefundenen nahe anschliesst. Nervander wand nämlich den Draht um einen flachen Kreiscylinder, so dass die Windungsebenen der Axe dieses Cylinders parallel waren. In der That ergibt sich so eine Annäherung an die Form des abgeplatteten Rotationsellipsoides, in welcher die wahre Ursache für die Constanz der Empfindlichkeit zu suchen ist. Ein directes Urtheil über diese letztere lässt sich aus den Messungen von Nervander nicht gewinnen; die von ihm ausgeführte Prüfung bestand darin, dass er zwei ganz gleiche Windungslagen neben einander auf die Trommel aufwickelte und die Ablenkungen bestimmte, welche ein und derselbe Strom hervorbrachte, je nachdem er nur eine oder beide Lagen hintereinander durchfloss. Um aus den mitgetheilten Messungen ein Urtheil über die Constanz zu gewinnen, möge angenommen werden, dass für die geringeren Ablenkungen, wie sie bei Anwendung nur einer Windungslage beobachtet wurden, wirklich eine constante Empfindlichkeit vorhanden sei; man kann dann die Empfindlichkeit, welche beiden hintereinander eingeschalteten Windungslagen zukommt, als Vielfaches der Empfindlichkeit jener einen Windungslage berechnen; es ergeben sich so die folgenden Werthe der Empfindlichkeit beider Lagen, wenn die der einen Lage durch C bezeichnet wird:

Ablenkung:	8° 57′	17° 17′	28° 30′	36° 50′	42° 30′.
Empfindlichkeit:	2,001	1,966	1,980	1,918	1,879 . C.

Tangentenbussole mit 24 Windungen.

Es ist dies die Tangentenbussole, auf welche sich das in Kohlrausch's Leitfaden p. 152 angeführte Beispiel bezieht:

Ablenkung:	10	20	30	40	50	60°.
Empfindlichkeit:	1,1655	1,1635	1,1604	1,1565	1,1525	1,1496.

Die Abweichung zwischen den extremen Werthen beträgt 1,4 %.

IV.

Zum Zwecke der im Vorhergehenden mitgetheilten Empfindlichkeitsbestimmungen musste eine Reihe von Messungen der electromotorischen Kraft der zur Stromerregung benutzten vier Grove'schen Elemente ausgeführt werden; hierbei wurde stets die Ohm'sche Methode in Anwendung gebracht. Für die Bestimmung der Empfindlichkeit genügte es, die electromotorische Kraft als Vielfaches der Horizontalintensität zu ermitteln. Da aber diese relativen Bestimmungen mit aller Sorgfalt ausgeführt waren, so habe ich es nicht für überflüssig gehalten, durch Hinzufügung einer Bestimmung der horizontalen Intensität für den Ort der Beobachtungen auch den absoluten Werth der electromotorischen Kraft Grove in den Einheiten von Siemens und Weber zu bestimmen.

Die Horizontalintensität wurde gemessen mit einem transportabeln Magnetometer von Meyerstein. Das Trägheitsmoment des Hauptmagnets war bei einer Temperatur von 17° gleich 160930000. Für die Schwingungsdauer desselben ergaben sich zu Anfang und zum Schluss der Beobachtungen die Werthe 9,6957 Sec. und 9,6976 Sec. Die Ablenkungsbeobachtungen ergaben für eine Entfernung von 450,19 mm einen Ablenkungswinkel 6° 5′ 10″, für eine Entfernung von 600,26 mm einen Ablenkungswinkel von 2° 34′ 48″. Aus diesen Beobachtungen berechnet sich für die Horizontalintensität der Werth:

$$T = 1{,}8304.$$

Um zu untersuchen, ob dieser Werth nicht durch locale Einflüsse des Messingstatives modificirt ist, wurden die Ablenkungen eines compensirten Magnetometers bestimmt, dessen Nadel an diejenigen Stellen gebracht wurde, welche bei den Schwingungsbeobachtungen von dem Nord- und Südpol des Hauptmagnets eingenommen gewesen waren. Es ergab sich für die Stelle des Südpols eine Ablenkung von 50,08°, für die Stelle des Nordpols eine solche von 49,88°. Wurde das Stativ entfernt und die Nadel in die Mitte zwischen den beiden vorigen Stellungen gebracht, so war die Ablenkung 49,95°. Er ergibt sich hiermit, dass der Localeinfluss des Messingstatives weniger als 0,2 % betrug.

Die ersten Bestimmungen der electromotorischen Kraft bezogen sich auf vier Elemente, die schon mehrmals gebraucht waren. Die Schwefelsäure derselben besass bei einer Temperatur von 10° ein spec. Gewicht von 1,129, die Salpetersäure ein spec. Gewicht von 1,262. Es ergab sich für die electromotorische Kraft eines solchen Elementes 19,24 Siemens Weber.

Bei den folgenden Bestimmungen wurden die Elemente mit ganz frischer Säure gefüllt, das specifische Gewicht der Schwefelsäure betrug bei einer Temperatur von 10° 1.084, das der Salpetersäure 1,392.

Die beiden ersten Bestimmungen, welche unmittelbar nach der Füllung und Zusammensetzung der Elemente angestellt wurden, ergaben 1 Grove = 20,67 und 20,88 Siem. Web., im Mittel 20,77 Siem. Web.

Zwei weitere Bestimmungen wurden gemacht, nachdem die Elemente während mehrerer Stunden in Thätigkeit gewesen waren; es ergaben sich die Werthe:

1 Grove = 19,86 und 19,78 Siem. Web. Im Mittel = 19,82 Siem. Web.

Die Temperatur der Elemente betrug 15° C.

Eine zweite, am folgenden Tage ausgeführte Beobachtungsreihe ergab die Werthe:

1 Grove = 19,33 19,46 19,21 19,19. Im Mittel
= 19,30 Siem. Web.

Die Temperatur der Elemente betrug 11,3° C. Die zur Anwendung gebrachten Stromstärken schwankten zwischen 2,56 und 0,86 Weber. Die Abweichungen zwischen den Werthen, welche bei verschiedenen Beobachtungsreihen erhalten wurden, können, wie ich glaube, ihre Erklärung nicht durch Beobachtungsfehler finden, da die Beobachtungen alle mit derselben Sorgfalt und unter denselben Verhältnissen ausgeführt wurden, und die zu einer und derselben Beobachtungsreihe gehörenden Resultate eine befriedigende Uebereinstimmung zeigen. Es ergibt sich somit aus den Messungen das Resultat, dass die Grösse der electromotorischen Kraft der angewandten Grove'schen Becher zeitlichen Aenderungen unterworfen war. Crova fand bei seinen Versuchen eine gesetzmässige Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von der Stromstärke, so zwar, dass die electromotorische Kraft wächst mit abnehmender Stromstärke; da bei der im Vorhergehenden angewandten Methode immer zwei Beobachtungen mit verschiedener Stromstärke combinirt wurden, so konnte ein solcher Einfluss der Stromstärke aus denselben nicht nachgewiesen werden. Crova findet nach seiner graphischen Methode:

1 Grove = 20,09 Siem. Web.

Die bei seinen Bestimmungen zur Anwendung gebrachten Stromstärken waren stets grösser als 0,2679 Weber. Für eine gegen Null convergirende Stromstärke erhielt er den Werth:

1 Grove = 20,90 Siem. Web.,

welcher mit dem durch die Compensationsmethode gefundenen identisch sein müsste.

Kohlrausch findet nach der Compensationsmethode:

1 Grove = 19,98 Siem. Web.,

nach der Ohm'schen Methode unter Anwendung von Strömen, deren Stärke zwischen 1,7 und 0,9 Weber lag:

1 Grove = 19,09 Siem. Web.

Mit Ausschluss der zuerst angeführten Beobachtung würde sich aus den von mir mitgetheilten Messungen im Mittel ergeben:

1 Grove = 19,80 Siem. Web.

Aus der Vergleichung sämmtlicher Beobachtungen dürfte sich der Schluss ergeben, dass die electromotorische Kraft des Grove'schen Elementes keine constante Grösse ist, sobald dasselbe von einem Strom durchflossen wird, sowie dass die durch die Wirkung des Stromes verursachten Aenderungen sich der Vorherbestimmung vorerst noch entziehen. Will man also die electromotorische Kraft des Grove'schen Elementes unabhängig von der Stromstärke definiren, so muss man sie definiren als die zwischen den Polen des Elementes bestehende Potentialdifferenz, wenn das Element nicht von einem Strome durchflossen wird. Es ist von Interesse, dass sich bei dieser Definition zwei verschiedene Methoden zur Messung der electromotorischen Kraft darbieten, einmal die Messung auf electrostatischem Wege, und dann auf galvanischem Wege mit Hülfe der Poggendorff'schen Compensationsmethode. Die Verbindung beider Methoden ist aber von besonderer Wichtigkeit deshalb, weil sie zu einer Bestimmung der Weber'schen Constanten c führt. In der That ist es ein hiermit verwandtes Princip, auf dem die von Thomson und Maxwell ausgeführten Bestimmungen von c beruhen. Um einen Anhaltspunkt für die Ausführbarkeit der electrostatischen Messung zu bekommen, habe ich im Folgenden die zwischen den Polen des Grove'schen Elementes bestehende Potentialdifferenz auf Grund des von Weber gegebenen Werthes von c berechnet.

Der Werth der electromotorischen Kraft in absolutem Maasse ist:

$$e = 9717 \cdot 10^6 \cdot e_{sw},$$

wenn der Werth in den Einheiten von Siemens und Weber durch e_{sw} bezeichnet wird. Wenn wir hier an

Stelle des magnetischen Maasses der Stromstärke das electrodynamische Maass einführen, so ergibt sich als Werth der electromotorischen Kraft in diesem electrodynamischen Maasse:

$$e_d = \frac{9717 \cdot 10^6}{\sqrt{2}} \cdot e_{sw}.$$

Hieraus ergibt sich endlich der Werth der electromotorischen Kraft in dem allgemeinen Maasse der Mechanik:

$$k = \frac{2\sqrt{2} \cdot 9717 \cdot 10^6}{c} e_{sw}.$$

Wenn wir andererseits einen Leiter betrachten, an dessen Enden die Spannung die Werthe V_a und V_b besitzt, so ist die Summe aller auf denselben ausgeübten electromorischen Kräfte nach jenem allgemeinen Maasse gleich:

$$2(V_a - V_b).$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke ergibt sich somit:

$$V_a - V_b = \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot 9717 \cdot 10^6 \cdot e_{sw}.$$

Dieselbe Beziehung lässt sich auch in folgender Weise ableiten. Wenn die in absolutem Maasse gemessene electromotorische Kraft e in einem Leiter den Strom i nach magnetischem Maass erzeugt, so ist die dabei geleistete Arbeit gleich $e.i.$ Ist andererseits $(V_a - V_b)$ die Potentialdifferenz für die Endpunkte des Leiters, s die Stromstärke nach Weber's absolutem mechanischem Maass, so ist dieselbe Arbeit gegeben durch $2(V_a - V_b).s.$ Somit ergibt sich:

$$V_a - V_b = \frac{1}{2} \frac{i}{s} \cdot e$$

oder da:

$$\frac{i}{s} = \frac{2\sqrt{2}}{c},$$

$$V_a - V_b = \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot e.$$

Substituiren wir für das Grove'sche Element den

Werth $e_{aw} = 20$, für c den von Weber gegebenen Werth, so ergibt sich:

$$V_a - V_b = \frac{9717 \cdot 10^6 \cdot 20}{310756 \cdot 10^6} = 0{,}625.$$

Zur Vergleichung möge angeführt werden, dass sich bei einem Zerstreuungscoëfficienten der Luft von 0,044 für das Potential der inneren Belegung einer kleinen Leydener Flasche der Werth 1330 ergab.

Würden die beiden Pole eines Grove'schen Elementes mit zwei Metallkugeln von 10 mm Halbmesser verbunden, so würden die auf diesen angesammelten Electricitätsmengen gleich 3,12 nach electrostatischem Maasse sein; würde man statt 1 Element deren 50 nehmen, so würde jene Electricitätsmenge auf 156 electrostatische Einheiten anwachsen. Unter diesen Umständen möge die eine Kugel an den Arm einer Drehwage von der Länge von 150 mm befestigt sein, während die andere als feste Standkugel diene. Wenn die Kugeln nicht geladen sind, so mögen die nach denselben hingehenden Radien einen Winkel von 30^0 mit einander einschliessen. Nach Herstellung der Verbindung mit den Polen der Grove'schen Batterie möge dieser Winkel noch 29^0 betragen. Wir haben dann für das Gleichgewicht des Wagebalkens die Bedingung:

$$\frac{156 \cdot 156}{4 \cdot 150 \cdot \sin 14{,}5^0} \cos 14{,}5^0 = \frac{\pi}{180} \cdot D,$$

wo D die Directionskraft der Torsion bezeichnet. Es ergibt sich: $D = 35875.$

Nach Beer ist die Directionskraft eines Silberdrahtes vom Halbmesser r und der Länge l gleich:

$$\pi \cdot 9810 \cdot 1410 \cdot 10^6 \cdot \frac{r^4}{l}.$$

Nehmen wir also den Halbmesser $r = 0.1$ mm, so ergibt sich für l der Werth:

$$l = 1203 \text{ mm},$$

wenn die Directionskraft gleich dem oben berechneten Werthe sein soll.

V. *Ueber den Einfluss der Dichtigkeit eines Körpers auf die Menge des von ihm absorbirten Lichtes; von P. Glan.*

Der Einfluss der Dichtigkeit eines Körpers auf die Menge des von ihm absorbirten Lichtes ist mehrfach untersucht worden. Beer[1]) bestimmte die Absorptionscoëfficienten für das von rothem Glase hindurchgelassene Licht für Lösungen von verschiedenem Salzgehalt; er fand sie für dieselbe Menge der absorbirenden Flüssigkeit aus Beobachtungen an dünneren oder concentrirteren Lösungen berechnet nicht merklich verschieden. Seine concentrirtesten Lösungen sind indess bis auf eine Ausnahme schon sehr stark verdünnt und so könnten seine Beobachtungen nur zeigen, dass Zusatz von Wasser zu stark verdünnten Lösungen die Absorption nicht merklich ändert.

Bunsen und Roscoe[2]) haben dann dieselbe Frage für die auf Chlorknallgas chemisch wirkenden Strahlen untersucht, und zwar für Lösungen von rother Tinte in Wasser. Sie untersuchten, wie sich aus den Zahlen ergibt, die sie für die Länge der bei den verschiedenen Versuchen benutzten Röhren und für die Dichtigkeiten angaben, die Absorption gleicher Mengen rother Tinte mit verschiedenen Mengen Wasser gemischt. Drei Röhren von der Länge h, in denen die Dichtigkeit der absorbirenden Substanz e war, ergaben für das Verhältniss b des durchgegangenen zum auffallenden Lichte folgende Zahlen:

$h =$	11,8 mm	27,4 mm	83,8 mm
$e =$	1,000	0,4306	0,1408
$b =$	0,578	0,582	0,592

Danach scheinen die dünneren Lösungen etwas weniger zu absorbiren. Die Unterschiede sind indess so klein, dass

1) Pogg. Ann. LXXXVI. p. 78. 1852.
2) Pogg. Ann. CI. p. 248. 1857.

sie von verschiedenem Staubgehalte der Lösungen herrühren können.

Zöllner[1]) hat dann eine alle Farben gleichmässig schwächende Mischung der schwefelsauren Salze des Nickels, Kobalts und Kupfers untersucht und für die von der gleichen Stoffmenge absorbirte Menge weissen Lichtes denselben Werth aus dünneren und dichteren Lösungen gefunden.

Ich selbst[2]) habe ausser den wässerigen Lösungen von Kochsalz, doppeltchromsaurem Kali und schwefelsaurem Kupferoxyd die Lösungen von Jod in Alkohol und Schwefelkohlenstoff untersucht. Ich bestimmte den Schwächungscoëfficienten für eine 1 cm dicke Schicht der absorbirenden Flüssigkeiten aus verschieden verdünnten Lösungen für das durch rothes Glas gegangene Lampenlicht, berechnete dann aus den dichteren Lösungen den für die verdünnteren und verglich die so erhaltenen Werthe mit den beobachteten. Die beobachteten waren stets etwas grösser als die berechneten, und ich glaubte daraus schliessen zu dürfen, dass gleiche Mengen absorbirender Flüssigkeiten im Zustande grösserer Dichtigkeit mehr absorbiren.

Zöllner[3]) hat indess gegen die Versuche, die mit Licht angestellt sind, das durch farbige Gläser gegangen ist, hervorgehoben, dass solche Gläser, strenge genommen, stets alle Strahlen nur mit verschiedener Intensität hindurchlassen, so dass für eine hinreichend geringe Lichtmenge oder genügende Dicke des Glases die am stärksten abgeschwächten Strahlen für das Auge weniger wahrnehmbar seien. Bezeichnet dann J_λ die in einem gegebenen Spectrum der Wellenlänge λ zugehörige Intensität, A_λ den Absorptionscoëfficienten eines gefärbten Mediums für dieselbe Wellenlänge und die Einheit der Dichte, so ist bei einer Dichte σ des absorbirenden Mediums unter Voraus-

1) Pogg. Ann. CIX. p. 255.
2) Pogg. Ann. CXLI. p. 68.
3) Pogg. Ann. CXLII. p. 92.

setzung des Absorptionsgesetzes die Menge des hindurchgelassenen Lichtes:

$$\int d\lambda J_\lambda (1 - A_\lambda)^\sigma,$$

wo J_λ und A_λ Functionen von λ sind und das Integral über alle dem Spectrum entsprechenden Werthe von λ auszudehnen ist. Für einen bestimmten Werth von σ liesse sich nun zwar stets der Werth eines mittleren Absorptionscoëfficienten B finden, welcher der folgenden Gleichung Genüge leistet:

$$\int d\lambda J_\lambda (1 - A_\lambda)^\sigma = (1 - B)^\sigma \int d\lambda J_\lambda.$$

Der in dieser Weise berechnete Werth von B kann indess nicht constant sein für andere Werthe von σ und somit würde aus dem Unterschiede der aus dichteren für dünnere Lösungen berechneten und der an letzteren direct beobachteten Absorptionscoëfficienten noch nicht zu schliessen sein, dass eine Vermehrung der vom Licht durchlaufenen Menge des absorbirenden Stoffes durch veränderte Dichtigkeit anders wirke als eine entsprechende Vergrösserung der Dicke der durchlaufenen Schicht.

Von diesem Einwande frei sind die Beobachtungen von Vierordt[1]), der homogenes Licht benutzt hat. Er bestimmte das Verhältniss aus dem Absorptionscoëfficienten und der Dichtigkeit nach dem Vorgange von Bunsen und Roscoe aus verschieden concentrirten Lösungen, besonders für Chromalaun. Er fand bei der Dichte d für Strahlen, die zwischen D und E liegen:

d	Absorptionsverhältniss.	d	Absorptionsverhältniss.
32	0,05515	8	0,05364
16	0,05588	4	0,05354

und für Strahlen zwischen F und G:

d	Absorptionsverhältniss.	d	Absorptionsverhältniss.
32	0,07547	8	0,07099
16	0,07722	4	0,07583

1) Die Anwendung des Spectralapparates zur Messung und Vergleichung des farbigen Lichtes. Tübingen 1873.

Danach wirkte bei diesem Salze eine Veränderung der Dichtigkeit auf die Menge des absorbirten Lichtes nicht anders als eine entsprechende Veränderung der Dicke. In einer späteren Arbeit[1]) hat er dasselbe Verhältniss für alle Farben des Spectrums für Syrup bestimmt und zwar zum Theil mehrfach aus verschieden verdünnten Lösungen. Die Werthe aus Lösungen, die auf ein Viertel verdünnt waren, unterscheiden sich wie die vorher angegebenen Zahlen nur um einige Tausendtel von den aus verdünnteren Lösungen berechneten. Die aus einer Lösung von der Concentration ein Halb bestimmten Werthe und die aus einer Lösung von der Concentration ein Viertel, Lösungen, deren Zähigkeiten sich viel mehr unterscheiden als zweier in demselben Concentrationsverhältniss stehender dünnerer Lösungen sind dagegen merklich verschieden. So ergab sich für Strahlen, die zwischen *C* und *D* liegen:

Concentration.	Absorptionsverhältniss.
$^1/_2$	0,490
$^1/_4$	0,452

In Pogg. Ann. CLV. p. 97 befindet sich ferner eine kurze Angabe von Wernicke, nach der die Extinctionscoëfficienten des Fuchsins in Lösungen nicht denen des festen Fuchsins gleich sind. Die grössten Extinctionscoëfficienten der grünen Strahlen sind beim festen Fuchsin etwas kleiner, die anderen etwas grösser als bei den Lösungen, so dass die ganze Absorptionsbande bei der festen Substanz geringere Unterschiede der Extinctionscoëfficienten darbietet.

Endlich bin ich nach Beendigung meiner Beobachtungen durch eine freundliche Mittheilung des Hrn. Dr. Sklarek auf eine Arbeit von Lippich[2]) aufmerksam gemacht worden, nach der das Spectrum einer concentrirten Lösung von salpetersaurem Didymoxyd anders ist als das

1) Die quantitative Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf Physiologie, Physik etc. Tübingen 1876. p. 2.

2) Wien. Akad. Anz. 1876. p. 93.

einer verdünnten Lösung derselben Substanz. In ersterer ist ein Streifen im Gelb und einer im Grün nach dem rothen Ende hin viel weiter reichend als in letzterer, während nach Blau beide Streifen gleich sind, und ausserdem ist die Vertheilung der Helligkeiten in beiden Spectren verschieden. Die Einzelheiten des Versuches, sowie Versuche mit anderen Substanzen verspricht Lippich später mitzutheilen. Ich habe die Arbeit selbst nicht einsehen können und berichte daher hier nach der mir gewordenen Mittheilung.

Fasst man die Gesammtheit der an Flüssigkeiten gemachten Beobachtungen zusammen, so ergeben sie zum Theil einen Einfluss der Dichtigkeit, zum Theil nicht. Ich habe es daher nicht für unnöthig gehalten, neue Beobachtungen mit homogenem Lichte anzustellen. Vor allem schien es mir wünschenswerth, die Beobachtungen so einzurichten, dass eine Veränderung der Absorptionscoëfficienten nicht unbemerkt bleibe, bei der sich mit zunehmender Verdünnung die Werthe der Absorptionscoëfficienten verschieben, bei der also in dünneren Lösungen dieselben Werthe Strahlen von etwas anderer Wellenlänge entsprechen als in dichteren. Zur Auffindung einer derartigen Veränderung eignen sich besonders Beobachtungen in Theilen des Spectrums, in denen sich die Absorptionscoëfficienten sehr rasch ändern, und ich habe daher bei allen untersuchten Flüssigkeiten stets auch an Stellen des Spectrums beobachtet, an denen sich eine rasche Aenderung der Absorptionscoëfficienten erkennen liess, auch wenn das Licht nur durch eine einige Millimeter dicke Schicht der absorbirenden Flüssigkeit gegangen war.

Ich habe bei den Versuchen alle Ursachen zu beseitigen gesucht, die ausser der Dichtigkeit die Menge des von einem Körper hindurchgelassenen Lichtes zu ändern vermögen, um so den Einfluss einer Veränderung der Dichtigkeit allein beobachten zu können. Hierzu wurden die Versuche in folgender Weise angeordnet. Die Flamme einer Petroleumlampe wurde in den Brennpunkt 0 Taf. I

Fig. 3 einer Linse von 164 mm Brennweite gestellt, ein etwa 45° gegen die Horizontale geneigter Spiegel reflectirte das parallel aus der Linse austretende Licht senkrecht nach oben. Ueber dem Spiegel stand auf Holzleisten das zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeiten bestimmte Glasgefäss, ein kubisches Gefäss von 84 mm Seite auf vier Stellschrauben. Das Gefäss wurde auf vier an den Leisten markirten Punkten aufgesetzt und seine Bodenplatte mittelst der Wasserwage horizontal gestellt; dann wurde auf den Boden des Gefässes ein versilberter Glasspiegel aufgelegt und Linse und Flamme so eingestellt, dass das von der Mitte der Flamme ausgehende und vom Silberspiegel reflectirte Licht wieder zur Mitte der Flamme zurückkehrte. Die nachher in das Gefäss gegossene Flüssigkeit ist dann in der Mitte oben und unten von parallelen Ebenen begrenzt und das Licht tritt senkrecht oder nahezu senkrecht in sie ein. Oberhalb des Gefässes befindet sich ein zweiter Spiegel, der das senkrecht nach oben aus dem Gefäss austretende Licht in horizontaler Richtung zum Photometer reflectirt. Als Photometer habe ich den in diesen Annalen [1]) beschriebenen Apparat benutzt, der die photometrische Vergleichung der homogenen Bestandtheile zweier Lichtbündel gestattet. Mit dem einen Lichtbündel wird die obere Spalthälfte des Apparates beleuchtet, mit dem anderen Lichtbündel die untere. Das von dem Spalt ausgehende Licht durchläuft dann eine Collimatorlinse, ein doppelt brechendes und ein Nicol'sches Prisma, eine Anzahl Glasprismen und ein Beobachtungsfernrohr und erzeugt so zwei an einander grenzende Spectren, deren Helligkeitsverhältniss von dem Winkel abhängt, den die Polarisationsebene des Nicols mit dem Hauptschnitt des doppelt brechenden Prismas macht. Das durch die absorbirende Flüssigkeit gegangene Licht ging bei meinen Versuchen zur unteren Spalthälfte des Photometers; vor der oberen war ein rechtwinkeliges Glasprisma

1) Wied. Ann. I. 351. 1877.

befestigt, das das von einem seitlich aufgestellten Spiegel zurückgeworfene Licht der Lampe zur oberen Spalthälfte reflectirte. In der Figur, welche einen Querschnitt der beschriebenen Anordnung zeigt, bezeichnen die punktirten Linien den Gang der Lichtstrahlen.

Die Beobachtungen wurden in folgender Weise angestellt. Die vier Schrauben des Glasgefässes wurden auf die bezeichneten Punkte der Leisten zwischen die Spiegel gesetzt und die Bodenplatte mittelst der Wasserwage horizontal gestellt. Das Gefäss wurde dann zwischen den Spiegeln hervorgezogen und eine gewisse Menge concentrirter Lösung mittelst der Pipette eingegossen; dann wurde auf die Flüssigkeit eine Korkscheibe gelegt, die nur einen etwa 0,25 mm breiten Rand zwischen sich und den Seiten des Glasgefässes liess und eine Pipette über der Mitte der Scheibe in einem Stativ so befestigt, dass ihre Spitze einige Millimeter über der Platte stand. Der Hahn der Pipette wurde so eingestellt, dass die zuzusetzende Menge Wasser oder Alkohol in einzelnen Tropfen langsam abfloss. Wenn man auf diese Weise das Lösungsmittel vorsichtig auf die concentrirte Lösung fliessen lässt, das Gefäss vor Erschütterungen und theilweisen Erwärmungen, die Strömungen hervorrufen könnten, schützt, so erhält man die Flüssigkeiten so übereinander geschichtet, dass die Dichtigkeit der absorbirenden Flüssigkeit in gleicher Entfernung vom Boden überall gleich ist. Wenn man dann in horizontaler Richtung durch die Flüssigkeit nach einem weissen Papiere blickt, so erscheint es in gleicher Höhe über dem Boden überall gleich gefärbt. Zur eigentlichen Messung wurden zuerst die beiden Spectren im Photometer durch Drehung des Nicols in der zu untersuchenden Farbe in zwei Einstellungen auf gleiche Helligkeit gebracht, dann das Gefäss mit den übereinander geschichteten Flüssigkeiten auf die bezeichneten Punkte der Leisten zwischen die Spiegel gestellt und durch vier Einstellungen die Lage der Polarisationsebene des Nicols bestimmt, bei der die beiden Spectren jetzt gleich hell sind. Dann

wurde das Gefäss zwischen den Spiegeln entfernt und die Spectren in zwei Einstellungen gleich hell gemacht. Dieselbe Messung wurde dann unmittelbar darauf wiederholt, nachdem man die Flüssigkeiten im Gefäss gemischt hatte. Bezeichnet α das Mittel aus den vier Einstellungen unmittelbar vor und nach Einschaltung des Gefässes mit den übereinander geschichteten Flüssigkeiten, den Winkel von der Lage aus gerechnet, in der das Nicol das obere Spectrum auslöscht, α' das Mittel aus den Einstellungen bei eingeschaltetem Gefäss, so ist der Schwächungscoëfficient des Lichtes bei seinem Durchgange durch das Gefäss und die übereinander geschichteten Flüssigkeiten:

$$k = \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha'}{\mathrm{tg}^2 \alpha}.$$

Bezeichnet ferner α_1 das Mittel aus den vier Einstellungen vor und nach Einschaltung des Gefässes mit den gemischten Flüssigkeiten, α_1' das Mittel aus den vier Einstellungen mit Einschaltung des Gefässes und der gemischten Flüssigkeiten, so ist der Schwächungscoëfficient k_1 des Lichtes bei seinem Durchgange durch die Bodenplatte des Gefässes und die gemischten Flüssigkeiten:

$$k_1 = \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha_1'}{\mathrm{tg}^2 \alpha_1}.$$

Diese Schwächungscoëfficienten bestehen aus zwei Theilen, einem, der von der Reflexion und Absorption der Bodenplatte des Gefässes und von der Reflexion an der Grenze von Flüssigkeit und Luft herrührt, und einem durch die Absorption der Flüssigkeiten bedingten. Bezeichnen wir die beiden Theile im ersten Falle mit r und a, im zweiten mit r_1 und a_1, so ist:

$$k = ra \qquad k_1 = r_1 a_1.$$

Bezeichnet β die Menge des an der Grenze von Glas und Luft reflectirten Lichtes, die des einfallenden gleich 1 gesetzt, β' dieselbe Grösse für die Grenze von Glas und der concentrirten Lösung und β'' die Menge des an der Grenze von Luft und dem Lösungsmittel reflectirten

Lichtes, ist ferner g der Schwächungscoëfficient der Bodenplatte des Gefässes, so ist:

$$r = (1-\beta)(1-\beta')(1-\beta'')g.$$

Vernachlässigt sind hierbei die Glieder, welche Producte von β, β', β'' als Factoren enthalten, Glieder, die sämmtlich kleiner als 0,001 sind. Bezeichnet man in entsprechender Weise mit β_1' den Reflexionscoëfficienten an der Grenze von Glas und der verdünnten Lösung und mit β_1'' den für die Grenze der verdünnten Lösung und Luft, so ist mit gleicher Näherung:

$$r_1 = (1-\beta)(1-\beta_1')(1-\beta_1'')g.$$

Sind die Brechungsexponenten des Glases und der Flüssigkeiten bekannt, so lassen sich die Grössen β, β' etc. nach den Fresnel'schen Formeln berechnen; bringt man ferner die Spectren ohne eingeschaltetes Gefäss auf gleiche Helligkeit, setzt dann das Gefäss ohne Flüssigkeiten zwischen die Spiegel und macht die Spectren wieder gleich hell und sind γ und γ' die Winkel der Polarisationsebene des Nicols mit dem Hauptschnitte des doppelt brechenden Prismas des Photometers, so ist:

$$g = \frac{\operatorname{tg}^2\gamma'}{\operatorname{tg}^2\gamma(1-\beta)^2}.$$

Somit kann man die Grössen r und r_1 berechnen und hat dann:

$$a = \frac{k}{r}; \qquad a_1 = \frac{k_1}{r_1}.$$

Ist das Gefäss ein Parallelepiped, die Temperatur der übereinander geschichteten und gemischten Flüssigkeiten in beiden Messungen dieselbe, ist ferner durch die Mischung keine chemische Veränderung eingetreten und wären die Flüssigkeiten in beiden Fällen oben durch Ebenen begrenzt, so gäben die Coëfficienten a und a_1 unmittelbar ein Maass für die von derselben Menge gefärbter Flüssigkeit bei verschiedener Dichtigkeit absorbirte Lichtmenge. Der Vortheil der beschriebenen Anordnung besteht haupt-

sächlich darin, dass in beiden Messungen die Menge der durchstrahlten absorbirenden Substanz und der Lichtverlust durch den Staubgehalt unverändert bleibt und nur die Dichtigkeit des absorbirenden Stoffes bei der zweiten Messung eine andere ist.

Um zunächst zu prüfen, ob das Gefäss parallelepipedisch ist, stellte ich seine Bodenplatte mittelst der Wasserwage horizontal, goss eine geringe Menge absoluten Alkohol hinein, so dass eine auf einer Korkscheibe befestigte Glasspitze gerade zu schwimmen anfing und bestimmte mit dem Kathetometer das Steigen dieser Spitze durch Zugiessen von je 50 ccm Alkohol. Ich erhielt folgende Werthe:

7,4, 7,3, 7,4, 7,3, 7,3, 7,4, 7,3, 7,3 mm.

Danach sind also die gegenüberstehenden Seiten des Gefässes parallel.

Die Temperatur stieg durch das Mischen der Flüssigkeiten, wie directe Beobachtungen ergaben, höchstens um 0,25° C., war also nahezu dieselbe in beiden Messungen. Bei den untersuchten Lösungen, der Lösung von chemisch reinem doppelt chromsaurem Kali und schwefelsaurem Kupferoxyd in Wasser und der von Jod in Alkohol und Schwefelkohlenstoff sind chemische Veränderungen bei weiterer Verdünnung unmittelbar nach der Mischung nicht zu erwarten, und so sind also auch die absorbirenden Substanzen in beiden Messungen chemisch unverändert. Endlich kann die Aenderung der Brechungsexponenten, die durch die Mischung bewirkt wird, die Menge des zur unteren Spalthälfte des Photometers gelangenden Lichtes nicht ändern, da paralleles Licht benutzt wurde und die Flüssigkeiten im mittleren vom Licht durchstrahlten Theile des Gefässes von parallelen Ebenen begrenzt sind.

Die in beiden Messungen vom Lichte durchstrahlte Menge der absorbirenden Substanz würde dieselbe sein, wenn die Grenzfläche der Flüssigkeiten gegen Luft in der ganzen Ausdehnung des Gefässes eben wäre. In der

Mitte, etwa 4 cm von den Wänden entfernt, ist sie nach den Beobachtungen von Hagen[1]) eben, aber nach den Wänden hin steigt sie empor. Dieses über das Niveau gehobene Flüssigkeitsvolumen müssen wir uns in beiden Fällen in einer Schicht von gleichmässiger Dicke über die Oberfläche ausgebreitet denken und zu der beobachteten Menge absorbirten Lichtes diejenige hinzufügen, die diese Schicht absorbiren würde, um die von der gleichen Menge absorbirender Substanz bei verschiedener Dichtigkeit hindurchgelassene Lichtmenge zu erhalten.

Nach einem Satze der Capillaritätstheorie ist das über das Niveau gehobene Flüssigkeitsvolumen V dem Umfange u proportional, also:

$$V = \alpha u$$

und demnach ist die Dicke d' dieser Schicht:

$$d' = \frac{4\alpha}{84} \text{ mm.}$$

Der Werth von α ergibt sich aus der Beobachtung der Steighöhe der Flüssigkeit in Capillarröhren. Bezeichnet daher b den Schwächungscoëfficienten der concentrirten Lösung für eine Schicht von der Dicke 1, b_1 den des Lösungsmittels und sind d und d'' die Dicken der beiden übereinander geschichteten Flüssigkeiten in der Mitte des Gefässes, so ist:

$$a = b^d b_1^{d''}$$

Wäre nun die durch die Capillaritätskräfte über das Niveau gehobene Menge des Lösungsmittels in einer Schicht von gleichmässiger Dicke über die Oberfläche ausgebreitet, so würde der Schwächungscoëfficient in diesem Falle $a\, b_1^{d'}$.

Nach den Messungen, die ich früher[2]) über die Schwächungscoëfficienten der benutzten Lösungsmittel, Wasser, Alkohol und Schwefelkohlenstoff angestellt habe, unterscheidet sich $b_1^{d'}$ stets um weniger als $\frac{1}{2000}$ von der

1) Abh. d. Berl. Akad. 1845. p. 65 u. 66.
2) Pogg. Ann. CXLI. p. 68.

Einheit; wir können daher den direct beobachteten Werth a statt $ab_1^{d'}$ setzen. Ist ferner c der Schwächungscoëfficient der gemischten Flüssigkeiten für die Einheit der Dicke und d_1 die Dicke der durchstrahlten Schicht, so hat man:

$$a_1 = c^{d_1}$$

und der Schwächungscoëfficient würde:

$$a_1 c^{d_1'} = c^{(d_1+d_1')}$$

sein, wenn die durch die Capillaritätskräfte über das Niveau gehobene Menge verdünnter Lösung in einer Schicht von der gleichmässigen Dicke d_1' über die Oberfläche ausgebreitet würde. Die Werthe von $ab_1^{d'}$ und $a_1 c^{d_1'}$ geben dann ein Maass für das von derselben Menge absorbirender Substanz bei verschiedener Dichtigkeit hindurchgelassene Licht.

Schwefelsaures Kupferoxyd.

Zuerst untersuchte ich eine Lösung von chemisch reinem schwefelsaurem Kupferoxyd. Der Brechungsexponent einer gesättigten Lösung ist nach Beer 1,359; den einer mit drei Theilen Wasser verdünnten Lösung fand ich gleich 1,343. Danach ist der Werth des Reflexionscoëfficienten an der Grenze der concentrirten Lösung und Glas β' gleich 0,003 und der an der Grenze der verdünnten Lösung und Glas β_1' gleich 0,004. Der Brechungsexponent des Glases ist hierbei zu 1,52 angenommen. Setzt man den des Wassers gleich 1,336, so wird:

$$1-\beta = 0{,}958 \qquad 1-\beta' = 0{,}997 \qquad 1-\beta'' = 0{,}979.$$

Für den Schwächungscoëfficienten g der Bodenplatte des Gefässes fand ich aus Beobachtungen am leeren Gefäss in der vorher angegebenen Weise 0,852 und somit ist für die concentrirte Lösung:

$$r = (1-\beta)(1-\beta')(1-\beta'')g = 0{,}797.$$

Für die mit drei Theilen Wasser verdünnte Lösung ergibt sich:

$$1-\beta_1' = 0{,}996 \qquad 1-\beta_1'' = 0{,}979$$

und somit:

$$r_1 = (1-\beta)(1-\beta_1)(1-\beta_1')g = 0{,}796.$$

Für stärker verdünnte Lösungen habe ich denselben Werth von r_1 angenommen, denn die Unterschiede der Reflexionscoëfficienten der mit drei Theilen Wasser verdünnten Lösung von denen des reinen Wassers sind kleiner als 0,001 und ihre Unterschiede von den Reflexionscoëfficienten stärker verdünnter Lösungen sind daher jedenfalls zu vernachlässigen. Das Volumen v' der an der Gefässwand über das Niveau emporsteigenden Flüssigkeitsmenge habe ich aus den specifischen Gewichten und den Steighöhen in Capillarröhren nach der Angabe Quincke's[1]) berechnet. Für Lösungen, die auf einen Theil concentrirter Lösung drei, fünf und sieben Theile Wasser enthielten, ergab sich v' zu 2,369, 2,395 und 2,425 ccm Volumen, die gleichmässig über die Oberfläche ausgebreitet Schichten von 0,34 mm Dicke bilden würden. Bezeichnet d_1 wie vorher die Dicke der gemischten Flüssigkeiten in der Mitte des Gefässes und c ihren Schwächungscoëfficienten für die Einheit der Dicke, so ergibt die directe Beobachtung c^{d_1} oder a_1. Wäre die an den Wänden emporsteigende Flüssigkeitsmenge in einer Schicht von gleichmässiger Dicke über die Oberfläche ausgebreitet, so wäre der Schwächungscoëfficient $a_1 c^{0{,}34}$ mm. Der Werth von $c^{0{,}34}$ ist $a_1^{\frac{0{,}34}{d_1}}$. Für d_1 habe ich die Summe aus der Dicke der concentrirten Lösung und der des Lösungsmittels angenommen, wie sie sich aus den übereinander geschichteten Flüssigkeiten ergibt. In Wirklichkeit ist sie wegen der bei der Mischung eintretenden Contraction etwas kleiner. Ich habe die Grösse dieser Volumenabnahme für einige Mischungen aus dem bekannten specifischen Gewicht der concentrirten Lösung und der Mischung berechnet. Die Aenderung, die $a_1^{\frac{d_1+0{,}34}{d_1}}$ dadurch erlitt, dass man für d_1 statt der vorher angegebenen Summen seinen wirklichen Werth einführte,

1) Pogg. Ann. CLX. p. 349.

war stets kleiner als 0,001 und ich habe sie daher für alle Mischungen vernachlässigt.

Ich theile in Folgendem die einzelnen Beobachtungen mit. Die Tabelle (a. d. folg. S.) enthält in der ersten Reihe die Wellenlängen des Lichtes in der Luft, bei dem beobachtet wurde, in der zweiten und dritten die Dicken der concentrirten Lösung und des Lösungsmittels bei übereinander geschichteten Flüssigkeiten, in der vierten den Schwächungscoëfficienten der übereinander geschichteten und in der fünften den der gemischten Flüssigkeiten, in der sechsten Reihe den Unterschied beider und in der siebenten die Verdünnung der Mischung, ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler die in ihr enthaltenen Theile der concentrirten Lösung und dessen Nenner die in ihr enthaltenen Theile des Lösungsmittels angibt. Die Wellenlängen λ der mit den einzelnen Zahlen der Scala zusammenfallenden Stellen des Spectrums wurden durch den Vergleich mit den Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums bestimmt; sie sind in Milliontel Millimetern angegeben. Die Werthe von a und a'' sind die Schwächungscoëfficienten für dieselbe durchstrahlte Menge absorbirender Substanz bei verschiedener Dichtigkeit.

Die Unterschiede der Schwächungscoëfficienten für dieselbe Dicke der concentrirten Lösung, wie sie die vorstehende Tabelle zeigt, sind nicht den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, sondern haben ihren Grund in der verschiedenen Concentration der untersuchten Lösungen. Eine concentrirte Lösung, die längere Zeit steht, ändert mit den Schwankungen der Zimmertemperatur ihren Salzgehalt von Tag zu Tag und ich habe meist nicht mehr als eine Beobachtung an einem Tage angestellt. Ein Maass für die Grösse der Beobachtungsfehler geben die Unterschiede in den Zahlen der sechsten Reihe, welche derselben Menge concentrirter Lösung und Wasser entsprechen. Aus den mitgetheilten Beobachtungen ergibt sich, dass die Unterschiede der Schwächungscoëfficienten der übereinander geschichteten und gemischten Flüssigkeiten sehr

Schwefelsaures Kupferoxyd.

λ	d mm	d'' mm	a	a''	$a - a''$	V
674	3,40	23,80	0,081	0,077	+0,004	1/7
„	„	„	0,073	0,066	+0,007	„
„	„	„	0,073	0,071	+0,002	„
„	„	„	0,082	0,080	+0,002	„
			0,077	0,073	+0,004	
659	3,40	23,80	0,153	0,147	+0,006	1/7
„	„	„	0,157	0,153	+0,004	„
			0,155	0,150	+0,005	
626	7,09	35,45	0,324	0,321	+0,003	1/5
„	„	„	0,348	0,340	+0,008	„
			0,336	0,330	+0,006	
557	7,09	21,27	0,460	0,451	+0,009	1/3
„	„	„	0,439	0,432	+0,007	„
			0,449	0,441	+0,008	
557	7,09	49,63	0,510	0,507	+0,003	1/7
525	7,09	21,27	0,822	0,819	+0,003	1/3
„	„	49,63	0,848	0,854	−0,006	1/7

gering sind und der Grösse der Beobachtungsfehler nahe stehen. Die Schwächungscoëfficienten der Mischungen sind fast sämmtlich kleiner. Diese geringe Abnahme könnte von der Temperaturerhöhung herrühren, die bei der Mischung eintritt, denn nach den Beobachtungen von Feussner[1]) nimmt das Absorptionsvermögen der Lösungen von schwefelsaurem Kupferoxyd mit der Temperatur zu. Die Temperaturerhöhung betrug nach directen Beobachtungen höchstens 0,25° C.

Zweifach chromsaures Kali.

Das benutzte zweifach chromsaure Kali war chemisch rein. Den Brechungsexponenten einer bei 12° C. gesät-

1) Berl. Monatsber. 1865. p. 146.

tigten Lösung fand ich gleich 1,3546 für Natronlicht. Danach ist der Reflexionscoëfficient β' an der Grenze von Glas und gesättigter Lösung 0,0033 und mithin:

$$1 - \beta' = 0{,}9967.$$

Die Refractionscoëfficienten an der Grenze von Wasser und Luft und von Luft und Glas $(1-\beta'')$ und $(1-\beta)$ und der Schwächungscoëfficient g der Bodenplatte des Gefässes haben die vorher angegebenen Werthe und somit ist:

$$r = (1-\beta)(1-\beta')(1-\beta'')g = 0{,}797.$$

Für eine Lösung, die auf einen Theil concentrirter Lösung vier Theile Wasser enthielt, fand ich den Brechungsexponenten für Natronlicht gleich 1,3374. Danach ist für diese verdünnte Lösung:

$$1-\beta'_1 = 0{,}996 \qquad 1-\beta''_1 = 0{,}979$$

und somit:

$$r_1 = (1-\beta)(1-\beta_1')(1-\beta_1'')\, g = 0{,}796.$$

Für stärker verdünnte Lösungen habe ich denselben Werth für r_1 angenommen; denn der Unterschied zwischen den eben angegebenen Refractionscoëfficienten von denen des reinen Wassers ist kleiner als 0,001 und ihr Unterschied von den Refractionscoëfficienten stärker verdünnter Lösungen, kleiner als der vorige, zu vernachlässigen.

Die Capillaritätsconstante bestimmte ich für eine Mischung, die auf einen Theil gesättigter Lösung drei Theile Wasser enthielt; aus der Steighöhe in einer Capillarröhre und dem spec. Gewicht 1,014 ergab sie sich zu 7,751 mg. Danach ist das Volumen der über das Niveau gehobenen Flüssigkeit 2,604 ccm und in gleichmässiger Dicke über die Oberfläche ausgebreitet gäbe sie eine Schicht von 0,37 mm Höhe. Ist daher in der Bezeichnung des vorigen Abschnittes $a_1^{d_1}$ der Schwächungscoëfficient der gemischten Flüssigkeiten, wie ihn die Beobachtung unmittelbar ergibt, so wäre er $a_1^{\frac{d_1+0{,}37}{d_1}}$, wenn die an den Gefässwänden emporsteigende Flüssigkeit gleichmässig über die Oberfläche ausgebreitet wäre. Den Werth

0,37 habe ich auch für verdünntere Lösungen beibehalten, denn er unterscheidet sich von dem für reines Wasser geltenden 0,35 mm und um so mehr von dem verdünnterer Lösungen in für die vorliegenden Beobachtungen zu vernachlässigender Weise. Für d_1, die Dicke der Mischung, habe ich auch hier die Summe der Dicken der gesättigten Lösung und des darüber geschichteten Lösungsmittels angenommen aus demselben Grunde, den ich bei der Mittheilung der Beobachtungen an Kupfervitriollösungen angegeben habe, ohne die bei der Mischung eintretende Volumenänderung zu berücksichtigen. Ich gebe in Folgendem die einzelnen Beobachtungen; die Buchstaben der Tabelle haben dieselbe Bedeutung wie vorher.

Zweifach chromsaures Kali.

λ	d mm	d'' mm	a	a''	$a - a''$	V
557	7,09	42,54	0,883	0,888	−0,005	$^1/_6$
„	„	„	0,864	0,869	−0,005	„
„	„	„	0,854	0,873	−0,019	„
„	„	„	0,836	0,845	−0,009	„
			0,859	0,869	−0,010	
557	7,09	77,99	0,871	0,867	+0,004	$^1/_{11}$
„	„	„	0,819	0,838	−0,019	„
„	„	„	0,830	0,835	−0,005	„
„	„	„	0,855	0,841	+0,014	„
			0,844	0,845	−0,001	
529	3,40	23,80	0,089	0,096	−0,007	$^1/_7$
„	„	„	0,075	0,084	−0,009	„
„	„	„	0,067	0,069	−0,002	„
„	„	„	0,075	0,071	+0,004	„
			0,076	0,080	−0,004	

Die Unterschiede zwischen den Werthen der Schwächungscoëfficienten für Schichten der concentrirten Lösung von gleicher Dicke sind auch hier grösser, als die Beob-

achtungsfehler der photometrischen Messung. Sie rühren zum Theil von der sich mit der Zimmertemperatur von Tag zu Tag etwas ändernden Sättigung der Lösung her, — auch hier habe ich meist nur eine Beobachtung an einem Tage angestellt — zum Theil ist es bei concentrirten Lösungen von KaO, $2CrO_3$ schwierig, ein bestimmtes Volumen abzumessen. Die Flüssigkeit haftet stark am Glase, die Wände der Pipette bleiben stets mit Flüssigkeitstropfen bedeckt und die Bestimmung der ausgeflossenen Menge wird etwas unsicher. Ein Maass für die Beobachtungsfehler geben auch hier die Unterschiede in den Werthen der sechsten Reihe, die Schichten concentrirter Lösung von gleicher Dicke entsprechen. Danach wären die Unterschiede zwischen den Werthen der Schwächungscoëfficienten für dieselbe Menge absorbirender Substanz bei grösserer und geringerer Dichtigkeit kleiner als die Beobachtungsfehler. In überwiegender Mehrzahl sind sie freilich bei geringerer Dichtigkeit grösser. Eine Folge der Temperaturerhöhung, die bei der Mischung eintritt, — sie betrug nach directen Beobachtungen höchstens 0,25° C. — könnte das nicht sein, denn nach den Beobachtungen von Feussner, Beobachtungen, die ich schon für Temperaturerhöhungen von einigen Graden bestätigt gefunden habe, nehmen die Schwächungscoëfficienten bei Lösungen von doppelt chromsaurem Kali mit steigender Temperatur ab.

Jod in absolutem Alkohol gelöst.

Das specifische Gewicht des zur Lösung benutzten absoluten Alkohols war nach einer Bestimmung mit dem Aräometer 0,795. Für die nicht verdünnte Jodlösung habe ich nach einer Angabe von Beer[1]) den Brechungsexponenten zu 1,384 angenommen. Es genügte eine annähernde Kenntniss seines Werthes, da der von ihm abhängige Reflexionscoëfficient für die Grenze von Glas und Jodlösung an sich schon klein (0,0022), sich selbst bei

1) Einleitung in die höhere Optik p. 422.

Aenderungen des Brechungsexponenten um zwei Einheiten der zweiten Decimale nicht um 0,001 ändert. Den Brechungsexponenten des absoluten Alkohols setzte ich gleich 1,366. Danach ist:

$$1-\beta' = 0{,}9978, \quad 1-\beta'' = 0{,}9761 \quad \text{und} \quad r = 0{,}7955.$$

Für die mit sieben Theilen absoluten Alkohols verdünnte Lösung habe ich den Brechungsexponenten des Alkohols angenommen, denn bei einer Vergleichung der Winkel der Totalreflexion an der Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Glasprismas konnte ich mit blossem Auge einen Unterschied nicht bemerken. Demnach ist:

$$1-\beta_1' = 0{,}9971, \quad 1-\beta_1'' = 0{,}9761 \quad \text{und} \quad r_1 = 0{,}7964.$$

Aus der Beobachtung der Steighöhe in einer Capillarröhre und dem specifischen Gewicht 0,816 ergab sich die Capillaritätsconstante für die concentrirte Jodlösung zu 2,361. Danach ist das über das Niveau gehobene Flüssigkeitsvolumen 0,972 ccm; es gäbe, gleichmässig über die Oberfläche ausgebreitet, eine Schicht von 0,1378 mm Höhe. Für absoluten Alkohol wäre die Dicke einer entsprechenden Schicht 0,1385 mm, eine Zahl, die sich von der vorigen für die vorliegenden Beobachtungen nicht merklich unterscheidet. Daher habe ich sie auch für die mit sieben Theilen Alkohol verdünnte Jodlösung angenommen. Die Tabelle auf p. 73 enthält die einzelnen Beobachtungen.

Die Unterschiede der Werthe der Schwächungscoëfficienten der Jodlösung bei grösserer oder geringérer Dichtigkeit des Jods sind auch hier von der Ordnung der Beobachtungsfehler, aber wie bei den Lösungen des zweifach chromsauren Kalis, die Schwächungscoëfficienten der gemischten Flüssigkeiten in überwiegender Anzahl grösser. Eine Folge der Temperaturerhöhung bei der Mischung, die nach directen Beobachtungen 0,25° C. nicht überstieg, kann das nicht sein, denn nach einer Messung für die Wellenlänge 0,000 657 mm ergab eine Erwärmung der Flüssigkeit eine Verminderung des Schwächungscoëfficienten. Ob die Schwächung des Lichtes durch eine Mischung

Jod in absolutem Alkohol gelöst.

λ	d mm	d'' mm	a	a''	$a - a''$	l
657	6,80	47,60	0,639	0,634	+0,005	1/7
„	„	„	0,570	0,592	−0,022	„
„	„	„	0,643	0,631	+0,012	„
„	„	„	0,653	0,668	−0,015	„
„	„	„	0,626	0,646	−0,020	„
„	„	„	0,630	0,656	−0,026	„
			0,627	0,638	−0,011	
527	3,40	23,80	0,170	0,183	−0,013	1/7
„	„	„	0,160	0,166	−0,006	„
„	„	„	0,193	0,224	−0,031	„
„	„	„	0,142	0,172	−0,030	„
„	„	„	0,176	0,172	+0,004	„
			0,168	0,183	−0,015	

dieselbe ist, als wenn das Licht die in ihr enthaltenen Mengen der concentrirten Lösung und des Lösungsmittels nach einander durchläuft, habe ich für die Jodlösung noch in anderer Weise untersucht. Es wurden 24 ccm der concentrirten Jodlösung in das Glasgefäss gegossen und der Schwächungscoëfficient b^d bestimmt. Die Beobachtung ergibt direct $rb^d = k$. Der Werth von r berechnet sich aus den vorher für die concentrirte Jodlösung angegebenen Brechungsexponenten:

$$r = 0{,}7936$$

und somit:

$$b^d = \frac{k}{0{,}7936}.$$

Wäre die an den Wänden über das Niveau emporsteigende Flüssigkeit in einer Schicht von der gleichen Dicke d_1 über die Oberfläche ausgebreitet, so wäre der Schwächungscoëfficient b^{d+d_1}, ein Werth, der sich aus den bekannten vorher angegebenen Werthen von d und d_1 berechnen lässt. Es wurden dann 168 ccm absoluten Alkohols hinzugegossen, die Flüssigkeiten gemischt und der

Schwächungscoëfficient der Mischung bestimmt mit Berücksichtigung der Correction wegen des durch die Capillarkräfte über das Niveau gehobenen Flüssigkeitsvolumens. Dann wurde das Gefäss von neuem gereinigt, 24 ccm absoluten Alkohols hineingegossen und der Schwächungscoëfficient bestimmt, hierauf 168 ccm Alkohol hinzugegossen und der Schwächungscoëfficient wiederum bestimmt. Der Quotient aus den in den beiden letzten Beobachtungen erhaltenen Werthen ergibt dann den Schwächungscoëfficienten $b_1^{d''}$ der in der Mischung enthaltenen Menge absoluten Alkohols. Der nur von der Absorption herrührende Schwächungscoëfficient des Lichtes, wenn es die in der Mischung enthaltene Menge concentrirter Jodlösung und absoluten Alkohols nach einander durchläuft, ist demnach:

$$b_1^{d''} b^{d+d_1} = a.$$

Hier sind bei der Bestimmung von a die Fehler vermieden, die bei übereinander geschichteten Flüssigkeiten dadurch entstehen könnten, dass sich in der Uebergangsschicht zwischen der concentrirten Lösung und dem Lösungsmittel die Menge der ersteren nicht in jeder Verticalen in gleicher Weise mit der Höhe ändert. Dagegen ist der bei der Bestimmung von a benutzte Alkohol und so vielleicht auch sein Staubgehalt ein anderer als der in der Mischung enthaltene und es ist auch schwieriger, die Temperatur bei allen Beobachtungen constant zu erhalten. Ich erhielt so folgende Zahlen.

Jod in absolutem Alkohol gelöst.

λ	d mm	d'' mm	a	a''	$a - a''$	V
527	3,40	23,80	0,159	0,163	−0,004	1/7
„	„	„	0,157	0,172	−0,015	„
			0,158	0,168	−0,010	
527	3,40	23,80	0,090	0,093	−0,003	1/7

Die Zahlen der letzten Reihe wurden aus den Beobachtungen an einer Jodlösung erhalten, die mehr Jod enthielt als die vorher benutzte. Auch hier sind die Unterschiede zwischen den beiden Schwächungscoëfficienten von der Ordnung der Beobachtungsfehler, aber auch hier die Schwächungscoëfficienten der Mischung stets grösser.

Jod in Schwefelkohlenstoff gelöst.

Es gelang mir nicht, die Jodlösung und den Schwefelkohlenstoff gut getrennt übereinander zu schichten und ich habe daher die Beobachtungen hier nur in der Art angestellt, die ich am Schluss des vorigen Abschnittes beschrieben habe. Das specifische Gewicht des zur Lösung benutzten Schwefelkohlenstoffs war 1,270, der Brechungsexponent der nicht verdünnten Jodlösung für Natronlicht 1,658. Ich bestimmte ihn aus Messungen der Durchmesser Newton'scher Ringe, die durch eine Glaslinse und Glasplatte erzeugt wurden, zwischen denen sich dünne Schichten der Jodlösung oder Schwefelkohlenstoff befanden. Ist dann ϱ_2 und ϱ_1 der Radius des ersten und zweiten dunkeln Ringes, wenn sich Schwefelkohlenstoff zwischen den Gläsern befindet, und n der Brechungsexponent des Schwefelkohlenstoffs, sind ferner ϱ_2', ϱ_1' und n' die entsprechenden Grössen, wenn die Jodlösung zwischen den Gläsern ist, so ist:

$$n' = \frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varrho_2'^2 - \varrho_1'^2} \cdot n$$

Für n habe ich nach den Angaben von Beer 1,631 gesetzt. Danach ist für die nicht verdünnte Jodlösung:

$$r = 0{,}765.$$

Für die mit vier Theilen Schwefelkohlenstoff gemischte Lösung habe ich den Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs angenommen und somit:

$$r_1 = 0{,}769$$

gesetzt. Eine genaue Kenntniss des Brechungsexponenten war nicht nöthig, denn selbst Aenderungen seines Werthes um zwei Einheiten der zweiten Decimale, — Aenderungen,

die jedenfalls grösser sind als der Unterschied zwischen dem wirklichen und angenommenen Werthe des Brechungsexponenten der Mischung — würden die letzten Stellen der nachher mitgetheilten Werthe der Schwächungscoëfficienten noch nicht beeinflussen.

Aus dem specifischen Gewicht 1,282 und der Capillaritätsconstante 3,4198 ergibt sich das Volumen der über das Niveau emporsteigenden Menge der nicht verdünnten Jodlösung zu 0,8963 ccm. In einer Schicht von gleicher Dicke über die Oberfläche ausgebreitet, würde sie die Dicke der durchstrahlten Schicht um 0,127 mm vermehren. Ihr Unterschied von der entsprechenden Zahl für Schwefelkohlenstoff 0,129 mm ist für die vorliegenden Beobachtungen zu vernachlässigen und ich habe daher denselben Werth auch für die verdünnte Lösung beibehalten. Die einzelnen Beobachtungen enthält die folgende Tabelle.

Jod in Schwefelkohlenstoff gelöst.

λ	d mm	d'' mm	a	a''	$a - a''$	T
657	3,40	13,60	0,096	0,093	+0,003	1/4
„	„	„	0,084	0,084	±0,000	„
„	„	„	0,088	0,086	+0,002	„
„	„	„	0,093	0,093	±0,000	„
			0,090	0,089	±0,001	
607	3,40	13,60	0,0091	0,0093	−0,0002	1/4
„	„	„	0,0061	0,0062	−0,0001	„
„	„	„	0,0084	0,0092	−0,0008	„
„	„	„	0,0062	0,0061	+0,0001	„
			0,0074	0,0077	−0,0003	

Bei den Werthen der Schwächungscoëfficienten für Licht von der Wellenlänge 0,000 607 mm habe ich eine Stelle mehr angegeben, als bei den vorigen Zahlen, denn die Beobachtungsfehler der photometrischen Messung beeinflussen hier erst die vierte Decimale. So würde, wenn die absorbirende Flüssigkeit vor der einen Spalthälfte ist,

ein Einstellungsfehler des Nicols des Photometers um 10′ den Werth der grösseren Schwächungscoëfficienten der vorigen Tabelle um 0,0017, den der kleineren nur um 0,0004 ändern. Entsprechend sind denn auch die Unterschiede in den Werthen der sechsten Reihe, die als Maass für die Beobachtungsfehler dienen; bei den grösseren Werthen der Schwächungscoëfficienten finden sie sich schon in der dritten Decimale, bei den kleineren erst in der vierten. Das schnelle Verdampfen des Schwefelkohlenstoffs bewirkte hier grössere Temperaturschwankungen — bis zu 1° C. — zwischen den beiden Beobachtungen als bei den früheren Messungen. In einigen Fällen habe ich den zur Verdünnung hinzugesetzten Schwefelkohlenstoff absichtlich vorher um einige Grade erwärmt oder abgekühlt, ohne indess einen Einfluss der Temperatur auf den Unterschied zwischen den beiden Werthen der Schwächungscoëfficienten bemerken zu können. Auch hier sind die Unterschiede der Schwächungscoëfficienten a und a'' von der Ordnung der Beobachtungsfehler. Beachtenswerth ist indess, dass für die Wellenlänge 0,000 607 mm, die einer Stelle des Spectrums entspricht, in der die Werthe der Schwächungscoëfficienten der Jodlösung sehr schnell in der Richtung von Roth nach Blau abnehmen, die Schwächungscoëfficienten der Mischung meist etwas grössere sind, als die der nicht verdünnten Lösung. In der Nähe der Wellenlänge 0,000 657 mm war, wie der Anblick des Spectrums zeigte, die Aenderung der Schwächungscoëfficienten sehr viel geringer.

Fassen wir die Resultate der bisher mitgetheilten Beobachtungen zusammen, so ergibt sich, dass wenn sich die Menge des absorbirten Lichtes mit der Dichtigkeit ändert, diese Aenderung nur gering sein kann. Die untersuchten Flüssigkeiten lassen sich in zwei Gruppen theilen; bei der einen, dem schwefelsauren Kupferoxyd, nehmen die Schwächungscoëfficienten im Spectrum von Roth nach Blau ab, bei den drei anderen nehmen sie von Roth nach

Blau zu. Alle Beobachtungen bis auf eine Ausnahme ergeben beim schwefelsauren Kupferoxyd die Schwächungscoëfficienten der Mischung kleiner, bei den drei anderen Flüssigkeiten sind dagegen in sämmtlichen Mittelwerthen bis auf eine Ausnahme und in zwei Dritteln der einzelnen Beobachtungen die Schwächungscoëfficienten der Mischung grösser, als die der nicht gemischten Flüssigkeiten. Die Unterschiede sind von der Ordnung der Beobachtungsfehler, aber dass sie in so überwiegender Anzahl in demselben Sinne auftreten, macht es wenigstens wahrscheinlich, dass ihnen wirkliche Unterschiede der Schwächungscoëfficienten entsprechen. Sie würden dann anzeigen, dass bei gleicher durchstrahlter Menge der absorbirenden Substanz mit abnehmender Dichtigkeit dieselben Werthe der Schwächungscoëfficienten im Spectrum von Roth nach Blau rücken. Eine solche Verrückung würde bewirken, dass bei Flüssigkeiten mit einer nach Roth hin wachsenden Absorption derselben Stelle des Spectrums bei geringerer Dichtigkeit ein kleinerer Werth des Schwächungscoëfficienten entspräche, wie beim schwefelsauren Kupferoxyd, und ein grösserer Werth mit zunehmender Verdünnung sich bei Flüssigkeiten fände, bei denen die Absorption nach Roth hin abnimmt. Die Aenderung der Schwächungscoëfficienten, wie sie die vorliegenden Beobachtungen wahrscheinlich machen, stimmen für die rothen Flüssigkeiten der Grösse und dem Sinne nach mit denen überein, die Bunsen für den Schwächungscoëfficienten der auf Chlorknallgas chemisch wirkenden Strahlen bei einer Lösung von rother Tinte in Wasser fand.

Ich gebe in den folgenden beiden Tabellen die Mittelwerthe der Beobachtungen. Ihre erste Spalte enthält die Wellenlängen des Lichtes in Milliontel Millimetern, für das die Schwächungscoëfficienten gelten, die zweite die Schwächungscoëfficienten der übereinander geschichteten Flüssigkeiten, die dritte die der Mischung, die vierte den Unterschied beider und die fünfte die Anzahl der Be-

obachtungen, aus denen das Mittel genommen ist; in der sechsten ist die Anzahl der Beobachtungen angegeben, bei denen der Unterschied der beiden Schwächungscoëfficienten dem Sinne nach mit dem im Mittel erhaltenen übereinstimmt, und die letzte Spalte endlich enthält die Verdünnung der Mischung, ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler die in ihr enthaltenen Theile der gefärbten Lösung und dessen Nenner die in ihr enthaltenen Theile des farblosen Lösungsmittels angibt.

Schwefelsaures Kupferoxyd.

λ	a	a''	$a-a''$	n	n'	V
674	0,077	0,073	+ 0,004	4	4	$^1/_7$
659	0,155	0,150	+ 0,005	2	2	„
626	0,336	0,330	+ 0,006	2	2	$^1/_5$
557	0,449	0,441	+ 0,008	2	2	$^1/_3$
„	0,510	0,507	+ 0,003	1	1	$^1/_7$
525	0,822	0,819	+ 0,003	1	1	$^1/_3$
„	0,848	0,854	— 0,006	1	1	$^1/_7$

Für die Flüssigkeiten, deren Absorptionsvermögen von Roth nach Blau wächst, sind die Mittelwerthe in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

λ	a	a''	$a-a''$	n	n'	V
			$KaO, 2CrO_3$.			
557	0,859	0,869	— 0,010	4	4	$^1/_6$
„	0,844	0,845	— 0,001	4	2	$^1/_{11}$
529	0,076	0,080	— 0,004	4	3	$^1/_7$
			Jod in Alk. abs.			
657	0,627	0,638	— 0,011	6	4	$^1/_7$
527	0,168	0,183	— 0,015	5	4	„
„	0,158	0,168	— 0,010	2	2	„
„	0,090	0,093	— 0,003	1	1	„
			Jod in CS_2.			
657	0,090	0,089	+ 0,001	4	2	$^1/_4$
607	0,0074	0,0077	— 0,0003	4	3	„

Bei den bisher untersuchten Lösungen ändert sich die Zähigkeit und der Brechungsexponent mit zunehmender Verdünnung nicht beträchtlich; es schien mir von Interesse, auch eine Flüssigkeit zu untersuchen, bei der sich beide durch Zusatz von Wasser erheblich ändern, den Syrup. Man hat bei seiner Untersuchung vor allem darauf zu achten, dass er möglichst staubfrei ist; der käufliche enthält ziemlich viel Staub, der im nicht verdünnten Syrup weniger sichtbar, bei Zusatz von Wasser und dem damit eintretenden grösseren Unterschiede zwischen dem Brechungsexponenten des Staubes und dem der Flüssigkeit so viel Licht reflectirt und diffundirt, dass der verdünnte Syrup ganz trübe erscheint. Um ihn besser filtriren zu können, setzte ich dem käuflichen Syrup etwas Wasser zu, so dass er noch zähflüssig blieb und ein auf seine Oberfläche gebrachter Tropfen sich nur langsam in ihr ausbreitete, und liess ihn erst durch grobes und dann durch feines Filtrirpapier laufen. Für den so möglichst staubfrei gemachten Syrup fand ich den Brechungsexponenten gleich 1,493. Ich bestimmte ihn mit dem für diese Messungen so bequemen Abbe'schen Refractometer, das mir die Herren Schmidt und Haensch freundlichst zur Benutzung überliessen. Für die verdünnte Lösung fand ich n gleich 1,346. Danach ist:

$$r = 0{,}797 \quad \text{und} \quad r_1 = 0{,}796.$$

Die Capillaritätsconstante der mit fünf Theilen Wasser verdünnten Lösung war 5,368 und ihr specifisches Gewicht 1,074. Danach ist das über das Niveau emporsteigende Flüssigkeitsvolumen 1,280 ccm, entsprechend einer Schicht von der überall gleichen Dicke von 0,238 mm. Die Beobachtungen ergaben die auf p. 81 zusammengestellten Zahlen.

Die Unterschiede zwischen den Werthen der Schwächungscoëfficienten bei grösserer und geringerer Dichtigkeit sind nicht grösser, als die bei den anderen Flüssigkeiten gefundenen; auch sie sind von der Grösse der Beobachtungsfehler. Die Beobachtungen haben indess für die

Syrup.

λ	d mm	d' mm	a	a''	$a-a''$	V
626	6,80	34,00	0,543	0,549	−0,006	$^1/_5$
545	5,10	25,50	0,439	0,427	+0,012	„
„	„	„	0,414	0,412	+0,002	„
			0,426	0,419	+0,007	

Entscheidung der Frage, ob sich die Menge des absorbirten Lichtes mit der Dichtigkeit ändert oder nicht, nicht die gleiche Wichtigkeit wie die vorhergehenden. Denn da es nie gelingt, den Staub ganz zu entfernen, so bleibt es bei der starken Aenderung des Brechungsexponenten mit zunehmender Verdünnung und der dadurch bedingten grösseren Menge des reflectirten Lichtes bei der geringeren Dichtigkeit stets möglich, dass die Schwächungscoëfficienten der Mischung zu klein erscheinen. Bei den Beobachtungen an den anderen Flüssigkeiten lässt die geringe Aenderung des Brechungsexponenten mit zunehmender Verdünnung annehmen, dass die ihm entsprechende Aenderung des Lichtes, das von dem etwa in den Lösungen zurückgebliebenen Staube reflectirt wird, für die vorliegenden Beobachtungen zu vernachlässigen ist; sie würde auch nur eine Abnahme der Schwächungscoëfficienten mit der Dichtigkeit bewirken können, während die Mittelwerthe für die Mehrzahl der untersuchten Flüssigkeiten eine geringe Zunahme mit zunehmender Verdünnung anzeigen.

Endlich habe ich noch vergleichende Beobachtungen über das Spectrum des flüssigen und gasförmigen Broms angestellt. Herr Professor Finkener hatte die Güte mir reines Brom darstellen zu lassen. Ein Tropfen auf eine Glasplatte gebracht verdampfte vollständig, so dass die durchstrahlte Masse im Gas und in der Flüssigkeit dieselbe war. Vor die eine Spalthälfte des Photometers wurde ein mit Bromdampf gefülltes Glasgefäss gesetzt, vor die andere zwei Glasplatten, zwischen denen sich ein

Tropfen Brom befand. Im Photometer erhielt man dann das Absorptionsspectrum des flüssigen und dampfförmigen Broms unmittelbar neben einander.

Bei der Anstellung der Versuche wurden zunächst das Glasgefäss und die Glasplatten vor die beiden Spalthälften gebracht, die beiden Spectren gleich hell gemacht und das 2 cm dicke Gefäss mit Bromdampf gefüllt. Das eine Spectrum zeigte ausser den bekannten Absorptionsstreifen eine allgemeine Verdunkelung im Grün und Blau und daraus folgt, dass das Gas nicht nur das den dunkeln Streifen des Absorptionsspectrums entsprechende Licht schwächt, sondern wenigstens im Grün und Blau alles durchgehende. Darauf wurde ein Tropfen Brom zwischen die Glasplatten gebracht; zu Anfang war dann bei dem durch das flüssige Brom gehenden Lichte meist fast alles Gelbgrün, Grün und Blau ausgelöscht. Das flüssige Brom verdampft indess allmählich und dem entsprechend hellt sich sein Absorptionsspectrum auf. So wurden nach und nach verschiedene Theile der vor Einschaltung des gasförmigen und flüssigen Broms gleich hellen Spectren gleich hell, aber die brechbareren Theile waren stets im Absorptionsspectrum des flüssigen Broms dunkler. Bei gleicher durchstrahlter Masse können daher die Schwächungscoëfficienten des flüssigen und gasförmigen Broms nicht für alle Wellenlängen gleich sein. Ferner habe ich im Absorptionsspectrum des flüssigen Broms niemals mit Sicherheit ähnliche Absorptionsstreifen bemerken können, wie bei dem des Bromdampfes. Hier, wo sich mit der Dichtigkeit zugleich auch der Aggregatzustand ändert, ist daher die Absorption bei gleicher durchstrahlter Masse im gasförmigen und flüssigen Zustande wesentlich verschieden.

Berlin, den 28. October 1877.

VI. *Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressiblen Aether; von E. Ketteler.*

Physikalische Begründung der Gesetze der Totalreflexion. — Desgl. der Metallreflexion; Theorie des Hauptwinkels. — Reflexion an absorbirenden Krystallen. — Uebergang des Lichtes zwischen beliebigen absorbirenden Mitteln. — Das bewegte absorbirende Mittel. — Der verschwindende Strahl Green's; die Constitution der Grenzschichten und die Gesetze der elliptischen Polarisation der durchsichtigen Mittel.

So lange die theoretische Optik die Schwingungen der Körpertheilchen ignorirte und mit einem homogenen Aether auszukommen vermeinte, legte sie demselben die Fähigkeit bei, gleichzeitig in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt werden und beide Arten von Bewegung fortpflanzen zu können. Auch jetzt noch, seit insbesondere die Erscheinungen der anomalen Dispersion auf ein Zusammenschwingen der Aether- und Körpertheilchen hingewiesen haben, spielt die sogenannte hydrodynamische Dilatation selbst in den Arbeiten mancher Vertreter dieser Anschauung, so der Herren Boussinesq, Strutt und Wernicke ihre frühere Rolle fort. Und doch erscheint es bei der Annahme eines einzigen, überall gleich constituirten Aethers, in welchem die Erfahrung nur Transversalwellen nachwies und das Princip der Erhaltung der Kraft keine anderen zulässt, natürlich, die erwähnte Rolle den Amplituden der Körperschwingungen zu überweisen.

Was insbesondere die Gesetze der Spiegelung und Brechung betrifft, so beschränken sich auch Fresnel und Neumann auf Transversalwellen, und wenn Fresnel die Gesetze der Totalreflexion mittelst seiner Interpretation einer für sich genommenen complexen Grösse (Amplitude) gewonnen hatte, so vervollständigte Cauchy diese Erklärung, sofern er dieselbe auf den variablen Schwingungsausschlag übertrug. Später haben dann Cauchy und

Green überhaupt je eine longitudinale gespiegelte und gebrochene Welle zu den bisherigen transversalen hinzugenommen. Cauchy lässt dieselben „absorbirt“ werden, und Green gibt ihnen eine „unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit.“[1])

Die von Cauchy ohne specielle Begründung veröffentlichten Formeln sind bald nachher von Beer und Eisenlohr in gänzlich verschiedener Weise abgeleitet worden. Da die Behandlungsweise Beer's etwas umständlich, die Eisenlohr's dagegen möglichst concis ausfiel, so hat seitdem die Mehrzahl der Physiker sich auch mit dem von Eisenlohr eingehaltenen Standpunkte, d. h. mit einfacher Complexsetzung ursprünglich in reeller Form vorliegender Grössen begnügt, ohne sich mit Beer die weitere Frage vorzulegen, wie denn die betreffenden Ausdrücke ohne Hinzuziehung des Complexen direct aus den allgemein zulässigen Prämissen und insbesondere den Uebergangsbedingungen abgeleitet werden können. Andererseits sind auch die Beer'schen Arbeiten keineswegs ganz befriedigend. In der Absicht, Cauchy's Formeln, die er für unangreifbar hielt, einfach theoretisch zu reproduciren, nahm er gewisse Aufstellungen desselben, beispielsweise die von Cauchy behaupteten Werthe der Extinctionsindices, unvermittelt in seine Rechnungen hinüber und benahm ihnen dadurch die Einheit und Strenge. Ebenso sind seine Annahmen in Bezug auf die Lichtbewegung in Metallen nicht durchweg richtig. Charakteristisch ist die Beer'sche Auffassung der verschwindenden Strahlen Cauchy's und Green's. Beer definirt dieselben als Strahlen, deren Rolle darin bestehe, als Hülfsbewegung die Bewegung des ersten Mittels in die des zweiten zu vermitteln[2]), und nimmt sie daher consequenter Weise sowohl für einfallende Schwingungen senkrecht als parallel

1) So Lundquist (Pogg. Ann. CLII. p. 195) und die meisten übrigen Autoren mit Ausnahme Beer's.

2) Pogg. Ann. XCII. p. 405.

zur Einfallsebene in Anspruch. Erst in einem späteren Aufsatz werden dieselben für den ersteren Fall als überflüssig bei Seite gelassen, und damit schrumpfen denn die verschwindenden Strahlen zu blossen longitudinalen zusammen.

Während Beer seitens der absorbirten Wellen neben dem Moment des Abnehmens der Amplitude bei Entfernung von der Trennungsfläche auch das andere nicht minder wichtige der longitudinal-elliptischen Schwingungsbewegung hervorhebt, hat man sich zur Zeit wohl ganz daran gewöhnt, die mit der Abnahme der Amplitude gleichzeitig erfolgende ungleiche Phasenänderung der Schwingungscomponenten neben jener zu übersehen oder gar eine Bewegung in longitudinalen Ellipsen als mit der Incompressibilität des Aethers unvereinbar zu erachten. Und doch besteht zwischen transversalen und longitudinalen Schwingungen der nämliche charakteristische Unterschied, mag man ihnen einen reellen oder complexen Brechungsexponenten zulegen, resp. sie als linear oder als longitudinal-elliptisch nehmen, der nämlich, dass für die ersteren die Dilatation:

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\xi}{dx},$$

für die letzteren die Winkelverschiebung:

$$\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}$$

verschwindet. Dabei ist bemerkenswerth, dass gerade der Green'sche verschwindende Strahl den Uebergang bildet von der einen zur anderen Form, sofern nämlich für ihn vorstehende Ausdrücke beide zu Null werden.

Auch der Verfasser dieses Aufsatzes hat sich bisher mit dem Cauchy-Eisenlohr'schen Standpunkte insofern begnügt, als es ihm für absorbirende Mittel nicht gelingen wollte, den (II) Hauptfall parallel zur Einfallsebene einfallender Schwingungen ohne Zuhülfeziehen des Complexen

zu erledigen. Derselbe möchte jetzt seine frühere Arbeit[1]) in dieser Richtung vervollständigen und dadurch etwa entstandene Missverständnisse beseitigen.

Wenn wir zu dem Ende die Gesetze der Total- und Metallreflexion direct entwickeln und sodann zur Theorie beliebiger innerer Reflexionen in absorbirenden Mitteln sowie zur Reflexion an Krystallen fortzuschreiten suchen, so beharren wir unverrückt bei unserer bisherigen Annahme der Incompressibilität des Aethers. Auch halten wir aus Gründen, die weiter unten (Abschnitt VI) besprochen werden sollen, die Hinzuziehung der an sich zulässigen Green'schen Strahlen für mindestens überflüssig.

Dies vorausgesetzt, haben wir bei Beibehaltung des früheren Coordinatensystems (die positive Z-Axe sei das äussere Einfallsloth), sowie der bisherigen Bezeichnungen zunächst die drei Grenzgleichungen der Drehungscomponenten (Deformationen):

$$(1)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)_2 \\ \left(\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\eta}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\eta}{dz}\right)_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)_1 &= \left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)_2 \text{[2]}. \end{aligned}$$

Die letzte derselben setzen wir an die Stelle der früheren Continuitätsgleichung des I. Hauptfalles. So gute Dienste nämlich das Continuitätsprincip auch in allen bisher behandelten Fällen geleistet hat, so sind wir trotzdem zu der Ansicht gelangt, dass dasselbe nicht als allgemein gültiger Grundsatz betrachtet werden darf (vgl. unter Abschn. IV). In Uebereinstimmung hiermit schreiben wir fortan die nothwendige vierte Gleichung:

---

1) Wied. Ann. I. p. 225.

2) l. c. p. 206. Streng genommen sollten hier wie vorhin die beiden Glieder derselben Seite mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden. Ihre bisherige Benennung „Deformation" ist daher zweideutig. Vergl. z. B. Kirchhoff, Math. Physik p. 108 — Klein, Elasticität, Akustik und Optik p. 160.

(2a) $$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2,$$

sofern wir statt der Ausschläge ξ die bezügliche lineare Dilatation $\frac{d\xi}{dx}$ einführen.[1])

Vermöge unserer Voraussetzung der Incompressibilität des Aethers müssen dann die beiden Beziehungen:

(2) $$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2$$
$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_2$$

zu identischen Resultaten führen, sie lassen sich folglich zur Ermittelung der Attribute der longitudinal-elliptischen Schwingungsbewegung verwerthen.

Ein ganz ähnliches, mit einander verträgliches System von Bedingungen ist schliesslich das folgende:

---

1) Schreibt man die Gleichungen der von mir sogenannten virtuellen Bewegung in doppeltbrechenden Mitteln:

$$\xi^S = A'_x \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda}\right)$$
$$\eta^S = A'_y \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda}\right)$$
$$\zeta^S = A'_z \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{zp + \chi \sin e}{\lambda}\right),$$

wo $p = n \cos r$, $\sin e = n \sin r$ und r den Brechungswinkel der Normalen bedeutet, und worin endlich $\left(A' = \frac{A}{\cos \Delta}\right)$:

$$A'_x = A' \cos U = A(\cos r \cos \vartheta + \operatorname{tg} \Delta \sin r)$$
$$A'_y = A' \cos V = -A \sin \vartheta$$
$$A'_z = A' \cos W = -A(\sin r \cos \vartheta - \operatorname{tg} \Delta \cos r),$$

so gilt offenbar auch für diese Mittel mit gleichem Rechte:

$$\left(\frac{d\xi^S}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi^S}{dx}\right)_2, \text{ wie früher p. 225: } \left(\frac{d\xi^S}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\xi^S}{dt}\right)_2.$$

Dies zur Berichtigung der dort p. 213 geäusserten Meinung.

$$(3)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)_1 &= \left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)_2, \\ \left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)_1 &= \left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_2. \end{aligned}$$

in welchem nämlich die Deformationsgleichung mit der aus unserem Princip der Gleichheit der Kraft senkrecht zur Oberfläche[1]) resultirenden combinirt ist. Auch diese letzteren Beziehungen dienen ebenso zur gegenseitigen Controle.

Fortan stellen wir den bisherigen zweiten Hauptfall, sofern er zu umfassenderen Schlüssen berechtigt, dem anderen voran.

I. Die Totalreflexion.

Wir nehmen an, das Licht falle im Innern eines ponderablen Mittels unter einem Einfallswinkel, welcher grösser ist als der Grenzwinkel $\left(\sin e > \frac{1}{n}\right)$, auf die Trennungsfläche von Mittel und Weltäther.

A. Für Schwingungen parallel der Einfallsebene supponiren wir dann die folgenden Ausschläge, resp. Ausschlagscomponenten:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varrho_E &= \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{z\cos e + x\sin e}{\lambda'}\right), \\ \varrho_R &= \Re\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{-z\cos e + x\sin e}{\lambda'}\right)-\pi-\chi_R\right], \\ \zeta_D &= D_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}kz}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{l}\right)-\chi_z\right], \\ \xi_D &= D_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}kz}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{l}\right)-\chi_x\right]. \end{aligned}$$

Die gebrochene Welle würde sich sonach als ein eigenthümlicher Schwingungszustand darstellen, welcher der

1) l. c. p. 211.

spiegelnden Fläche parallel, periodisch ist in Bezug auf eine Strecke l, für die offenbar $l = \frac{\lambda'}{\sin e}$, also:

$$\frac{1}{l} = \frac{\sin e}{\lambda'} = \frac{n \sin e}{\lambda}, \tag{5a}$$

und welcher bei Entfernung von der Trennungsfläche vermöge des noch zu bestimmenden Extinctionscoëfficienten k mehr oder minder rasch abnimmt. Den Beweis der Möglichkeit solcher Schwingungen werden wir weiter unten erbringen.

Setzt man diese Werthe zunächst in die Grenzgleichungen (2), so kommt für $z = 0$:

$$\sin\varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_x}{\cos e} \sin(\varphi - \chi_x)$$
$$= -\frac{D_z}{\cos e} \cdot \frac{k}{n \sin e} \cos(\varphi - \chi_z).$$

Die Grenzgleichung (3a) gibt:

$$\sin\varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) = D_x \sin e \sin(\varphi - \chi_z) - D_x \frac{k}{n} \cos(\varphi - \chi_x)$$

und Grenzgleichung (3b):

$$\cos\varphi - \Re \cos(\varphi - \chi_R) = D_z \sin e \cos(\varphi - \chi_z) - D_z \frac{k^2}{n^2 \sin e} \cos(\varphi - \chi_z).$$

Da diese Gleichungen für beliebige t und x, also für beliebige φ erfüllt sind, so darf man in allen oder auch in einzelnen φ durch $\varphi - 90^0$, d. h. $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $-\cos\varphi$ ersetzen.

In Rücksicht hierauf werden dieselben zu je zweien identisch, sobald die gemeinschaftliche Bedingungsgleichung erfüllt ist:

$$D_x n \sin e \cos(\varphi - \chi_x) = D_z k \sin(\varphi - \chi_z).$$

Dieselbe zerfällt in die beiden folgenden:

$$\operatorname{tg}\chi_x = -\operatorname{ctg}\chi_z, \qquad \chi_x = \chi_z - 90^0,$$
$$D_x n \sin e = D_z k. \tag{5b}$$

Da die Phasendifferenz $\chi_z - \chi_x = \frac{\pi}{2}$, so ist demnach

die entstehende longitudinal-elliptische Bewegung eine solche, dass die Axen der Ellipsen in die Richtung der Coordinatenaxen fallen. Vermöchte man diese Bewegung zu restauriren, d. h. durch Zufügung eines neuen Phasenunterschiedes $\frac{\pi}{2}$ in lineare Schwingungen überzuführen, so hätte man für die Amplitude $\mathfrak{D}$ und das Azimuth $\mathfrak{r}$ der restaurirten Schwingung:

$$D_x = \mathfrak{D} \sin \mathfrak{r}, \qquad D_z = \mathfrak{D} \cos \mathfrak{r},$$

folglich:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{r} = \frac{n \sin e}{k},$$

(6)

$$\sin \mathfrak{r} = \frac{n \sin e}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}}, \quad \cos \mathfrak{r} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}}.$$

Das Quadrat dieser Amplitude $\mathfrak{D}$ misst zugleich die lebendige Kraft, welche während der Zeiteinheit in einem der Trennungsfläche unmittelbar anliegenden, unendlich klein gedachten Aethervolum für die elliptische Bewegung beansprucht wird.

Setzt man vorstehende Werthe in die Uebergangsbedingungen ein, so schreiben sich dieselben beispielsweise auch so:

(7)

$$\sin \varphi + \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) = -\frac{\mathfrak{D}}{\cos e} \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}} \cos(\varphi - \chi_z),$$

$$\sin \varphi - \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) = \frac{\mathfrak{D}}{n} \frac{(n^2 \sin^2 e - k^2)}{\sqrt{k^2 + n^2 \sin^2 e}} \sin(\varphi - \chi_z).$$

Und wenn man sie multiplicirt, so repräsentirt das Produkt:

$$\sin^2 \varphi - \mathfrak{R}^2 \sin^2(\varphi - \chi_R) = -\frac{\mathfrak{D}^2}{k^2 + n^2 \sin^2 e} \frac{k(n^2 \sin^2 e - k^2)}{n \cos e} \sin(\varphi - \chi_z) \cos(\varphi -$$

diejenige lebendige Kraft, welche in jedem Augenblicke seitens eines unendlich kleinen äquivalenten Volumens im ersten Mittel der Trennungsfläche zugeführt wird. Bei Integration derselben in Beziehung auf t und für die Zeiteinheit erhält man:

(8)

$$1 - \mathfrak{R}^2 = 0,$$

d. h. die totale lebendige Kraft der gebrochenen Welle ist Null, folglich die der reflectirten der der einfallenden gleich. Es wird daher während einer gewissen Zeit, während welcher die augenblickliche lebendige Kraft der einfallenden Welle die der gespiegelten übertrifft, den Aethertheilchen des zweiten Mittels Energie zugeführt, aber während der übrigen Zeit wieder entzogen, um den mittlerweile entstandenen negativen Ueberschuss zum Ausgleich zu bringen.

Noch erübrigt die Ermittelung des Extinctionscoëfficienten k. Zu dem Ende hat man auf die für den Aether geltende allgemeine Differentialgleichung:

$$\text{I.}\quad m\left(\mathfrak{A}_x\frac{d^2\xi}{dt^2}+\mathfrak{A}_z\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=(e)\left\{\mathfrak{A}_x\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{d^2\xi}{dx^2}\right)+\mathfrak{A}_z\left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)\right\}^{1)}$$

zurückzugehen und darin die Integralausdrücke:

$$\text{II.}\quad \begin{aligned}\zeta &= \mathfrak{A}_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}kz}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+x\frac{n\sin e}{\lambda}\right)-\chi_z\right],\\ \xi &= -\mathfrak{A}_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}kz}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+x\frac{n\sin e}{\lambda}\right)-\chi_x\right]\end{aligned}$$

zu substituiren. So erhält man als Bedingungsgleichung:

$$\left[\frac{m}{T^2}-\frac{(e)}{\lambda^2}(n^2\sin^2 e-k^2)\right]\left[\mathfrak{A}_x{}^2\sin(\varphi-\chi_z)-\mathfrak{A}_z{}^2\cos(\varphi-\chi_z)\right]=0.$$

Dieselbe verlangt offenbar das Verschwinden des ersten Factors, und daher wird wegen $\frac{(e)}{v^2}=m$:

$$\text{III.}\quad \begin{aligned}&1-(n^2\sin^2 e-k^2)=0, \quad \text{d. h.}\\ &k=\sqrt{n^2\sin^2 e-1}.\end{aligned}$$

Hiernach werden die beiden Grenzgleichungen (7), wenn man darin noch abkürzungsweise:

$$\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{k^2+n^2\sin^2 e}}=\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{2n^2\sin^2 e-1}}=D_0$$

1) Es ist die von uns entwickelte Fundamentalgleichung (8a) Pogg. Ann. Ergb. VIII. p. 453), wenn darin die Körpermasse $m'=0$ gesetzt wird.

setzt, übergehen in:

$$\sin\varphi + \Re \sin(\varphi - \chi_R) = -\frac{D_0}{\cos e}\sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}\cos(\varphi - \chi_z),$$

$$\sin\varphi - \Re \sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_0}{n}\sin(\varphi - \chi_z).$$

Um schliesslich die $\Re$, D_0, χ_R, χ_z berechnen zu können, hat man aus ihnen φ zu eliminiren und gewinnt dann die vier ausreichenden Beziehungen:

$$(9)\quad \begin{aligned} 1 + \Re\cos\chi_R &= -\frac{\sqrt{n^2\sin^2 e - 1}}{\cos e} D_0 \sin\chi_z, \\ \Re\sin\chi_R &= +\frac{\sqrt{n^2\sin^2 e - 1}}{\cos e} D_0 \cos\chi_z, \\ 1 - \Re\cos\chi_R &= \frac{1}{n} D_0 \cos\chi_z, \\ -\Re\sin\chi_R &= \frac{1}{n} D_0 \sin\chi_z. \end{aligned}$$

Diese letzteren lassen sich zu je zweien noch rückwärts in die symbolischen Formen zusammenfassen:

$$1+\Re(\cos\chi_R+\sqrt{-1}\sin\chi_R)=D_0(\cos\chi_z+\sqrt{-1}\sin\chi_z)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2 e}}{\cos e},$$

$$1-\Re(\cos\chi_R+\sqrt{-1}\sin\chi_R)=D_0(\cos\chi_z+\sqrt{-1}\sin\chi_z)\frac{1}{n}$$

oder kürzer, wenn man zugleich statt des absoluten Brechungsindex n den reciproken relativen $\mathfrak{n} = \frac{1}{n}$ einführt und $\frac{\sin e}{\mathfrak{n}} = \sin r$ schreibt:

$$(10)\quad \begin{aligned} 1 + \Re &= D\frac{\cos r}{\cos e}, \\ 1 - \Re &= D\mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Wir haben so also mit den Fresnel'schen Grenzgleichungen zugleich den Beweis der Richtigkeit seiner Regeln gewonnen.

B. Stehen die einfallenden Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so sind die drei in Betracht kommenden Schwingungen folgende:

$$\eta = \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z\cos e + x\sin e}{\lambda'}\right),$$

$$\eta_R = \mathfrak{R}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{-z\cos e + x\sin e}{\lambda'}\right) - \chi_R\right], \tag{11}$$

$$\eta_D = D_y\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}kz}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda'}\right) - \chi_y\right].$$

Demnach erhält man mittelst der beiden letzten der Deformationsbedingungen 1 für $z = 0$:

$$\sin\varphi + \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) = D_y\sin(\varphi - \chi_y).$$
$$\sin\varphi - \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_y}{\cos e}\frac{k}{n}\cos(\varphi - \chi_y). \tag{12}$$

Multiplicirt man dieselben, so hat man wieder den bald positiven, bald negativen Ueberschuss der augenblicklichen lebendigen Kraft der einfallenden Wellenbewegung über die der reflectirten. Das auf die Zeiteinheit ausgedehnte Integral desselben liefert daher auch hier die Beziehung:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = 0.$$

Um den Extinctionscoëfficienten k zu erhalten, genügt es, den Ausdruck für η_D in die einfache Gleichung:

$$\text{IV.} \qquad m\,\mathfrak{A}_y\frac{d^2\eta}{dt^2} = (e)\,\mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2}\right)$$

einzusetzen. Es kommt dann unmittelbar:

$$k = \sqrt{n^2\sin^2 e - 1}.$$

Hiernach erübrigt wieder nur aus den Gl. (12) φ zu eliminiren. Man erhält so:

$$1 + \mathfrak{R}\cos\chi_R = D_y\cos\chi_y,$$
$$\mathfrak{R}\sin\chi_R = D_y\sin\chi_y,$$
$$1 - \mathfrak{R}\cos\chi_R = \frac{D_y}{\cos e}\frac{\sqrt{n^2\sin^2 e - 1}}{n}\sin\chi_y, \tag{13}$$
$$\mathfrak{R}\sin\chi_R = \frac{\sqrt{n^2\sin^2 e - 1}}{n\cos e}D_y\cos\chi_y.$$

oder kürzer in der Fresnel'schen Form:

$$(14)\qquad \begin{aligned} 1 + \mathfrak{R} &= D \\ 1 - \mathfrak{R} &= D\,\frac{\mathfrak{n}\cos r}{\cos e}. \end{aligned}$$

Für den allgemeineren Fall endlich, dass das Schwingungsazimuth der einfallenden Welle ein beliebiges ist, treten insbesondere für die gebrochene streifende Welle die drei Coordinaten ξ_D, η_D, ζ_D gleichzeitig auf und constituiren zusammen eine im Raume vor sich gehende Bewegung, auf deren nähere Untersuchung hier indess verzichtet werden soll.

Wurde bisher der Weltäther als zweites Mittel angenommen, so werden die gewonnenen Beziehungen auch dann noch gelten, wenn die Constitution des zweiten Mittels der des ersten ähnlich ist. Nur ist alsdann der Absorptionscoëfficient k' desselben besonders zu bestimmen. Begnügt man sich mit den einfachen Verhältnissen des I. Hauptfalles, so führen die Gleichungen:

$$\text{V.}\qquad m\mathfrak{A}_y\frac{d^2\eta}{dt^2} + m'\mathfrak{A}_y'\frac{d^2\eta'}{dt^2} = (e)\,\mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2}\right),$$

$$\text{VI.}\qquad \begin{aligned} \eta_D &= \mathfrak{A}_y\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}k'z}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda_1}\right) - \chi_y\right], \\ \eta_D' &= \mathfrak{A}_y'\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}k'z}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda_1}\right) - \chi_y\right], \end{aligned}$$

in welchen kein Phasenunterschied zwischen Aether- und Körpertheilchen vorausgesetzt ist, sofort zum Ziele. Man erhält nämlich, wenn man das absolute Brechungsverhältniss des zweiten Mittels mit n_2 bezeichnet:

$$1 + \frac{m'\mathfrak{A}_y'^2}{m\mathfrak{A}_y^2} = n_2^2 = n_1^2\sin^2 e - k'^2,$$

$$k' = \sqrt{n_1^2\sin^2 e - n_2^2}.$$

Setzt man schliesslich $k' = n_2 k$ und das relative Brechungsverhältniss $\frac{n_1}{n_2} = n$, so wird der Exponentialfactor des streifenden Strahles:

VII. $$e^{\frac{2\pi}{\lambda} k' z} = e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} kz} = e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} \sqrt{n^2 \sin^2 e - 1}\, . z},$$

wo λ_2 die Wellenlänge im zweiten Mittel bedeutet.

Diese hier zum ersten Male gegebene Ableitung des Cauchy'schen Extinctionscoëfficienten bestätigt so in überraschender Weise die Richtigkeit unseres dazu benutzten I. dioptrischen Grundgesetzes.

II. Die Metallreflexion.

Wir behandeln hier zunächst die Vorgänge an der Vorderfläche eines im Weltäther befindlichen absorbirenden Mittels.

A. Bei Schwingungen parallel der Einfallsebene gelten die Gleichungen:

$$\varrho = \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z \cos e + x \sin e}{v}\right),$$

$$\varrho_R = \mathfrak{R} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{-z \cos e + x \sin e}{v}\right) - \pi - \chi_R\right],$$

(15)

$$\zeta_D = D_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x \sin e}{v}\right) - \chi_z\right],$$

$$\xi_D = D_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x \sin e}{v}\right) - \chi_x\right],$$

wo wie früher: $p = v \cos r$, $\sin e = v \sin r$ bedeutet, so dass: $v^2 = p^2 + \sin^2 e$.

Die Grenzgleichungen (2) geben dann:

$$\sin \varphi + \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_x}{\cos e} \sin(\varphi - \chi_x)$$

$$= \frac{D_z}{\sin e \cos e} [p \sin(\varphi - \chi_z) - q \cos(\varphi - \chi_z)].$$

Und setzt man:

$$\chi_x = \chi_z + \beta,$$

sowie zur Abkürzung $\varphi - \chi_z = \varphi'$, so schreibt sich die Bedingungsgleichung:

$$D_x \sin e \sin(\varphi' - \beta) = D_z (p \sin \varphi' - q \cos \varphi').$$

Man leitet daraus ab:

$$(17) \qquad D_z = D_x \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{q}{p},$$

so dass man der früheren Bezeichnung zufolge hat:

$$\beta = \varepsilon + u = \operatorname{arc\,tg} \frac{q}{p}.$$

Die beiden Grenzgleichungen (3) endlich erhalten die Form:

$$\sin \varphi - \mathfrak{R} \sin(\varphi - \chi_R) = D_z \sin e \sin(\varphi - \chi_z) + D_x [p \sin(\varphi - \chi_x) - q \cos(\varphi - \chi_x)],$$

$$\cos \varphi - \mathfrak{R} \cos(\varphi - \chi_R) = \frac{D_z}{\sin e} [p^2 - q^2 + \sin^2 e) \cos(\varphi - \chi_z) + 2pq \sin(\varphi - \chi_z$$

Sie werden mit einander identisch, sobald man in der zweiten φ durch $\varphi - 90^0$ ersetzt und entsprechend den Beziehungen (16) die Werthe:

$$D_z = D_x \frac{\sin e}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \sin \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + p^2}}$$

in dieselben einführt.

Die Aethertheilchen der gebrochenen Welle beschreiben sonach vermöge der Phasendifferenz $\chi_x - \chi_z = \beta$ ihrer Componenten longitudinale Ellipsen. Denkt man sich dieselben zu linearen Schwingungen restaurirt, so würden diese letzteren unter einem Azimuth $\mathfrak{r}$ eine Amplitude $\mathfrak{D}$ erhalten, für welche man hat:

$$(18) \qquad D_x = \mathfrak{D} \cos \mathfrak{r}, \qquad D_z = \mathfrak{D} \sin \mathfrak{r},$$

$$\cos \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\nu^2 + q^2}}, \qquad \sin \mathfrak{r} = \frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2 + q^2}}.$$

Bei Einführung dieser Werthe schreiben sich dann die Componenten der Ausschläge:

$$\zeta_D = \mathfrak{D}\frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2+q^2}} e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{zp+x\sin e}{v}\right)-\chi_z\right]$$

(19)

$$\xi_D = \mathfrak{D}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}} e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{zp+x\sin e}{v}\right)-\chi_z-(\varepsilon+u)\right].$$

Und addirt man die Quadrate ihrer beiden Amplituden, so bildet folglich $\mathfrak{D}^2 e^{\frac{4\pi}{\lambda}qz}$ das Maass für die während der Zeiteinheit in der unendlich kleinen Volumeneinheit entwickelte Energie.

Auch in den Grenzgleichungen lässt sich jetzt alles in $\mathfrak{D}$ und χ_z ausdrücken. Man erhält zunächst das System:

$$\sin\varphi - \mathfrak{R}\sin(\varphi-\chi_R) = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\nu^2+q^2}\cos e}[p\sin(\varphi-\chi_z) - q\cos(\varphi-\chi_z)]$$

(20)

$$\sin\varphi + \mathfrak{R}\sin(\varphi-\chi_R) = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\nu^2+q^2}}[(a^2-b^2)\sin(\varphi-\chi_z) - 2ab\cos(\varphi-\chi_z)],$$

wofern nämlich wie früher gesetzt wird:

$$p^2-q^2+\sin^2 e = a^2-b^2, \qquad pq = ab. \tag{21}$$

Schreibt man ferner:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b}{a},$$

woraus:

$$\cos\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos 2\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \qquad \sin 2\varepsilon = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \tag{22}$$

so gewinnt man die kürzere Form:

$$\sin\varphi + \mathfrak{R}\sin(\varphi-\chi_R) = \frac{\mathfrak{D}}{\cos e}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}}\sin(\varphi-\chi_z-\varepsilon-u)$$

(20b)

$$\sin\varphi - \mathfrak{R}\sin(\varphi-\chi_R) = \mathfrak{D}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{\nu^2+q^2}}\sin(\varphi-\chi_z-2\varepsilon).$$

Wir wollen darin:

$$\chi_z + \varepsilon = X$$

setzen und zur Gewinnung der Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte ihr Product bilden. Schreibt man die rechte Seite desselben so:

$$\frac{\mathfrak{D}^2}{\cos e}\,\frac{(a^2+b^2)\sqrt{p^2+q^2}}{\nu^2+q^2}\sin(\varphi - X - u)\sin(\varphi - X - u - (\varepsilon - u))$$

und beachtet man noch, dass vermöge der Beziehungen (16), (21) und (22):

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}[(\varepsilon+u)-\varepsilon] = \frac{aq-pb}{ap+qb} = \frac{d}{c},$$

$$\operatorname{tg}(\varepsilon - u) = \frac{2abp-(a^2-b^2)q}{2abq+(a^2-b^2)p} = \frac{q}{p}\,\frac{p^2+q^2-\sin^2 e}{p^2+q^2+\sin^2 e},$$

(23)

$$\cos(\varepsilon - u) = \frac{\nu^2+q^2}{a^2+b^2}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

so erhält die bezügliche Gleichung die Gestalt:

$$\sin^2\varphi - \mathfrak{R}^2\sin^2(\varphi-\chi_R) =$$

$$\mathfrak{D}^2\frac{p}{\cos e}\left[\sin^2(\varphi - X - u) - \frac{q}{p}\,\frac{p^2+q^2-\sin^2 e}{p^2+q^2+\sin^2 e}\sin(\varphi - X - u)\cos(\varphi - X - u)\right]$$

Oder auch, sofern: $\chi_z = X - \varepsilon = \chi_x - \varepsilon - u$, folglich:

$$\chi_x = X + u$$

ist, und ausserdem die äquivalenten Volumina:

$$M : M_D = \sin e \cos e : \sin r \cos r$$

eingeführt werden:

(24)

$$M[\sin^2\varphi - \mathfrak{R}^2\sin^2(\varphi-\chi_R)] =$$

$$M_D\mathfrak{D}^2\nu^2[\sin^2(\varphi-\chi_x) - \operatorname{tg}(\chi_x-\chi_z)\cos 2\mathfrak{r}\sin(\varphi-\chi_x)\cos(\varphi-\chi_x)].$$

Analog dem Vorgange bei der Totalreflexion ist hier der Ueberschuss der augenblicklichen lebendigen Kraft der einfallenden Welle über die der reflectirten nicht blos von einem nach T, sondern auch von einem nach $^1/_2\,T$ periodischen Gliede abhängig. Integrirt man daher für die Zeiteinheit nach t, so fällt dieses letztere heraus, und so bleibt:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}^2 \frac{p}{\cos e} = \mathfrak{D}^2 \nu^2 \frac{M_D}{M}. \tag{25}$$

Hier repräsentirt der Zähler der rechten Seite die gesammte, auf die Aether- und Körpertheilchen übergeleitete Energie, während wir vorhin $\mathfrak{D}^2$ als die totale Aetherenergie der Volumeneinheit kennen gelernt haben. Wie bei den durchsichtigen Mitteln wird sich daher setzen lassen:

$$\nu^2 - 1 = \frac{M'_D \mathfrak{D}'^2}{M_D \mathfrak{D}^2},$$

wo M'_D und $\mathfrak{D}'^2$ die zugehörige Masse und Energie der Körpertheilchen bedeuten.

Kommen wir zum Zwecke der Berechnung der Amplituden und Phasen nochmals auf die Grenzgleichungen (20) zurück. Wir wollen auch in ihnen $\chi_s = X - \varepsilon$ setzen, ferner statt $\mathfrak{D}$ einen neuen durch die Beziehung:

$$\mathfrak{D}^2 = D_o^2 \frac{\nu^2 + q^2}{a^2 + b^2} \tag{26}$$

charakterisirten Coefficienten D_o einführen und abkürzungsweise schreiben:

$$c = \frac{pa + qb}{a^2 + b^2}, \qquad d = \frac{aq - pb}{a^2 + b^2}. \tag{27}$$

Alsdann erhalten dieselben die Gestalt:

$$\begin{aligned} \sin\varphi - \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) &= D_o[a\sin(\varphi - X) - b\cos(\varphi - X)] \\ \sin\varphi + \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_o}{\cos e}[c\sin(\varphi - X) - d\cos(\varphi - X)]. \end{aligned} \tag{20c}$$

Dies sind aber die nämlichen Gleichungen (32), welche wir im früheren Aufsatze [1]) mittelst des complexen Index $a \pm b\sqrt{-1}$ abgeleitet haben. Auf die weiteren sich daran anknüpfenden Entwickelungen darf daher einfach verwiesen werden. Dieselben bedürfen jedoch in einem Punkte der Rectification.

Es hat nämlich in Gleichung (33a) der oben definirten physikalischen Amplitude $\mathfrak{D}$ gegenüber der Coefficient

1) Wied. Ann. I. p. 234.

$\mathfrak{A}_D (= D_o)$ nur die Bedeutung einer Hülfsgrösse, eine Vermuthung, die ich schon in einer älteren Arbeit ausgesprochen habe, damals aber nicht beweisen konnte. Dem entsprechend tritt jetzt in den Ausdrücken (40a), (40b) (auf p. 239) $\mathfrak{D}^2$ an die Stelle von D_o^2, so dass die Energie der Aethertheilchen wird:

$$J_D = \frac{4\cos^2 e\,(\nu^2+q^2)}{p^2+q^2+2p\cos e\,(\nu^2+q^2)+(a^2+b^2)^2\cos^2 e}$$

(28)

$$= \frac{1}{\nu^2}\,\frac{4\cos^2 e\sin^2 r\,(\nu^2+q^2)}{[\cos^2(e-r)+q^2\operatorname{ctg}^2 e\sin^2 r][\sin^2(e+r)+q^2\sin^2 r]}.$$

Sodann treten zu der einen dortigen Verzögerung $\chi_D (= X)$, deren Bedeutung weiter unten zur Sprache kommt, deren zwei nach den Axen verschiedene, χ_x und χ_z, auf. Für dieselben hat man:

$$\chi_x = X + u, \qquad \chi_z = X - \varepsilon, \tag{29}$$

und mit Benutzung des Ausdruckes (40c):

$$\operatorname{tg}\chi_x = -\frac{q\cos e\,(p^2+q^2-\sin^2 e)}{(p^2+q^2)+p\cos e\,(\nu^2+q^2)} = -\frac{q\cos e\cos 2r}{p\cos e+\cos^2 r}$$

(30)

$$\operatorname{tg}\chi_z = -\frac{q(1+2p\cos e)}{p+(p^2-q^2+\sin^2 e)\cos e}.$$

Für senkrechte Incidenz fällt $\operatorname{tg}\chi_x$ mit dem entsprechenden, für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erhaltenen Ausdruck (36c) zusammen, und für streifende Incidenz wird $\chi_x = 0$.

Andererseits fällt $\operatorname{tg}\chi_z$, welches für $e = 0$, bei welchem Incidenzwinkel die zugehörige Amplitude von ζ_D verschwindet, den Werth erhält:

$$\operatorname{tg}\chi_z^0 = -\frac{b(1+2a)}{a+a^2-b^2},$$

für $e = 90^0$ mit dem für senkrechte Schwingungen geltenden Werthe: $\operatorname{tg}\chi^S = -\frac{q}{p}$ zusammen.

Elegantere Formen erhält man für X, χ_x, χ_z, wenn man die Winkel ε, u einführt. Es wird dann:

$$\operatorname{tg} X_p = -\frac{\sqrt{p^2+q^2}\sin u + \cos e\,(a^2+b^2)\sin \varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2}\cos u + \cos e\,(a^2+b^2)\cos \varepsilon}$$

$$\operatorname{tg} \chi_z = -\frac{\sqrt{p^2+q^2}\sin(\varepsilon+u) + \cos e\,(a^2+b^2)\sin 2\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2}\cos(\varepsilon+u) + \cos e\,(a^2+b^2)\cos 2\varepsilon} \tag{31}$$

$$\operatorname{tg} \chi_x = -\frac{\cos e\,(a^2+b^2)\sin(\varepsilon-u)}{\sqrt{p^2+q^2} + \cos e\,(a^2+b^2)\cos(\varepsilon-u)}.$$

Recht bemerkenswerthe Folgerungen ergeben sich schliesslich für die Definition des Haupteinfallswinkels E und des Hauptazimuthes H. Vermöge der Beziehungen (l. c. 44b) wird:

$$p_E^2 + q_E^2 = \sin^2 E \operatorname{tg}^2 E$$

$$\nu_E^2 + q_E^2 = \operatorname{tg}^2 E$$

und daher zufolge (18) und (29) dieser Abhandlung:

$$\sin \mathfrak{r} = \frac{\sin E}{\sqrt{\nu^2+q^2}} = \cos E$$

$$\cos \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}} = \sin E \tag{32}$$

$$(\chi_x - \chi_z) = 2H.$$

so dass die Schwingungscomponenten die Form erhalten:

$$\zeta = \mathfrak{D}_E \cos E\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_E z} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z p_E + x \sin E}{v}\right) - \chi_z\right]$$

$$\xi = \mathfrak{D}_E \sin E\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_E z} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z p_E + x \sin E}{v}\right) - \chi_z - 2H\right].$$

Man hat daher die folgenden Sätze:

Unterscheidet man allgemein neben dem Brechungswinkel r und Brechungsverhältniss $\nu = \frac{v}{\omega}$ der Wellennormale einen Brechungswinkel $\mathfrak{r}$ und ein Brechungsverhältniss $\mathfrak{n} = \frac{v}{\mathfrak{v}} = \sqrt{\nu^2+q^2}$ der restaurirten linearen Schwingung, so steht insbesondere für die Hauptincidenz:

1) die wiederhergestellte gebrochene Schwin-

gung senkrecht auf der reflectirten Schwingung, ist also:

2) das Brechungsverhältniss n derselben gleich der trigonometrischen Tangente des Haupteinfallswinkels und ist:

3) die durch die gedachte Restauration zu beseitigende Phasenverschiebung zwischen den Componenten gleich dem doppelten Hauptazimuth.

B. Stehen die Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so hat man [1]) neben der einfallenden und reflectirten Schwingung die gebrochene:

$$\eta_D = D_y \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_y\right]$$

und daher weiter zufolge der Uebergangsbedingungen (1):

$$\sin\varphi + \Re\sin(\varphi - \chi_R) = D_y \sin(\varphi - \chi_y)$$

$$\sin\varphi - \Re\sin(\varphi - \chi_R) = \frac{D_y}{\cos e}[p\sin(\varphi - \chi_y) - q\cos(\varphi - \chi_y)] \tag{33}$$

$$\sin^2\varphi - \Re^2\sin^2(\varphi - \chi_R) = D_y^2 \frac{p}{\cos e}[\sin^2(\varphi - \chi_y) - \operatorname{tg}(\chi_x - \chi_z)\sin(\varphi - \chi_y)\cos(\varphi - \chi$$

Endlich nach Integration der letzteren:

$$1 - \Re^2 = \frac{p}{\cos e} D_y^2 = D_y^2 v^2 \frac{M_D}{M}.$$

Für gegenwärtigen I. Hauptfall gelten die l. c. p. 237 bis 238 entwickelten Ausdrücke ohne alle Einschränkung. Insbesondere für χ_y (l. c. Gleichung 36c), das hinfort als X_s bezeichnet werden möge, schreibt sich bei Einführung von ε und u:

$$\operatorname{tg} X_s = -\frac{\sqrt{p^2 + q^2}\sin(\varepsilon + u)}{\cos e + \sqrt{p^2 + q^2}\cos(\varepsilon + u)}. \tag{34}$$

C. Bei einem Azimuth des einfallenden Lichtes von 45° treten in Consequenz der obigen Aenderung an die Stelle der früheren Ausdrücke (43a, 43b) die beiden folgenden:

1) Vgl. l. c. p. 235.

$$\frac{J_p}{J_s} = \frac{\nu^2 + q^2}{(p\cos e + \sin^2 e)^2 + q^2\cos^2 e}$$

(35)

$$= \frac{1}{\nu^2\cos^2(e-r) + q^2\operatorname{ctg}^2 e\sin^2 r}.$$

Dahingegen bedürfen die beiden anderen (43c, 43d) für $d_D = X_p - X_s$ noch einer Erläuterung, welche indess erst später gegeben werden kann. Ausdruck (43c) schreibt sich in ε und u auch so:

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{tg} d_D = -\frac{\sqrt{p^2+q^2}\cos e\sin u - \sin^2 e\sin\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2}\cos e\cos u + \sin^2 e\cos\varepsilon}.$$

III. Die Reflexion an absorbirenden Krystallen.

Bei der eben durchgeführten Untersuchung machten sich insbesondere die Relationen (21) nicht als physikalische Gesetze geltend, sondern sie brachten nur die Grössen p, q, sin e in einen für die Rechnung bequemen Zusammenhang mit zwei anderen Grössen a, b, welche durch sie blos mathematisch definirt sind. Diese Grössen a, b sind aber unseren früheren Arbeiten zufolge als durch das Amplitudenverhältniss und den Phasenunterschied der Körper- und Aethertheilchen ein für allemal gegebene, von der Incidenz unabhängige constante Grössen; sie bilden die sogenannte Charakteristik des Mittels. Sofern übrigens der theoretische Beweis dieses Satzes bisher nur für lineare Schwingungen der Aethertheilchen [1]) geführt ist, so bleibt er jetzt für elliptische nachzuholen.

Das vorausgesetzte Mittel sei der Allgemeinheit wegen anisotrop. Man hat alsdann die Differentialgleichung (die frühere Gleichung (13)):

---

1) In absorbirenden isotropen Mitteln schwingen senkrecht zur Einfallsebene die Körpertheilchen wie die Aethertheilchen linear, in absorbirenden anisotropen Mitteln schwingen bei normaler Incidenz die Körpertheilchen im allgemeinen elliptisch, die Aethertheilchen linear (Pogg. Ann. Egbd. VIII. p. 462—469).

VIII.
$$m\left(\mathfrak{A}_x \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathfrak{A}_y \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + \Sigma m'\left(\mathfrak{A}'_x \frac{d^2\xi'}{dt^2} + \mathfrak{A}'_y \frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)$$
$$= (e)\left\{\mathfrak{A}_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right) + \mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2}\right)\right\},$$

wo wieder blos zur Abkürzung die dritte Coordinate fortgelassen ist. Als ihre Integrale setzen wir jetzt anstatt der früheren zu speciellen Ausdrücke (28) die allgemeineren:

IX.
$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_\xi\right]$$
$$\xi' = \mathfrak{A}'_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_\xi - \Delta_\xi\right]$$
$$\eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_\eta\right]$$
$$\eta' = \mathfrak{A}'_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_\eta - \Delta_\eta\right]$$
$$\zeta = \ldots\ldots, \qquad \zeta' = \ldots\ldots$$

und haben darin q, $\nu\left(= \frac{v}{\omega}\right)$ die gleiche Bedeutung wie dort q, n. Setzt man diese Werthe ein, so kommt zunächst:

$$m\,\mathfrak{A}_x^2 \cos(\varphi - \chi_\xi) + \Sigma m'\,\mathfrak{A}'^2_x \cos(\varphi - \chi_\xi - \Delta_\xi)$$
$$- m\,\mathfrak{A}_x^2[(\nu^2 - q^2)\cos(\varphi - \chi_\xi) + 2pq\sin(\varphi - \chi_\xi)]$$
$$+ m\,\mathfrak{A}_y^2 \cos(\varphi - \chi_\eta) + \Sigma m'\,\mathfrak{A}'^2_y \cos(\varphi - \chi_\eta - \Delta_\eta)$$
$$- m\,\mathfrak{A}_y^2[(\nu^2 - q^2)\cos(\varphi - \chi_\eta) + 2pq\sin(\varphi - \chi_\eta)] = 0.$$

Zu einer erheblichen Vereinfachung dieser Form gelangte man, sobald sich zeigen liesse, dass man schreiben darf:

$$\mathfrak{A}_x^2 \cos(\varphi - \chi_\xi) + \mathfrak{A}_y^2 \cos(\varphi - \chi_\eta) = \mathfrak{A}^2 \cos(\varphi - \chi)$$
$$\mathfrak{A}'^2_x \cos(\varphi - \chi_\xi - \Delta_\xi) + \mathfrak{A}'^2_y \cos(\varphi - \chi_\eta - \Delta_\eta) = \mathfrak{A}'^2 \cos(\varphi - \chi - \Delta)$$
$$\mathfrak{A}_x^2 \sin(\varphi - \chi_\xi) + \mathfrak{A}_y^2 \sin(\varphi - \chi_\eta) = \mathfrak{A}^2 \sin(\varphi - \chi),$$

unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, χ, Δ vier neue Coëfficienten verstanden. In

der That, eliminirt man aus der ersten oder dritten dieser Beziehungen φ, so dass dieselben in die beiden folgenden zerfallen:

$$\mathfrak{A}_x^2 \cos\chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \cos\chi_\eta = \mathfrak{A}^2 \cos\chi,$$
$$\mathfrak{A}_x^2 \sin\chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \sin\chi_\eta = \mathfrak{A}^2 \sin\chi,$$

so finden sich $\mathfrak{A}$ und χ bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}_x^4 + \mathfrak{A}_y^4 + 2\mathfrak{A}_x^2 \mathfrak{A}_y^2 \cos(\chi_\xi - \chi_\eta),$$

Xa.
$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\mathfrak{A}_x^2 \sin\chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \sin\chi_\eta}{\mathfrak{A}_x^2 \cos\chi_\xi + \mathfrak{A}_y^2 \cos\chi_\eta}.$$

Dieselben sind aber stets in eindeutiger und reeller Weise zu erfüllen, welche Werthe man auch den rechts stehenden Amplituden und Anomalien zulegen mag. Das Gleiche gilt von den zugeordneten Grössen:

$$\mathfrak{A}'^4 = \mathfrak{A}_x'^2 + \mathfrak{A}_y'^2 + 2\mathfrak{A}_x'^2 \mathfrak{A}_y'^2 \cos[(\chi_\xi - \chi_\eta) + (\Delta_\xi - \Delta_\eta)]$$

Xb.
$$\operatorname{tg}(\chi + \Delta) = \frac{\mathfrak{A}_x'^2 \sin(\chi_\xi + \Delta_\xi) + \mathfrak{A}_y'^2 \sin(\chi_\eta + \Delta_\eta)}{\mathfrak{A}_x'^2 \cos(\chi_\xi + \Delta_\xi) + \mathfrak{A}_y'^2 \cos(\chi_\eta + \Delta_\eta)}.$$

Und setzt man jetzt noch zur Abkürzung: $\varphi - \chi = \varphi'$, so erhält die allgemeine Bewegungsgleichung die bekannte Gestalt:

$$m\mathfrak{A}^2 \cos\varphi' + \Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos(\varphi' - \Delta) = m\mathfrak{A}^2[(v^2 - q^2)\cos\varphi' + 2pq \sin\varphi'].$$

Ihre Glieder sind nur mehr abhängig von der im nämlichen Augenblick den Aether- und Körpertheilchen zukommenden Energie und von der Phasendifferenz zwischen beiden. Sie charakterisirt daher die betreffende Richtung des Krystalles in absoluter Weise. Man folgert nunmehr:

XI.
$$v^2 - q^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos\Delta}{m\mathfrak{A}^2} = a^2 - b^2 - 1$$
$$pq = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \sin\Delta}{m\mathfrak{A}^2} = ab.$$

Nachdem wir so unser dioptrisches Grundgesetz in allgemeinster Form erwiesen haben, wenden wir uns jetzt zur

Intensitätsbestimmung des an absorbirenden Krystallen gespiegelten und gebrochenen Lichtes.

In Anbetracht der grossen Verwicklung der bezüglichen Verhältnisse beginnen wir mit dem denkbar einfachsten Falle, dass die optische Axe eines einaxigen Krystalles auf der Trennungsfläche senkrecht steht, und dass nur die aussergewöhnliche Brechung zu Stande kommt[1]). Sämmtliche Schwingungen liegen dann in der Einfallsebene.

Von den für isotrope Mittel aufgestellten Uebergangsbedingungen acceptiren wir sofort die beiden Gleichungen (3), sowie die daraus abgeleitete zweite des Systems (20), (20b), (20c) und die daher ebenfalls zutreffende Form der ζ-Componente der Gl. (19). Was dann weiter die zweite nothwendige Grenzgleichung betrifft, so geben wir ihr die Form:

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi'}{dx}\right)_2, \tag{37}$$

verstehen darin unter der linken Seite die Dilatation des ersten Mittels und geben bezüglich der rechten folgende Erläuterung. Wir dürfen nämlich in Einklang mit unseren früheren Entwickelungen[2]) annehmen, dass wir es auch hier mit einem ähnlichen Begriff zu thun haben, freilich nicht mit der wirklichen Dilatation des vorausgesetzten anisotropen Mittels, sondern mit der äquivalenten eines isotrop constituirten Mittels von bestimmter, aber vorläufig noch unbekannter Extinction und Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wir coordiniren daher der thatsächlichen Schwingungscomponente:

$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \chi_x\right]$$

die in gewisser Beziehung stellvertretende, auf die nämliche äussere Welle bezogene:

1) Die ausschliessliche gewöhnliche Brechung bei dieser Lage ist mit den isotropen Mitteln erledigt.

2) Vgl. z. B. Wied. Ann. I. p. 221.

$$\xi' = \mathfrak{A}'_x \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q' z} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z p' + x \sin e}{v}\right) - \chi'_x\right]$$

und bestimmen deren Unbekannte $\mathfrak{A}'_x$, χ'_x; p', q'; a', b' aus drei, jetzt der Reihe nach zu besprechenden Bedingungen.

Zunächst muss die Forderung erfüllt sein, dass bei jeder Verschiebung parallel der X-Axe seitens der Ausschläge ξ und ξ' eine gleiche Spannung entwickelt wird. Man hat daher die auf $z = 0$ zu beziehende Bedingungsgleichung:

$$\left(\frac{d^2\xi'}{dz^2} + \frac{d^2\xi'}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2}\right).$$

Setzt man darin obige Werthe ein, so wird dieselbe in Rücksicht auf die für beide Seiten geltenden Beziehungen 21:

$$\mathfrak{A}'_x[(a'^2 - b'^2)\cos(\varphi - \chi'_x) + 2a'b'\sin(\varphi - \chi'_x)]$$
$$= \mathfrak{A}_x[(a^2 - b^2)\cos(\varphi - \chi_x) + 2ab\sin(\varphi - \chi_x)].$$

Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\mathfrak{A}'_x[\cos\chi'_x(a'^2 - b'^2) - \sin\chi'_x 2a'b'] = \mathfrak{A}_x[\cos\chi_x(a^2 - b^2) - \sin\chi_x 2ab]$$

$$\mathfrak{A}'_x[\sin\chi'_x(a'^2 - b'^2) + \cos\chi'_x 2a'b'] = \mathfrak{A}_x[\sin\chi_x(a^2 - b^2) + \cos\chi_x 2ab]$$

und gibt für die Attribute des Hülfsstrahls die Werthe:

$$\mathfrak{A}'_x \cos\chi'_x = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}\left[\mathfrak{A}_x \cos\chi_x \cos 2(\varepsilon - \varepsilon') - \mathfrak{A}_x \sin\chi_x \sin 2(\varepsilon - \varepsilon')\right]$$

$$-\mathfrak{A}'_x \sin\chi'_x = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}\left[\mathfrak{A}_x \cos\chi_x \sin 2(\varepsilon - \varepsilon') + \mathfrak{A}_x \sin\chi_x \cos 2(\varepsilon - \varepsilon')\right]$$

wo ε, ε' die nämliche Bedeutung haben wie oben. Sonach erhält man für die Componente selbst:

$$\xi' = \mathfrak{A}_x \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q' z} \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2} \cos[\varphi - \chi_x - 2(\varepsilon - \varepsilon')].$$

Was ferner die zweite und dritte Bedingung betrifft, so muss bei senkrechter Incidenz, bei welcher allgemein

die Aetherschwingungen geradlinig werden und zudem für den vorausgesetzten Specialfall die gebrochene Welle durch die Richtung der Axe hindurchgeht, ξ' mit dem bezüglichen ξ der ordinären Welle identisch werden. Entsprechen daher der Richtung der Axe die Bestimmungsstücke: a_2, b_2, ε_2, so wird man zu setzen haben:

$$a' = a_2, \quad b' = b_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon_2,$$

denn dann wird in der That für $e = 0$:

$$\xi_o' = \mathfrak{A}_x \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} b_2 z} \cos(\varphi - \chi_x).$$

Andererseits muss ξ' bei jeder beliebigen Incidenz mit dem ξ der isotropen Mittel zusammenfallen, sobald man setzt: $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Mit Rücksicht hierauf stellen wir nun für die in die Grenzgleichungen unseres anisotropen Mittels einzuführenden Schwingungen die beiden Ausdrücke auf:

$$\zeta_D = \mathfrak{D} \frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z p + x \sin e}{v}\right) - \chi_z\right]$$

(38)

$$\xi_D' = \mathfrak{D} \sqrt{\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}} \, \frac{a^2 + b^2}{a_2^2 + b_2^2} \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q' z} \times$$

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z p' + x \sin e}{v}\right) - \chi_z - (\varepsilon + u) - 2(\varepsilon - \varepsilon_2)\right].$$

Dieselben erlangen dadurch die Form:

$$\sin\varphi + \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) = \frac{\mathfrak{D}}{\cos e} \sqrt{\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}} \, \frac{a^2+b^2}{a_2^2+b_2^2} \sin[\varphi - \chi_z - (\varepsilon+u) - 2(\varepsilon - \varepsilon_2$$

(39)

$$\sin\varphi - \mathfrak{R}\sin(\varphi - \chi_R) = \mathfrak{D} \frac{a^2+b^2}{\sqrt{\nu^2+q^2}} \sin(\varphi - \chi_z - 2\varepsilon).$$

Und integrirt man ihr Product, die Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte, für die Zeiteinheit, so kommt:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{\cos e} \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\nu^2+q^2} \frac{(a^2+b^2)^2}{a_2^2+b_2^2} \cos(\varepsilon + u - 2\varepsilon_2),$$

oder nach bekannter Umformung:

$$1 - \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{D}^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 \frac{p\,(a_2^2 - b_2^2) + 2 a_2 b_2 q}{(p^2 + q^2) \cos e}.$$

Bevor wir weiter die Amplituden und Phasenverschiebungen der gespiegelten und gebrochenen Welle selbst berechnen, wollen wir den Weg andeuten, auf welchem man mit Benutzung des Complexen zum nämlichen Ziele gelangt.

Zufolge unserer früheren Arbeit über die Grenzbedingungen durchsichtiger anisotroper Mittel hat man für Schwingungen parallel der Einfallsebene[1]):

$$\begin{aligned} 1 - R &= Dn \\ 1 + R &= \frac{D}{\cos e} (\cos r \cos \vartheta - \sin r \operatorname{tg} \delta), \end{aligned} \tag{40}$$

wo ϑ den Azimuthwinkel der Schwingungsebene und δ den Winkel zwischen Strahl und Normale bedeutet. Für letzteren hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin \psi \cos \psi, \\ \omega^2 &= \omega_1^2 \sin^2 \psi + \omega_2^2 \cos^2 \psi, \end{aligned} \tag{41}$$

unter ψ die Neigung der Wellennormale zur Axe verstanden.

In unserem Specialfalle ist nun $\vartheta = 0$, $\psi = r$, so dass sich schreibt:

$$\begin{aligned} &\cos r - \sin r \operatorname{tg} \delta = \cos r (1 - \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \delta) \\ &= \cos r \left(1 - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin^2 r \right) = \cos r \, \frac{\omega_2^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Infolge dessen werden die Grenzgleichungen:

$$\begin{aligned} 1 - R &= Dn \\ 1 + R &= D \frac{\cos r}{\cos e} \frac{n^2}{n_2^2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Und geht man zu complexen Brechungsverhältnissen über:

---

1) Wied. Ann. I. p. 220. Gleichungen 13a u. 13b.

$$1 - R = D(a + b\sqrt{-1})$$

$$1 + R = \frac{D}{\cos e}(c + d\sqrt{-1})\,\frac{(a^2 - b^2) + 2ab\sqrt{-1}}{(a_2^2 - b_2^2) + 2a_2 b_2\sqrt{-1}}.$$

Diese letztere Beziehung ist aber materiell die nämliche, die wir oben mittelst der Bedingungsgleichung für den Hülfsstrahl formulirten. Trat dort das Walten bestimmter Elasticitätsgesetze mehr direct in den Vordergrund, so hat das jetzige Verfahren den Vorzug grösserer Bequemlichkeit. Wir wollen es daher auch zur Berechnung der Amplituden und Phasen verwenden.

Bei Einhaltung des gleichen Ganges wie in der früheren Abhandlung[1]) erhält man:

$$R = \frac{\sin e \cos r - n_2^2 \cos e \sin r}{\sin e \cos r + n_2^2 \cos e \sin r}$$

$$= \frac{p - \cos e\,(a_2^2 - b_2^2) + \sqrt{-1}\,(q - 2\,a_2 b_2 \cos e)}{p + (a_2^2 - b_2^2)\cos e + \sqrt{-1}\,(q + 2\,a_2 b_2 \cos e)}.$$

Folglich:

$$= J_R\,\frac{p^2 + q^2 - 2\cos e\,[p\,(a_2^2 - b_2^2) + q\,2a_2 b_2] + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}{p^2 + q^2 + 2\cos e\,[p\,(a_2^2 - b_2^2) + q\,2a_2 b_2] + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}$$

(43)
$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2\cos e\,[p\,(a_2^2 - b_2^2) + q\,2a_2 b_2]}{p^2 + q^2 + (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}$$

$$\operatorname{tg} \chi_R = \frac{2\cos e\,[q\,(a_2^2 - b_2^2) - p\,2a_2 b_2]}{p^2 + q^2 - (a_2^2 + b_2^2)^2 \cos^2 e}.$$

Dieselben gehen sofort in die Cauchy'schen Ausdrücke über, wenn man den Index 2 in a_2, b_2 fallen lässt.

Ebenso für das gebrochene Licht:

$$D = \frac{2 n_2^2 \operatorname{ctg} e \sin^2 r}{\sin e \cos r + n_2^2 \cos e \sin r}$$

$$= \frac{1}{a + b\sqrt{-1}}\,\frac{2\cos e\,(a_2^2 - b_2^2 + \sqrt{-1}\,2a_2 b_2)}{p + (a_2^2 - b_2^2)\cos e + \sqrt{-1}\,(q + 2a_2 b_2 \cos e)}.$$

Hier führt wieder, analog zu früher, die einfache Fresnel'sche Regel zum Quadrate eines Coefficienten D_0, dessen

1) Wied. Ann. I. p. 238.

Beziehung zu $\mathfrak{D}$ in Gl. (26) ausgesprochen ist. Man erhält daher für das Quadrat von $\mathfrak{D}$:

$$(44)\quad J_D = \left(\frac{a_2^2+b_2^2}{a^2+b^2}\right)^2 \frac{4\cos^2 e\,(\nu^2+q^2)}{p^2+q^2+2\cos e\,[p(a_2^2-b_2^2)+q2a_2b_2]+(a_2^2+b_2^2)^2\cos^2 e}.$$

Wenn schon das uns beschäftigende Problem selbst für den behandelten einfachsten Fall der doppeltbrechenden Mittel eine umständliche Durchführung verlangte und ziemlich verwickelte Formeln gab, so wird das in noch höherem Maasse der Fall sein, wenn die optische Axe, die nach wie vor in der Einfallsebene bleiben möge, mit der Richtung des Lothes einen beliebigen Winkel $\mathfrak{L}$ macht.

Wir wollen uns hier blos auf die Hervorhebung beschränken, dass der Grundsatz der Gleichheit der Dilatation allgemein auf ein solches auxiliäres isotropes Mittel zu beziehen ist, welches mit dem gegebenen anisotropen längs der X-Axe die gleiche Spannkraft entwickelt. Zu den endgültigen Formeln gelangt man am leichtesten mittelst Benutzung des Complexen, und zwar ist hier in den Gleichungen (41) für ψ der Werth $\psi = r - \mathfrak{L}$ einzusetzen. Die beiden Schwingungs-Componenten werden so:

$$(45)\quad \begin{aligned} \xi_D &= \mathfrak{D}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \sin\mathfrak{r}\cos(\varphi_1 - \chi_z) \\ \xi'_D &= \mathfrak{D}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q'z} \{\cos\mathfrak{r}\cos(\varphi'_1 - \chi_z - \beta) - (\nu^2+q^2)\sin\mathfrak{r}\times \\ &\quad [U\sin\mathfrak{r}\cos\mathfrak{r}\cos 2\mathfrak{L} - \sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}(V\cos^2\mathfrak{r} - W\sin^2\mathfrak{r})]\}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right), \quad q'_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp' + x\sin e}{v}\right),$$

$$\sin\mathfrak{r} = \frac{\sin e}{\sqrt{\nu^2+q^2}}, \quad \cos\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{\nu^2+q^2}}, \quad \beta = \varepsilon + u.$$

$$U = \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z - \beta + 2\varepsilon_1)}{a_1^2+b_1^2} - \frac{\cos(\varphi'_1 - \chi_z - \beta + 2\varepsilon_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$V = \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z - 2\beta + 2\varepsilon_1)}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z - 2\beta + 2\varepsilon_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$W = \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z + 2\varepsilon_1)}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{\cos(\varphi_1' - \chi_z + 2\varepsilon_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

und wo wieder q' den sich zu p' zuordnenden Absorptionscoefficienten des Hülfsstrahls bedeutet.

Ich schliesse diesen Abschnitt mit einem nochmaligen Hinweis auf die beiden bemerkenswerthen Winkel, die man den Polarisationswinkel und den Hauptwinkel nennt. Erscheint ersterer von jeher sowohl theoretisch wie experimentell an den zweiten Hauptfall, d. h. an Schwingungen parallel zur Einfallsebene gebunden, so ist letzterer zuerst von Cauchy aus dem Zusammenwirken von Schwingungen senkrecht und parallel zur Einfallsebene abgeleitet, und ebenso vermag man seine Lage nur mit Beihülfe beider aufzufinden. Die p. 101 gegebene Deduction knüpft nun diesen Haupteinfallswinkel gleichfalls an Schwingungen, die in der Einfallsebene liegen.

Beide Winkel haben ihre Bedeutung sowohl für anisotrope wie für isotrope Mittel, für erstere indess begreiflicher Weise nur dann, wenn die Einfallsebene mit einer der drei sogenannten Hauptebenen zusammenfällt[1]).

Was nun ihre präcise Definition betrifft, so dürfte es sich empfehlen, den Polarisationswinkel durch die Gleichheit der äquivalenten Volumina auf dem gespiegelten und gebrochenen Strahle ($M_R = M_D$), den Hauptwinkel dagegen durch die Senkrechtheit der Schwingungen beider zu charakterisiren. Die

---

1) Das Neumann-Seebeck'sche Theorem über die Lage des Polarisationswinkels der extraordinären Welle eines einaxigen Krystalles spricht sich aus durch die Gleichung:

$$\sin^2 \varrho = \frac{1 - \omega_1^2}{1 - \omega_1^2 \omega_2^2} \sin^2 \Omega + \frac{1 - \omega_2^2}{1 - \omega_1^2 \omega_2^2} \cos^2 \Omega.$$

Ueber dessen Ableitung vergl. z. B. Astr. Undulationsth. p. 237, Radicke's Optik. I. p. 257.

erstere Bedingung, die sich für durchsichtige anisotrope Mittel durch die Gleichungen ausspricht:

$$\sigma \cos r' = v \cos e$$
$$m(1 - R^2 - D^2) = m' D'^2,$$

unter r' und $\frac{v}{\sigma} = n'$ den Brechungswinkel und Brechungsindex des „Strahles" verstanden, schliesst zugleich ein vollständiges Verschwinden (für absorbirende Mittel eine blosse Schwächung) der Intensität des reflektirten Strahles in sich ein. Die letztere dagegen ist identisch mit dem Brewsterschen Gesetz, d. h. mit der Gleichung:

$$n = \operatorname{tg} e,$$

unter n den Brechungsindex der „Wellennormale" verstanden.

Beide Definitionen fallen für durchsichtige isotrope Mittel in eine zusammen.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

VII. *Ueber Fluorescenz; von E. Lommel.*

(Sitzungsber. der physik.-medic. Societät zu Erlangen. 23. Juli 1877, vom Herrn Verf. mitgetheilt.)

In der Sitzung der Erlanger Societät vom 17. Juli vorigen Jahres[1]) habe ich einige bis dahin noch nicht untersuchte fluorescirende Substanzen beschrieben, welche mit dem Naphthalinroth und Chlorophyll die Eigenschaft theilen, dass bei ihnen auch brechbarere Strahlen ihres Fluorescenzlichtes durch weniger brechbare des erregenden Lichtes hervorgerufen werden. Nachdem ich bei dieser Untersuchung die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass die bisherige Verkennung dieses namentlich beim Naphthalinroth so schlagend her-

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 514.

vortretenden Sachverhaltes in gewissen Mängeln der früher angewandten Beobachtungsmethoden ihren Grund hat, eine Ueberzeugung, welche ich in der Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichtes“ [1]) eingehender begründete, lag die Vermuthung nahe, dass auch unter den schon länger bekannten fluorescirenden Substanzen noch manche sich finden mögen, welche ein ähnliches, bisher übersehenes, Verhalten zeigen. Ich habe daher alle fluorescirenden Körper, welche mir zu Gebote standen, nach der (Pogg. Ann. CLIX. p. 520) beschriebenen Methode untersucht. Es ergab sich, dass jene Eigenschaft keineswegs so selten ist, als ich bisher anzunehmen geneigt war; dass sämmtliche von mir untersuchte fluorescirende Substanzen sich in die drei Klassen einordnen, welche ich am Schlusse der oben citirten Abhandlung aufgestellt habe; dass endlich diese Klassen auch durch ihr sonstiges optisches Verhalten und namentlich durch ihre Absorptionserscheinungen sich als natürliche Gruppen kennzeichnen. Durch diese Klassificirung, nach welcher ich die von mir untersuchten Körper aufzählen will, wird die Uebersicht über die so ausserordentlich mannichfaltigen Erscheinungen ungemein erleichtert.

I. Klasse. Körper, bei welchen jeder erregungsfähige homogene Lichtstrahl das ganze Fluorescenzspectrum hervorruft: Fluorescenz erster Art.

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichtes.
1. Chlorophyll	28	26—40
2. Naphthalinroth	41	27—60
3. Brasileïn mit Soda	47	29—65
4. Purpurin mit Alaun	47	26—68
5. Safflorcarmin	48	32—69
6. Eosin	50	28—77
7. Purpurin, ätherische Lösung	55	30—75
8. Fluorescëin	59	30—88
9. Uranglas	75	35—86

1) Pogg. Ann. CLX. p. 75.

Innerhalb dieser sowie der folgenden Klassen sind die Substanzen nach dem Beginn der Fluorescenz im projicirten Spectrum, welcher in der zweiten Columne angegeben ist, geordnet, die dritte Columne enthält die Grenzen des Spectrums des Fluorescenzlichtes. Die Zahlen beziehen sich auf die Bunsen'sche Scala.

Das Verhalten des Chlorophylls, Naphthalinroths und Eosins habe ich schon früher besprochen; in Bezug auf die übrigen Stoffe, welche bereits von Hagenbach untersucht worden sind, kann ich mich auf wenige Bemerkungen beschränken.

Unter der Bezeichnung „Brasileïn" oder „oxydirtes Brasilin" erhielt ich von meinem Collegen Hrn. Prof. Hilger eine graue krystallinische, durch Einwirkung von Jod auf Brasilin dargestellte Substanz, deren gelbrothe alkoholische Lösung mit grüngelber Farbe fluorescirt. Diese Fluorescenz gehört der dritten Klasse an und soll daher weiter unten beschrieben werden. Auf Zusatz von Soda wurde die Flüssigkeit dunkelroth, ihre Fluorescenz gelb, und sie erwies sich nun in optischer Hinsicht als identisch mit Hagenbachs „oxydirtem Brasilin".

Die beiden Purpurin-Lösungen habe ich als zwei besondere Substanzen aufgeführt, da sie sich hinsichtlich ihrer Absorption und Fluorescenz wesentlich unterscheiden und daher zu vermuthen ist, dass hier zwei Körper von verschiedener chemischer Constitution vorliegen, in der ätherischen Lösung etwa das Purpurin an sich, in der Alaunlösung eine Verbindung desselben.

Die alkoholische Lösung des Safflorcarmins, welche ich mir verschaffen konnte, fluorescirte selbst nach Zusatz von Essigsäure nur schwach; seine Zugehörigkeit zur I. Klasse wurde gleichwohl mit Sicherheit constatirt.

Durch die Lichtfülle und Ausdehnung, mit welcher das stärker brechbare Fluorescenzlicht bei Erregung mit weniger brechbaren Strahlen auftritt, ist das Fluoresceïn besonders ausgezeichnet und eignet sich daher neben

Naphthalinroth und Eosin ganz besonders zum Nachweis dieser Erscheinung.

Ich war überrascht zu finden, dass auch das schon mehrfach untersuchte Uranglas die Stokes'sche Regel nicht befolgt; die Erscheinung ist hier allerdings, da das fluorescirende Spectrum und dasjenige des Fluorescenzlichtes nur ein schmales Gebiet mit einander gemein haben, weniger auffallend, aber doch ganz unverkennbar.

II. Klasse. Körper, bei welchen jeder erregungsfähige Lichtstrahl nur diejenigen Strahlen des Fluorescenzspectrums hervorruft, welche eine geringere oder höchstens gleichgrosse Brechbarkeit besitzen als er selbst: Fluorescenz zweiter Art.

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichtes.
1. Thiomelansäure	31	30—117
2. Sandarak	34	25—132
3. Kienrussauszug mit Schwefelkohlenstoff	37	33—112
4. Kienrussauszug mit Terpentinöl	49	34—120
5. Kienrussauszug mit Aether	52	35—123
6. Phosphorsäureäther des Thymols	53	25—155
7. Sulfoanthracensäure	63	30—140
8. Diphenylamin	65	36—113
9. Malzzucker	68	29—120
10. Curcumatinctur	69	32— 93
11. Quassiatinctur	71	34—135
12. Stechapfelsamenauszug	79	34—121
13. Morin-Thonerde-Lösung	85	37—106
14. Sandelholzauszug mit Soda	85	29—120
15. Guajak	86	33—150
16. Salpetersaures Uran	87	31— 97
17. Farbloses Glas	89	30—130
18. Anthracen, alkohol. Lösung	90	31—160

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichtes.
19. Schwefelsaures Chinin	109	32—140
20. Petroleum	110	33—149
21. Fraxin	115	32—128
22. Aesculin	116	35—135
23. Sulfochloranthracensäure	136	32—150
24. Bichloranthracen	141	35—158
25. Flusspath	142	32—148

Die Mehrzahl dieser Stoffe wurde bereits von Hagenbach untersucht, mit dessen Beobachtungen die meinigen im wesentlichen übereinstimmen, so dass ich hinsichtlich der Einzelheiten nur auf die bekannte Arbeit dieses Physikers hinzuweisen brauche. Drei davon sind aber neu und sollen zunächst in Kürze beschrieben werden.

Phosphorsäureäther des Thymols erhielt ich von Hrn. Dr. von Gerichten. Die gelbbraune Flüssigkeit, welche, ohne Absorptionsstreifen erkennen zu lassen, den brechbareren Theil des Spectrums absorbirt, fluorescirt sehr stark, im Tageslichte mit grünlichgrauer, im concentrirten Sonnenlichte mit fast weisser Farbe. Das continuirliche Spectrum des Fluorescenzlichtes reicht von 25 bis 155 und besitzt von 30 bis 150 eine fast gleichbleibende Lichtstärke, so dass das Maximum, welches etwa bei 70 liegen mag, schwierig anzugeben ist. Im projicirten Spectrum beginnt die Fluorescenz mit orangegelber Farbe bald hinter *D* (bei 53), welche von *b* an in ein schmutziges Grüngelb, von *F* an in Bräunlichgrün, zwischen *F* und *G* in schmutziges Bläulichgrün allmählich übergeht; von *G* an wird der Farbenton bläulichgrau und bleibt so bis weit ins Ultraviolett. Die Fluorescenz ist stark von *F* bis *H*, am stärksten etwas vor *G*.

Die Sulfoanthracensäure, welche ich Hrn. Prof. Hilger verdanke, stellt eine schwarzbraune Flüssigkeit dar, welche schon im concentrirten Zustande sehr stark graublau fluorescirt. Das Fluorescenzspectrum erstreckt sich von 30 bis 140, zeigt zwei Maxima der Lichtstärke

bei 60 und 105 und dazwischen von 80 bis 90 ein wenig ausgeprägtes Minimum. Wird das Spectrum auf die Flüssigkeit projicirt, so sieht man die Fluorescenz schwach bei 63, deutlich bei *E* beginnen; ihr anfangs zimmtfarbener Ton geht gegen *G* hin in schmutziges Grünlich über; von *G* an wächst die Lichtstärke rasch und erreicht mit weisslich blauer Farbe ein Maximum ungefähr bei 145; der letztere Farbenton erhält sich von hier an mit abnehmender Intensität noch weit bis ins Ultraviolett. Diesem Verhalten entspricht eine energische Absorption der brechbareren Strahlen, welche, ohne dass ein Absorptionsstreifen wahrnehmbar wäre, bei wachsender Verdünnung immer mehr gegen das violette Ende zurückweicht.

Unter der Bezeichnung Sulfochloranthracensäure erhielt ich von Hrn. Prof. Haas in Stuttgart schon vor mehreren Jahren eine dunkel schwarzbraune Flüssigkeit, welche concentrirt im Tageslichte gar keine, im Sonnenlichte nur eine äusserst schwache Fluorescenz erkennen lässt. Setzt man aber nur einige Tropfen davon einem Liter Wasser zu, so leuchtet die nun fast farblose Flüssigkeit prachtvoll mit gesättigt blauem Fluorescenzlicht, dessen Spectrum, von 32 bis 150 sich erstreckend, die folgenden Maxima und Minima der Lichtstärke aufweist:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Maxima	55	74	93	112	134
Minima		65	85	104	125

Von diesen Maximis ist das IV. am intensivsten, dann folgen der Lichtstärke nach das II., I., III., V. Die Maxima und Minima sind übrigens nicht so scharf ausgeprägt wie beim Bichloranthracen. Im projicirten Spectrum beginnt die Fluorescenz erst bei 136, erreicht etwas vor *H* ihre grösste Intensität, erstreckt sich noch sehr weit ins Ultraviolett und zeigt in ihrer ganzen Ausdehnung einen blauen Farbenton. Entsprechend diesem Verhalten ist eine starke Absorption der brechbareren Strahlen, jedoch kein Absorptionsstreifen wahrzunehmen.

Zu erwähnen ist ferner noch die Fluorescenz des farblosen Glases, aus welchem die im Handel vorkommenden sog. Spiritusflaschen verfertigt sind. Dasselbe fluorescirt im concentrirten Sonnenlichte mit schön hellgrüner Farbe, deren Spectrum von 30—130 reicht, jedoch nur von 35—80 eine ziemlich grosse Lichtstärke mit dem Maximum bei 68 besitzt, von 80 an aber äusserst schwach ist. Im Spectrum beginnt die Fluorescenz schwach bei 89 und erreicht ein Maximum bei *G*. Ist daher die zu beobachtende Flüssigkeit in einer solchen Flasche enthalten, so kann die Fluorescenz der Glaswand erst dann einen Einfluss üben, wenn die erregenden Strahlen brechbarer sind als *F*. In diesem Falle, sowie bei Erregung mit weissem Sonnenlicht, wurde die zu untersuchende Flüssigkeit stets in einen Trog mit Bergkrystallwänden gebracht.

Zu dieser Klasse gehören, nach gewissen weiter unten zur Sprache kommenden Analogien zu schliessen, ohne Zweifel noch folgende von Hagenbach untersuchte Körper, welche mir nicht zu Gebote standen: Salpetersaures Chrysanilin, Amid der Phtalsäure, Extract des Samens von Peganum Harmala, Amid der Terephtalsäure, Griessholzaufguss, Bisulfanthrachinon.

III. Klasse. Körper, deren Fluorescenzspectrum aus zwei Theilen besteht, deren einem die Fluorescenz erster Art, dem andern die Fluorescenz zweiter Art eigen ist: Zusammengesetzte Fluorescenz.

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichtes.
1. Chamaeleïngrün	28	28—42; 49—165
2. Chamaeleïnblau	35	23—45; 45— 60; 60—150
3. Orseille	38	30—54; 54— 83
4. Chamaeleïnroth	40	30—58; 63—120
5. Lacmus	44	32—55; 55— 79
6. Fluoranilin	46	30—64; 64—110
7. Brasileïn	47	29—65; 65— 80

Die fett gedruckten Zahlen geben die Grenzen des Theiles des Fluorescenzspectrums an, welcher der Stokesschen Regel nicht gehorcht. Von diesen Substanzen sind die drei Chamaeleïnfarbstoffe von mir, Orseille, Lackmus und Fluoranilin von Hagenbach bereits früher untersucht worden. Hinsichtlich des Fluoranilins, das ich der Güte des Hrn. Prof. Hilger verdanke, weichen meine Beobachtungen von denjenigen Hagenbach's insofern ab, als ich das Fluorescenzspectrum nach der brechbareren Seite weiter ausgedehnt und mit einem vierten blauen Maximum versehen fand. Es ergaben sich nämlich für das Fluorescenzspectrum folgende Zahlen:

Beginn 30

	I.	II.	III.	IV.
Maxima	43	56	75	97
Minima		50	64	88

Ende 110.

Das Minimum bei 64 bildet die Grenzscheide zwischen den beiden sich verschieden verhaltenden Theilen des Spectrums, von welchen der zweite bei Erregung mit weissem Licht weitaus lichtschwächer ist, als der erste. In diesem Falle ordnen sich die Maxima ihrer Lichtstärke nach in die Reihenfolge II, I, IV, III. Durch blaue und violette Strahlen dagegen wird der zweite Theil des Fluorescenzspectrums stärker erregt als der erste. Den drei Absorptionsstreifen bei 60, 75 und 108, deren erster am schärfsten ausgeprägt ist, entsprechen im projicirten Spectrum drei Maxima der Fluorescenz, wovon das erste das lichtstärkste ist. Die Anfangs gelbe Farbe des fluorescirenden Spectrums verwandelt sich bei 100 plötzlich in Hellgrün, welches bald in Bläulichgrün übergeht und diesen Ton bis ins Ultraviolett beibehält.

Das Fluorescenzspectrum des schon oben erwähnten Brasileïns (oxydirten Brasilins) besteht aus zwei Theilen, welche durch ein Minimum bei 65 von einander getrennt sind; der erste von 29 bis 65 reichende Theil zeigt zwei Maxima bei 39 und 58, dazwischen ein wenig ausgeprä-

tes Minimum bei 50; der zweite Theil erstreckt sich von 65 bis 80 und hat seine grösste Lichtstärke bei 70. Auf Zusatz von Soda verschwindet dieser zweite Theil, während der erste bestehen bleibt (s. oben „Brasileïn mit Soda"), und die bisher grüngelbe Farbe des Fluorescenzlichtes geht in gelb über; durch Zusatz von Ammoniak dagegen wird der zweite sowohl als der erste Theil verstärkt, die Fluorescenz wird olivengrün und erreicht an Kraft diejenige des Eosins. Die gelbrothe alkoholische Lösung des unveränderten Brasileïns zeigt einen Absorptionsstreifen bei 65 und eine starke Absorption des violetten Endes; durch Ammoniak wird die gesammte Absorption verstärkt und dunkelrothe Färbung bewirkt; durch Soda wird der Absorptionsstreif verstärkt, die Absorption im Violett aber geschwächt und eine mehr purpurrothe Färbung herbeigeführt. Das fluorescirende Spectrum zeigt ein orangegelbes Maximum bei 65, hinter *E* wird die Fluorescenz schwächer und nimmt einen mehr chocoladefarbenen Ton an.

Ueberblicken wir nun die Reihe der aufgezählten Substanzen, so begegnen wir nicht weniger als 15 verschiedenen Körpern, welche sich, sei es ganz (die 9 Körper der I. Klasse), sei es theilweise (die 6 ersten Körper der III. Klasse; das Brasileïn ist nicht mitgerechnet, weil seine Fluorescenz erster Art in der I. Klasse bereits mitgezählt ist), der Stokes'schen Regel entziehen. Zahlreicher sind allerdings die Körper der II. Klasse, welche dieser Regel[1]) unbedingt gehorchen. Indem wir das Verhalten unserer drei Klassen auch in an-

1) Gegenüber der „Berichtigung" des Hrn. Wüllner in Pogg. Ann. Ergbd. VIII. p. 474 kann ich mich darauf beschränken, ein darin vorkommendes Missverständniss aufzuklären. In meiner Abhandlung über Fluorescenz, Pogg. Ann. CXLIII heisst es p. 30: „Das „Stokes'sche Gesetz", wonach die Brechbarkeit der erregenden Strahlen stets die obere Grenze bilden soll für die Brechbarkeit der erregten, ist demnach kein Naturgesetz, sondern nur eine Regel, welche wohl für die Mehrzahl der Fluorescenzerscheinungen zuzutreffen scheint, mit dem Wesen derselben aber in keinem nothwendigen Zusammenhange steht." Weiterhin wird die „Fluorescenz durch Differenz-

deren Beziehungen genauer vergleichen, gelangen wir noch zu folgenden Sätzen:

1) Zur ersten Klasse gehören nur Körper mit sehr starken Absorptionsstreifen, von welchen einer selbst bei grosser Verdünnung, wenn die Absorption in den übrigen Theilen des Spectrums nicht mehr wahrnehmbar ist, noch sichtbar bleibt. Diese Substanzen sind stets lebhaft und intensiv gefärbt (grün, roth, orange, gelb), zeigen normale Dispersion und im festen Zustand Oberflächenfarben.

Diesem absoluten Maximum der Absorption entspricht im fluorescirenden Spectrum das absolute Maximum der Fluorescenz.

2) Zur zweiten Klasse gehören alle fluorescirenden Substanzen, die nur eine einseitige Absorption des brechbareren Endes des Spectrums zeigen. Sie erscheinen daher gelb, braun oder farblos, letzteres nämlich dann, wenn nur das äusserste Violett und das Ultraviolett der Absorption unterliegen.

Zu dieser Klasse gehören allerdings auch Körper (die Kienrussauszüge), welche Absorptionsstreifen besitzen, denen zugleich Maxima der Fluorescenz entsprechen. Diese Absorptionsstreifen erscheinen aber als breite verwaschene Bänder, sogenannte Schatten, und sind keine absolute Maxima. Sie verschwinden nämlich bei wachsender Verdünnung sehr bald, noch ehe die Absorption des Violett aufhört wahrnehmbar zu sein.

Das salpetersaure Uran zeigt eine Anzahl sehr scharf ausgeprägter Absorptionsstreifen, welche jedoch zur Fluorescenz in keiner Beziehung stehen. Auch das zur ersten Klasse gehörige Uranglas zeigt im Roth und Gelb Absorptionsstreifen, welche mit seiner Fluorescenz nichts zu thun haben.

---

töne", d. i. die Fluorescenz nach der Stokes'schen „Regel", aus der Theorie abgeleitet. Wenn es daher p. 44 heisst, dass die Theorie „mit dem bisher als Grundgesetz allgemein angenommenen Stokesschen Gesetz in Widerspruch steht", so ist damit gemeint, dass sie dem Stokes'schen Satz widerspreche, falls man denselben als allgemein gültiges „Gesetz" hinstellen will, während sie mit dem als „Regel" aufgefassten Satze in Uebereinstimmung ist.

Die grüne Farbe des Flusspaths von Alston Moor ist durch ein Absorptionsband im Roth bedingt, welches zur Fluorescenz ebenfalls keine Beziehung hat.

3) Zur dritten Klasse gehören, wie zur ersten, nur Körper mit starken Absorptionsstreifen und lebhafter Färbung (grün, blau, violett, roth, orange).

Die Fluorescenz erster Art scheint demnach mit der Existenz eines solchen hervorragenden Maximums der Absorption und Fluorescenz in causalem Zusammenhange zu stehen.

4) Das fluorescirende Spectrum der Körper erster Klasse ist überall gleichfarbig, abgesehen von jenen leichten Aenderungen der Nuance, welche durch die von der Substanz auf ihr eigenes Fluorescenzlicht ausgeübte Absorption bedingt sind. An den schwächer fluorescirenden Stellen findet nämlich ein verhältnissmässiges Zurücktreten der stärker absorbirbaren Strahlen des Fluorescenzlichtes, welche bei allen hierher gehörigen Körpern zugleich auch die brechbareren sind, und infolge dessen eine Vertiefung der Nuance statt.

5) Das fluorescirende Spectrum der Körper zweiter Klasse ist ungleichfarbig mit allmählicher Aenderung des Farbentons, und wird erst gleichfarbig von jener Stelle an, wo das Spectrum des Fluorescenzlichtes endigt.

Es kann jedoch auch hier das fluorescirende Spectrum dem freien Auge als überall gleichfarbig erscheinen. Dies ist der Fall, wenn die Spectren der erregenden und erregten Strahlen nur wenig über einander greifen (Morin-Thonerde-Lösung, salpetersaures Uran), oder wenn die Fluorescenz erst im Blau oder Violett beginnt (wie bei den Nummern 19—25 dieser Klasse).

6) Das fluorescirende Spectrum der Körper dritter Klasse besteht aus zwei Theilen, einem (weniger brechbaren) in seiner ganzen Ausdehnung gleichfarbigen, und aus einem (brechbareren) anders gefärbten mit allmählicher Aenderung des

Farbentons, welcher erst gleichfarbig wird von der Stelle an, wo das Gesammtspectrum des Fluorescenzlichtes aufhört. An der Grenze beider Theile tritt ein nahezu plötzlicher Farbenwechsel ein.

7) Die Körper dritter Klasse verhalten sich wie Mischungen aus einer Substanz erster und einer solchen zweiter Klasse.

Die Orseille- und Lackmusauszüge kennzeichnen sich schon dadurch als Mischungen aus zwei fluorescirenden Substanzen, dass je nach dem Lösungsmittel bald die eine bald die andere Fluorescenz stärker hervortritt, wodurch das Aussehen der Gesammtfluorescenz geändert wird. Aus zwei verschiedenen Lackmussorten erhielt ich durch Alkohol Auszüge, von denen der eine im Tageslicht orange, der andere grüngelb fluorescirt; ihre Fluorescenzspectren zeigen aber keinen Unterschied, als dass der zweite gelbgrüne Theil bei letzterem verhältnissmässig stärker ausgebildet ist. Auch das Fluoranilin dürfte als eine Mischung zweier fluorescirender Substanzen zu betrachten sein. Dass das Brasileïn eine solche ist, wird durch den Umstand wahrscheinlich gemacht, dass die Fluorescenz zweiter Art durch Zusatz von Soda vernichtet, durch Zusatz von Ammoniak aber verstärkt wird, während diejenige erster Art bestehen bleibt. Ob die Chamaeleïnfarbstoffe wirklich chemische Individuen sind, wie es allerdings den Anschein hat, müsste durch eine genauere Untersuchung derselben erst noch entschieden werden.

Wäre einmal unzweifelhaft nachgewiesen, dass alle diese Körper aus zwei fluorescirenden Stoffen gemischt sind, so könnte man überhaupt diese dritte Klasse streichen und die getrennten Substanzen in die beiden ersten Klassen einreihen. Da jedoch diese Trennung noch nicht durchgeführt ist, und die Möglichkeit, dass ein einheitliches Molecül beide Arten von Fluorescenz zugleich besitze, nicht von vornherein zurückgewiesen werden kann, so glaubte ich diese Klasse bis auf weiteres noch aufrecht halten zu müssen.

Durch künstliche Mischung von Substanzen erster und

zweiter Klasse lassen sich Fluorescenzen dritter Klasse in grosser Mannichfaltigkeit nach Belieben herstellen. Man erzielt auf diese Weise oft wunderbare Farbeneffecte, welche sich durch Zusatz stark gefärbter nicht fluorescirender Substanzen noch überraschender gestalten.

Man sieht nun auch, dass noch andere zusammengesetzte Fluorescenzen, als diejenigen unserer dritten Klasse, möglich sind und sich künstlich hervorbringen lassen; nämlich, sofern wir uns auf nur zwei fluorescirende Stoffe beschränken, durch Mischung zweier Substanzen erster Klasse und durch Mischung zweier Substanzen zweiter Klasse. Eine Mischung ersterer Art (z. B. von Naphthalinroth mit Fluoresceïn oder mit Eosin) ist bei der spectralen Untersuchung leicht als solche zu erkennen; ihr Fluorescenzspectrum besteht nämlich aus zwei durch ein Minimum getrennten Theilen, deren keiner der Stokes'schen Regel gehorcht, wovon jedoch der zweite (nur dem Fluoresceïn oder Eosin angehörige) brechbarere Theil verschwindet, sobald das einfallende homogene Licht bis zu der diesen letzteren Stoffen zukommenden unteren Grenze der Erregbarkeit herabgegangen ist. Eine Mischung aus zwei Substanzen zweiter Klasse dagegen wird nicht leicht als solche erkannt, da sie sich selbst wie ein Körper zweiter Klasse verhält. Es ist möglich, dass unter den in der zweiten Klasse aufgezählten Körpern sich solche Mischungen aus zwei oder mehreren bisher noch nicht getrennten Stoffen befinden. Das verschiedene Verhalten der Kienrussauszüge würde sich z. B. sehr leicht durch die Annahme erklären, dass im Kienruss zwei oder mehrere fluorescirende Substanzen zweiter Klasse enthalten sind, welche von den verschiedenen Lösungsmitteln in verschiedenem Verhältniss aufgenommen werden.

Für die zuletzt besprochenen beiden Arten zusammengesetzter Fluorescenz eigene Klassen aufzustellen, hielt ich nicht für gerechtfertigt, da für die erstere Art die Natur selbst bis jetzt kein Beispiel darbietet, die letztere Art aber durch optische Mittel als zusammengesetzt nicht zu erkennen ist.

VIII. *Zur Metallreflexion; von W. Wernicke.*

In einer Mittheilung: „Zur Metallreflexion“[1]) hat Hr. Eisenlohr mit Hülfe der Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion einige Versuche über Absorption und Reflexion des Lichtes im Silber berechnet, welche in zwei früheren Aufsätzen von mir beschrieben sind. Als Resultat dieser Rechnungen erhält er eine solche Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Zahlen, dass er die letzteren als eine Bestätigung der Cauchy'schen Theorie ansehen zu können glaubt, obwohl ich selbst das Gegentheil behauptet hatte. In dem ersteren jener beiden Aufsätze hatte ich eine Methode zur Bestimmung der Brechungsindices stark absorbirender Körper angegeben und mittelst derselben für Silber sehr grosse Werthe, zwischen 3 und 5, abgeleitet. Hierbei war ausdrücklich hervorgehoben die Voraussetzung, dass der Extinctionscoëfficient nicht, oder nicht erheblich mit dem Einfallswinkel sich ändert. — Hr. Eisenlohr berechnet dagegen aus Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth zufolge der Cauchy'schen Theorie sehr kleine Brechungsindices des Silbers, zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ für die verschiedenen Farben. Er glaubt, der Grund der Nichtübereinstimmung läge in einem Missverständnisse der Theorie meinerseits und sagt darüber: „Es beruht diese Ableitung (der grossen Brechungsindices) auf dem Irrthum, dass durch Ausbreitung der Aethererschütterung von den Theilchen der Grenzfläche aus in das absorbirende Medium eine ebene Lichtwelle derselben Art zu Stande komme, wie in durchsichtigen Körpern, und dass die Länge des Weges, welche die Absorption bedingen soll, wie dort dem Cosinus eines Winkels proportional ist, dessen Sinus nach bekannten Gesetzen den Brechungsexponenten ergibt.“

Um den angeblichen Irrthum zu corrigiren, fährt

1) Wied. Ann. I. p. 199.

Hr. Eisenlohr fort: „Eine einfache Erwägung zeigt jedoch, dass die Absorption nach der Theorie von Cauchy daraus abgeleitet werden kann, dass beim Durchgange des Lichtes durch durchsichtige Medien von der Dicke d eine Verzögerung der Phase von $\frac{2\pi d \cos \alpha'}{\lambda'}$ eintritt, wenn λ' die Wellenlänge und α' der Winkel des Lichtstrahls mit der Normale in dem Medium ist; was darauf hinauskommt, den Ausdruck für die Amplitude mit $e^{\frac{2\pi d \cos \alpha' i}{\lambda'}}$ zu multipliciren und den reellen Theil allein zu berücksichtigen. Ist das Medium ein absorbirendes, so genügt man offenbar den Grenzbedingungen ebenso gut durch Einführung eines complexen Brechungsindex $\vartheta e^{\varepsilon i}$, welcher ausdrückt, dass sich die Erschütterung im Metall mit einer Geschwindigkeit ausbreitet, welche sich zu der im leeren Raume wie 1 zu $\vartheta \cos \varepsilon$ verhält, und zugleich auf die Länge λ der Welle im leeren Raume in dem Verhältniss von $e^{-2\pi\vartheta \sin \varepsilon}$ abnimmt. Setzt man die daraus abgeleiteten Werthe für $\cos \alpha'$ und λ' in den obigen Ausdruck $e^{\frac{2\pi d \cos \alpha' i}{\lambda'}}$, so besteht der reelle Theil desselben erstens aus einem Theile, der eine Aenderung der Phase andeutet, welche hier nicht in Betracht kommt, zweitens aus einem die Absorption ausdrückenden Factor $e^{\frac{2\pi d c \vartheta \sin(\varepsilon+u)}{\lambda}}$, wo, wie in meinem früheren Aufsatze über Metallreflexion [1]) c und u aus den Constanten ϑ und ε durch die Gleichungen:

$$c^2 \vartheta^2 \cos 2(\varepsilon + u) = \vartheta^2 \cos 2\varepsilon - \sin^2 \alpha$$
$$c^2 \vartheta^2 \sin 2(\varepsilon + u) = \vartheta^2 \sin 2\varepsilon$$

abgeleitet werden, α aber der Einfallswinkel des Lichtes ist. Hiernach wären die Versuche zu berechnen."

Die nun folgende Berechnung gibt — und dies erkenne ich unbedingt an — eine Uebereinstimmung mit

1) Pogg. Ann. CIV. p. 370.

den Versuchsresultaten, wie sie, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Cauchy'schen Formeln, nicht grösser erwartet werden konnte.

Hr. Eisenlohr dürfte sich aber im Irrthum befinden, wenn er glaubt, dass die von mir aufgestellten, anders gebauten Formeln, ein anderes Resultat liefern. Ist b die Intensität des durchgegangenen Lichtes bei senkrechter Incidenz für eine Silberschicht von der Dicke d, so ist sie beim Einfallswinkel α für dieselbe Schicht $b^{\frac{n}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2\alpha}}}$, wenn n und ν die Brechungsindices für 0, resp. α bezeichnen und beide Grössen durch die unten folgende Gleichung (1) verbunden sind. Ueberhaupt sind die betreffenden Cauchy'schen Formeln in den von mir in der zweiten Abhandlung gegebenen vollständig enthalten; wenngleich die ersteren für manche numerische Rechnungen bequemer sind, so haben die letzteren dafür den Vorzug, dass die Bedeutung der physikalischen Constanten darin erkennbar ist.

Dass im Metall eine Lichtwelle derselben Art wie in durchsichtigen Körpern zu Stande komme, habe ich nicht von vornherein angenommen; vielmehr waren meine Untersuchungen gleich anfangs auf die Ermittelung der Gleichungen gerichtet, welche der Cauchy'schen Theorie zufolge den Brechungs- und Extinctionsindex für einen beliebigen Einfallswinkel i als Functionen dieses Winkels und der entsprechenden Grössen für den Einfallswinkel Null darstellen. Diese Abhängigkeit der optischen Constanten von der Incidenz ist aus den Formeln Cauchy's nicht ohne weiteres zu erkennen. Er selbst scheint auch dieselbe nicht erkannt zu haben; denn er sagt in jenem Aufsatze, in welchem er seine Formeln der Metallreflexion mittheilt[1]), dass „der Brechungsindex nur unbedeutende Veränderungen erleidet, wenn der einfallende Strahl sich von der Normale der brechenden Fläche entfernt.“ Offen-

1) C. R. XXV. p. 86; Pogg. Ann. LXXIV. p. 543.

bar ist Cauchy zu dieser Behauptung, welche, soviel ich weiss, nirgends berichtigt ist, dadurch verleitet, dass er die Brechungsindices eines Metalls, nämlich des Stahls, aus seinen Formeln für verschiedene Einfallswinkel numerisch ausrechnete und das erhaltene Resultat, welches für den speciellen Fall richtig ist, auf die anderen Metalle ausdehnte.

Dass die Formeln von Beer[1]) in Bezug auf die Abhängigkeit der optischen Constanten vom Einfallswinkel ungenau sind, habe ich zuerst in der erstgenannten Abhandlung (1874) ausgesprochen. In der zweiten leitete ich die Gleichungen ab, welche die aus der Theorie sich ergebende Abhängigkeit der Brechung und Absorption von der Incidenz darstellen. Hierzu wandte ich freilich ein anderes Verfahren an als dasjenige ist, durch welches Hr. Eisenlohr die Cauchy'schen Formeln zu beweisen versucht hat. Anstatt mit imaginären Grössen, deren mechanische oder physikalische Bedeutung nicht klar gelegt ist, zu operiren, wie Hr. Eisenlohr es thut, legte ich der Lichtbewegung Differentialgleichungen zu Grunde, die ganz bestimmten mechanischen Vorstellungen entsprechen. Hierdurch gelang es, die in den Cauchy'schen Formeln verdeckte Abhängigkeit der optischen Constanten von der Incidenz durch einfache Constantenbestimmung sofort zu erhalten, nämlich die Gleichungen:

$$(1)\quad 2\nu^2 = n^2 - g^2 + \sin^2 i + \sqrt{(n^2 - g^2 - \sin^2 i)^2 + 4n^2g^2}$$

$$(2)\quad \gamma\nu = ng,$$

worin ν und γ den Brechungs-, resp. Extinctionsindex für den Einfallswinkel i, n und g dieselben Grössen für den Einfallswinkel Null bedeuten. Die Grössen ν und γ sind genau so definirt, wie bei durchsichtigen (schwach absorbirenden) Medien, d. h. ν ist das Verhältniss der Geschwindigkeit des Lichtes in Luft zur Geschwindigkeit im absorbirenden Körper in der dem Einfallswinkel entsprechen-

2) Pogg. Ann. XCII.

den Richtung; γ ist der durch die Wellenlänge in Luft gemessene Extinctionscoëfficient, $\frac{\gamma}{\cos r}$, wo r der Brechungswinkel, ist gleich der von Cauchy, Beer und einigen anderen „Extinctionscoëfficient" genannten Grösse, welche gar keine physikalische Constante darstellt.

Hat in den Formeln (1) und (2) der Brechungsindex n grosse Werthe, so ist die Abhängigkeit der Brechung und Absorption von der Incidenz in der That nur gering, und es ist erlaubt, wie ich es gethan, $\nu = n$ und $\gamma = g$ zu setzen. Für sehr kleine n aber ergeben sie eine starke Zunahme des Brechungs- und eine starke Abnahme des Extinctionsindex mit wachsendem i, und zwar in um so höherem Maasse, je grösser g ist. Von allen Körpern, deren Absorption gemessen ist, hat Silber den grössten Werth von g, für mittleres Licht (E) etwa 2,75. Setzt man in den Formeln (1) und (2):

$$i = 60^0 \qquad n = 0{,}25\,^{1}) \qquad g = 2{,}75,$$

so liefern dieselben:

$$\nu = 0{,}9 \qquad \gamma = 0{,}77.$$

Während also der Einfallswinkel von Null bis 60° wächst, nimmt der Brechungsindex des Silbers von 0,25 bis 0,9, also fast bis zum Vierfachen seines Werthes für normale Incidenz zu, der Extinctionsindex von 2,75 bis 0,77 ab. Das isotrope Metall erhält also hiernach Eigenschaften eines Körpers von wahrhaft ungeheurer Doppelbrechung, dessen optische Axe jedesmal senkrecht zur brechenden Fläche steht. Ebenso wie die Geschwindigkeit des Lichtes ist die Absorption je nach der Richtung den allerstärksten Veränderungen unterworfen. Zu diesen Consequenzen führen nothwendig die Cauchy'schen Reflexionsformeln.

---

1) Eisenlohr gibt in der eingangs erwähnten Mittheilung jetzt eine Tabelle, worin die Werthe für n (bei Silber) nur halb so gross sind, als in seiner früheren (Pogg. Ann. CIV.), indem infolge eines Missverständnisses der Jamin'schen Beobachtungen die letztere Tabelle unrichtig wurde.

Beobachtungen, welche für ein so abnormes Verhalten eines isotropen Körpers sprechen, sind nicht vorhanden. Da überdies alle Versuche, einen Brechungsindex (Verhältniss der Geschwindigkeit des Lichts in Luft zur Geschwindigkeit im Körper) kleiner als Eins nachzuweisen, gescheitert sind (die bezüglichen Versuche Quincke's sind von ihm selbst zurückgezogen), und da andererseits die Eisenlohr'sche Ableitung der Cauchy'schen Formeln einer dynamischen Begründung vollständig entbehrt, so hatte ich in den früheren Aufsätzen Brechungs- und Extinctionsindex als unabhängig von der Incidenz vorausgesetzt und die von dieser Voraussetzung befreiten Formeln, weil sie das Cauchy'sche Princip der Continuität zur Basis haben, noch Cauchy'sche Theorie genannt. Ich habe aber diese Voraussetzung nicht verschwiegen, sondern mehrfach ausdrücklich hervorgehoben. Meine Bemerkung über die Unzulässigkeit der Berechnung des Brechungsindex aus Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth, welche Eisenlohr angreift, ist ebenso wie meine Behauptung, dass aus den vollständigen Formeln grosse Brechungsindices folgen, nur die Folge jener Voraussetzung. Es ist demgemäss selbstverständlich, dass sie nicht mehr zutrifft, sobald jene Voraussetzung wegfällt.

Mit Bezug auf die in der zweiten Abhandlung enthaltenen Zahlen für die Phasenänderung bei der Reflexion sagt Hr. Eisenlohr: „Was nun die Versuche über die Interferenz des aus Glas an Metall und Luft reflectirten Lichtes betrifft, so ergeben dieselben nicht, wie Hr. Wernicke glaubt, dass die Summe der Quadrate des Brechungs- und Extinctionsindex (nach Cauchy ϑ^2) wenig von 1 abweicht, sondern nur, dass sie wenig von dem Quadrate des Brechungsindex des Glases verschieden ist."

Hier theilt Hr. Eisenlohr mir eine Meinung zu, welche in dem, was ich behauptet habe, nicht enthalten ist. Ich habe gar nicht gesagt, dass die Summe der Quadrate des Brechungs- und Extinctionsindex wenig von 1 abweicht, sondern wörtlich Folgendes: „Soll aber, wie die

Beobachtungen über die Phasenänderungen dies verlangen, der Nenner der Formel (4) verschwinden, so muss $n^2 + g^2 = 1$ werden." Aus der ganzen Entwickelung und speciell aus dem auf derselben Seite[1]) angeführten Zahlenbeispiel ist aber ersichtlich, dass unter n und g daselbst die relativen Grössen zu verstehen sind, nämlich der Brechungs-, resp. Extinctionsindex des Silbers, dividirt durch den Brechungsindex des Glases.

Wenn ferner von Hrn. Eisenlohr behauptet wird, die Werthe für die Constanten der Reflexion des Silbers hätten durch die Versuche Quincke's nach den Berechnungen von Jochmann eine Bestätigung erhalten, so bemerke ich dazu, dass Quincke selbst[2]) jene Versuche durchaus nicht für eine Stütze der Cauchy'schen Theorie hält. Wohl aber hat derselbe Versuche angegeben, welche mit jener Theorie im Widerspruche stehen, nämlich die Versuche über die Newton'schen Ringe im Silber. Wie es überhaupt mit der angeblichen Bestätigung beschaffen ist, darüber wird der Leser am besten ein Urtheil gewinnen, wenn er den betreffenden Aufsatz Jochmann's[3]) selber vergleicht. Ausser diesem existirt nur noch ein derartiger Aufsatz von Jochmann, in welchem derselbe[4]) die Quincke'schen Versuche über die Interferenz zweier Strahlenbündel berechnet hat, von denen das eine von Silber in Glas, das andere total von Luft in Glas reflectirt wurde. Hier ist die Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Zahlen allerdings eine befriedigende; allein für die Richtigkeit der Reflexionsconstanten oder der Cauchy'schen Formeln beweist dies gar nichts; denn in derselben Arbeit[5]) zeigt Jochmann, dass die von den Cauchy'schen gänzlich verschiedenen Formeln Neumann's dasselbe leisten wie jene.

1) Berl. Monatsber. 1875 p. 705 und Pogg. Ann. CXIX. p. 321.
2) Vgl. den wörtlichen Ausspruch: Pogg. Ann. CXXVIII. p. 547.
3) Pogg. Ann. Ergbd. V. p. 631–635.
4) Pogg. Ann. CXXXVI. p. 561.
5) Pogg. Ann. CXXXVI. p. 585.

Mit der Zulassung der sehr kleinen Brechungsindices (n zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$) lässt sich allerdings der starke Widerspruch zwischen meinen Versuchen über die Phasenänderung bei der Reflexion am Silber und den (auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Brechung und Absorption von der Incidenz basirten) theoretischen Formeln beseitigen. Eisenlohr hat diese Versuche aus den Cauchy'schen Formeln mit Zugrundelegung des Werthes 1,48 für den Brechungsindex der von mir benutzten Glaslamelle berechnet. Dieser von mir nur beiläufig angeführte Werth beruht zwar auf einer besonderen Messung, erwies sich aber bei späteren Wiederholungen als ungenau. Die Beschreibung der Methode, welche Dicke und Brechungsindex der Lamelle gleichzeitig zu bestimmen gestattet, würde hier zu weit führen; als Resultat ergab sich, dass die Brechungsindices der Lamelle zwischen 1,514 (B) und 1,527 (G) liegen und nicht sehr verschieden sind von den entsprechenden des Glases, aus dem die Lamelle geblasen war. Für die erwähnte Zahl 1,48 ist also 1,52 zu setzen, und dann werden die Unterschiede der von Eisenlohr berechneten und von mir beobachteten Zahlen noch geringer.

Einen Beweis aber dafür, dass die Formeln Cauchy's in Wirklichkeit die Erscheinungen darstellen, würde ich erst dann in jener Uebereinstimmung erblicken, wenn durch directe Versuche wenigstens eine der beiden, unseren bisherigen Erfahrungen so wenig entsprechenden Folgerungen derselben nachgewiesen wäre, nämlich dass erstens die Lichtgeschwindigkeit im Silber vier- bis fünfmal so gross ist wie im luftleeren Raume, und zweitens, dass Geschwindigkeit und Auslöschung des Lichtes im Metall wirklich so stark mit wachsendem Einfallswinkel abnehmen, wie es die obigen Gleichungen (1) und (2) verlangen.

IX. *Ueber die Volumenvermehrung der Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen; von J. J. Mackenzie und E. L. Nichols.*

Ueber die Vergrösserung des Volumens der Flüssigkeiten bei der Absorption von Gasen liegen bis jetzt, soweit uns bekannt, besonders wenn die Absorption klein ist, nur wenige Angaben vor.

Bergmann[1]) hat schon das specifische Gewicht des mit Kohlensäure gesättigten Wassers bei 2° gleich 1,0015, und die durch Sättigung hervorgebrachte Vermehrung des gesammten Gewichtes, gleich 0,0022 gefunden.

P. Thomson[2]) gibt weiter an, dass 1 Volumen Wasser mit Ammoniak gesättigt zu 1,666 wird, mit Salzsäure 1,500, mit schwefliger Säure 1,040, und mit Chlor 1,002.

Deicke[3]) hat in einer Arbeit über den Absorptionscoëfficienten der Salzsäure in Wasser gleichfalls die Ausdehnung des Wassers durch Absorption gemessen. Er benutzte eine von der von Carius gebrauchten, und von Bunsen in seinen „Gasometrischen Methoden" (p. 178) beschriebenen, nicht wesentlich verschiedene Methode.

Die Messung des specifischen Gewichtes zur Bestimmung der Ausdehnung durch Absorption ist ein nicht zu empfehlendes Verfahren, erstens weil für kleine Volumenveränderungen respective kleine Absorptionen, wie zum Beispiel für die von Kohlensäure, Kohlenoxyd, Stickoxydul, Stickoxyd u. s. w. in Wasser, die feinsten Methoden der Bestimmung des specifischen Gewichtes nicht empfindlich genug sind; und zweitens weil in den Fällen, wo der

1) Opuscula Chemica et Physica I. p. 9 und Schwedische Abhandlungen XXXV. p. 170 der deutschen Uebersetzung.

2) „A Treatise on Chemistry".

3) Pogg. Ann. CXIX. p. 156.

Absorptionscoëfficient nicht schon bekannt ist, vorausgesetzt werden muss, dass die Vorgänge keinen chemischen Charakter haben.

Hieraus ergibt sich die Aufgabe, eine Methode von möglichster Einfachheit, Genauigkeit und Empfindlichkeit zu finden.

Der Ausdehnungsapparat, den wir bei schwächeren Absorptionen gebraucht haben, besteht aus einer Glasflasche *A* (Taf. I Fig. 4) mit drei Oeffnungen (*a*, *b*, *c*). Das Gefäss ist oben conisch geformt, um das Anhaften von Gasblasen zu vermeiden. In die mittlere Oeffnung (*a*) passt ein hohler, sehr gut geschliffener Glasstöpsel (Taf. I Fig. 4a, 4b, 4c) von solcher Form, dass sich ebenfalls keine Blasen an seinen Rändern anhäufen können. Der Stöpsel ist weiter mit einem zweifach durchbohrten Hahn versehen, durch den man je nach der Stellung das Gefäss abschliessen (Fig. 4a), oder sei es mit dem oberen Theile des Apparates (Fig. 4b), sei es mit dem äusseren Raume verbinden kann (Fig. 1c). Auf diesen Stöpsel wird ein aufgeschliffenes kugelförmiges Glasgefäss (*G*) gesetzt, welches eine mit Chlorcalcium gefüllte Röhre (*h*, *h*) trägt. Den ganzen Theil (*G*.*h*, *h*) muss man vor und nach jedem Versuche wägen, um die darin enthaltene Feuchtigkeit zu bestimmen. Durch die Oeffnung (*b*) geht eine unterhalb in eine feine, etwas gebogene Spitze ausgezogene Glasröhre ziemlich tief in das Gefäss hinein, durch welche das Gas in kleinen Blasen einströmt. In (*c*) ist ein feingetheiltes Thermometer angebracht, welches ungefähr bis in die Mitte der Flüssigkeit reicht. Die Glasröhren sowohl, wie das Thermometer waren an den Stellen *b* und *c* sehr gut eingeschliffen, so dass die innere Oberfläche des Gefässes ganz ohne Ausbuchtung an diesen Stellen blieb. Der direct gemessene Ausdehnungscoëfficient des Glases des Gefässes betrug zwischen 4° und 32°, 0,0 000 261. Die Dimensionen der verschiedenen Theile des benutzten Apparates waren folgende:

Höhe des Gefässes (*A*) 200, Länge (*g*,*g* Fig. 4) 100,

Länge (*h,h* Fig. 4) 130, Durchmesser (*k,k* Fig. 4a) 20, Durchmesser (*d,d* Fig. 4a) 32 mm. Inhalt des Apparates bei 4° = 4653,00 ccm.

Das Gefäss wird in einen Topf mit Wasser von der gewünschten Temperatur gesetzt, sodann mit der betreffenden, von Luft befreiten Flüssigkeit gefüllt, die schon vorher auf dieselbe Temperatur wie das Gefäss gebracht worden ist, und hiernach die Temperatur sehr genau abgelesen. Dann setzt man den Stöpsel auf und füllt das Ganze bis zum Hahn *vv*. Man trägt Sorge, dass kein Tropfen der Flüssigkeit in der Oeffnung des Hahnes übrig bleibt. Sodann wird der obere Theil, dessen Gewicht man schon bestimmt hat, aufgesetzt. Der Hahn wird zunächst geöffnet, wie es Fig. 4b zeigt, und schliesslich das Gas eingeleitet, bis man vollkommen sicher ist, dass die Flüssigkeit vollständig gesättigt ist. Der Einfachheit der Rechnung wegen ist es rathsam, die Temperatur während des ganzen Versuches constant zu erhalten. Am Schluss des Versuches stellt man den Hahn wie in der Figur 4a, lässt die im oberen Theile befindliche Flüssigkeit ausfliessen, damit sowohl diese als auch der Theil *G* (Fig. 4) nachher gewogen werde. Hieraus findet man ohne weiteres die Ausdehnung der Flüssigkeit für die gegebene Temperatur.

Für Ammoniak, Salzsäure, Schwefelwasserstoff, schweflige Säure u. s. w., bei denen die Absorption sehr bedeutend ist, wird der Apparat (Taf. I Fig. 5) benutzt, dessen Construction sich aus der Zeichnung ergibt. *A* und *B* sind zwei kugelförmige Glasgefässe von resp. 700 und 500 ccm. Inhalt. Das obere ist genau in die Mündung des unteren eingeschliffen. Das Gefäss (*A*) ist mit einer Oeffnung und einem Hahn (*a*) versehen. In dem Halse von (*B*) ist eine Oeffnung angebracht, so dass durch Drehung von (*B*) der ganze Apparat geschlossen oder geöffnet werden kann. Im übrigen ist die Ausführung der Versuche der schon beschriebenen ganz analog.

Unsere bisherigen Bestimmungen beziehen sich auf

Kohlensäure und Wasser. Die Kohlensäure wurde meist aus kohlensaurer Magnesia und reiner Schwefelsäure entwickelt. Die Einrichtung des Entwickelungsapparates ist aus der Zeichnung (Taf. I Fig. 4) vollständig ersichtlich. Da der Zufluss, der aus dem Schwefelsäuregefäss (*E*) durch das Heberrohr in das Entwickelungsgefäss (*D*) erfolgt, mittelst des Hahnes (*l*) regulirt wird, kann die Entwickelung viele Stunden, ja die Nacht hindurch fortgesetzt werden. In den Flaschen *C* und *B* (Fig. 4) wird das Gas gewaschen und getrocknet.

Die folgende Tabelle gibt die mittleren Werthe für die Coëfficienten der Ausdehnung des Wassers durch die Absorption der Kohlensäure.

Tabelle 1.

Nr.	Temperatur.	Vermehrung des Volumens.	Coëfficient.	Nr.	Temperatur.	Vermehrung des Volumens.	Coëfficient.
1	2° C.	10,06 ccm	0,002144	7	17° C.	5,77 ccm	0,001240
2	6°	8,03	0,001726	8	18°	5,98	0,001280
3	8°	7,76	0,001670	9	22°	5,565	0,001210
4	12°	6,76	0,001450	10	27°	5,550	0,001190
5	14°	6,41	0,001379	11	32°	4,70	0,001010
6	16°	6,41	0,001378				

Aus den oben gegebenen Coëfficienten sieht man, wie ausserordentlich kleine Abweichungen für verschiedene Temperaturen sich ergeben; wie ja auch die Unterschiede des Absorptionscoëfficienten nach Bunsen's Angaben [1]) sehr geringfügig sind. Durch Vergleichung der in Taf. I Fig. 7 von uns gefundenen Ausdehnungscurve für verschiedene Temperaturen, mit der für die Absorptionsmenge gefundenen, sind wir berechtigt zu schliessen, dass:

1) Gasometrische Methoden p. 162.

Die Ausdehnung direct proportional der absorbirten Gasmenge ist.

Wir hoffen diesen Satz bald für andere Gase und Flüssigkeiten prüfen zu können.

Vergleicht man die Ausdehnung, die durch Absorption stattfindet, mit den von Andrews[1]) für die Dichtigkeit der flüssigen Kohlensäure angegebenen Zahlen, so findet man, dass das Volumen, welches die Kohlensäure als Flüssigkeit annehmen würde, mit der von uns gefundenen Ausdehnung approximativ übereinstimmt.

Um die schon erhaltenen Resultate weiter zu bestätigen, haben wir eine etwas verschiedene Methode angewendet. Das Gefäss *A* (Taf. I Fig. 4) wurde wie vorher bei einer bestimmten Temperatur mit Wasser gefüllt, sodann Gas bis zur Sättigung eingeleitet, und die Ausdehnung gemessen. Während des fortdauernden Einströmens des Gases wurde zunächst die Temperatur um wenige Grade geändert. Bei der zweiten Temperatur wurde wieder die Veränderung des Volumens bestimmt; und auf diese Weise erhielten wir Messungen über eine ganze Reihe von Temperaturintervallen, sowohl in steigender wie in sinkender Ordnung. Die dauernde Zuströmung des Gases diente dazu, durch Umrühren der Flüssigkeit das Ganze bei einer Temperatur zn erhalten. Es rührt die entstehende Volumenveränderung von zwei Ursachen her. Bei steigender Temperatur zum Beispiel haben wir erstens eine Ausdehnung durch die Wärme; zweitens aber eine Volumenverminderung durch das Abgehen eines Theiles der absorbirten Gasmenge. Die algebraische Summe dieser zwei Einflüsse ist durch die Quantität Flüssigkeit gegeben, welche man jedesmal, um das Gefäss für ein bestimmtes Temperaturintervall voll zu erhalten, zu dem Inhalte des Gefässes hinzufügen, resp. aus demselben entnehmen muss. Kennt man nun die Ausdehnung durch die Wärme, so kann man die Veränderung, welche der Coëfficient der

1) Phil. Mag. (5) I.

Ausdehnung des Wassers durch die Absorption der Kohlensäure erleidet, direct berechnen.

Die nach dieser Methode beobachteten Volumenveränderungen zeigt Tab. 2. In der dritten Zahlenreihe (*C*) sind die mittleren Volumenveränderungen jedes Intervalles auf Einheit des Volumens und auf ein Intervall von 1 Grad reducirt.

Tabelle 2.

Intervall.	Beob. Vermehrungen.	C	Mittlere Temp.	Intervall.	Beob. Vermehrungen.	C	Mittlere Temp.
2—4°	0,07 ccm 0,02	0,0000045	3°	18—20°	1,57 ccm 1,31	0,0001545	19°
4—6°	0,20	0,0000215	5°	20—22°	1,67 1,57 1,75 1,60	0,0001805	21°
8—10°	0,48	0,0000504	9°				
10—12°	0,64	0,0000690	11°				
12—14°	0,815	0,0000879	13°				
14—16°	1,14 1,12 1,15	0,0001219	15°	22—24°	1,67 1,97 1,74 1,99	0,0001995	23°
16—18°	1,29 1,28 1,22	0,0001365	17°	24—26°	2,05	0,0002200	25°
				26—28°	2,44 2,45	0,0002405	27°

Nach den in dieser Tabelle gegebenen Zahlen haben wir gleichfalls eine Curve gezogen (Taf. I Fig. 7).

Ueber die Ausdehnung des mit Kohlensäure gesättigten Wassers durch die Wärme waren, soweit wir wissen, gar keine Messungen vorhanden, und daher waren wir genöthigt, diese Ausdehnung zu bestimmen. Die Resultate, soweit sie auf Wasser und Kohlensäure sich beziehen, theilen wir unten mit, mit dem Vorbehalte, diesen Theil der Untersuchungen später fortzusetzen.

Der benutzte Apparat bestand aus einer dünnen Glaskugel (*A* Taf. I Fig. 6), mit einer Oeffnung (*a*, *a*) für den

eingeschliffenen Stöpsel, resp. das Thermometer. Es war weiter, wie aus der Zeichnung ersichtlich, eine enge Röhre (*b*, *c*) angeschmolzen. Wasser wurde bei der gewünschten Temperatur gesättigt und das Kügelchen damit bis zur Spitze (*c*) vollständig gefüllt, während das Ganze in einem Wasserbad blieb, welches genau dieselbe Temperatur wie das im Kügelchen befindliche kohlensaure Wasser hatte.

Die etwas gebogene Spitze der Röhre wurde zunächst in Quecksilber getaucht, die Temperatur des Apparats um ungefähr 2° erniedrigt, und die dabei entstehende Zusammenziehung des gesättigten Wassers mittelst des eingesogenen Quecksilbers gemessen. Dieses wurde darauf getrocknet und gewogen, und so der Ausdehnungscoëfficient bestimmt. Selbst das Quecksilbergefäss (s. Taf. I Fig. 6) stand während des Versuches zum Theil im Wasserbade, so dass überall dieselbe Temperatur existirte. Die Resultate der für verschiedene Temperaturen angestellten Bestimmungen sind unten angegeben. Es wird angenommen, dass für ein Temperaturintervall von 2 bis 3°, die Veränderung des Absorptionscoëfficienten eine verschwindend kleine Grösse bleibt. Wir hielten es für rathsam, wie es Hr. Kopp[1]) bei seinen Ausdehnungsversuchen auch gethan hat, Bestimmungen mit Dilatometern von verschiedenen Grössen mit einander zu vergleichen.

Die Inhalte unserer vier Apparate waren, bei 20° gemessen, Nr. 1 198,572, Nr. 2 196,832, Nr. 3 107,249, Nr. 4 106,588 ccm.

Die aus den gefundenen Zahlen (Tab. 3) erhaltene Curve (Taf. I Fig. 7) hat im ganzen ziemlich denselben Lauf wie die Ausdehnungscurve für reines Wasser, nur dass der merkwürdige Umstand dabei statt hat, dass das Dichtigkeitsmaximum nicht wie das des reinen Wassers bei 4°, sondern unterhalb 3° erreicht wird, wie dies für Salzlösungen der Fall ist.

---

1) Pogg. Ann. LXXII. p. 9.

Hier folgt die Tabelle der Ausdehnungscoëfficienten des mit Kohlensäure gesättigten Wassers durch Wärme.

Tabelle 3.

Intervall.	Mittlere Temp.	Volumen des Hg.	Nr. des Apparates.	Coëfficient.
4° – 1,90°	2,95°	0,185 cc.	3	0,0000604
5,80° – 3,40°	4,6°	0,212	4	0,0000610
7,40° – 4,80°	6,1°	0,472	2	0,0000679
12,15° – 9,85°	11,0°	0,610	2	0,0000999
12,85° – 11,21°	12,03°	0,995	2	0,0001130
16,50° – 12,75°	14,62°	1,254	2	0,0001252
20,60° – 16,40°	19,00°	1,460	2	0,0001710
23,43° – 20,33°	21,88°	1,497	2	0,0001811
25,3° – 23,46°	22,88°	1,677	2	0,0002170
27,55° – 25,0°	26,27°	1,716	2	0,0002526
29,15° – 26,32°	27,73°	2,199	1	0,0002923
31,7° – 28,73°	30,21°	2,119	1	0,0002680

Mit Hülfe der in Tab. 2 gegebenen Ausdehnungscoëfficienten sind wir im Stande die Resultate unserer zweiten Methode zu berechnen. Zieht man nämlich von einem in Zahlenreihe (*C*) der zweiten Tabelle gegebenen Coëfficienten den derselben Temperatur angehörenden Ausdehnungscoëfficienten des gesättigten Wassers ab, so bekommt man die von dem Ausdehnungscoëfficienten durch Absorption bei einer Temperaturerhöhung von 1° erlittene Veränderung. Wird nun eine der nach der ersten Methode gefundenen Zahlen als richtig betrachtet, so kann man die Ausdehnungscoëfficienten durch Absorption für die übrigen Temperaturen leicht herstellen. Auf diese Weise wurde Tab. 4 construirt, indem die Beobachtung (Tab. 1) für 18° als Norm angenommen wurde.

Tabelle 4.

Temperatur	Coëficient	Temperatur	Coëfficient	Temperatur	Coëfficient
5°	0,001729	12°	0,001406	19°	0,001254
6°	0,001665	13°	0,001381	20°	0,001236
7°	0,001605	14°	0,001360	21°	0,001221
8°	0,001553	15°	0,001329	22°	0,001207
9°	0,001509	16°	0,001319	23°	0,001198
10°	0,001470	17°	0,001299	24°	0,001180
11°	0,001437	18°	0,001280		

Durch Vergleichung mit den nach der ersten Methode gegebenen Coëfficienten findet man eine Uebereinstimmung meistens bis auf vier Decimalstellen. Die nach den Tabellen 1 und 4 gezogenen Curven sind neben einander (Taf. I Fig. 7) gestellt worden, wodurch man sich leicht überzeugen kann, dass der durch die erste der angewendeten Methoden bewiesene Satz gleichfalls durch die zweite derselben vollständig bestätigt wird.

Physik. Lab. d. Univ. Berlin, 3. August 1877.

X. *Einige Beobachtungen an dem Radiometer von Crookes; von Eduard Riecke.*

(Aus den Göttinger Nachr. vom 15. August 1877, mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Durch die grosse Zahl neuer und überraschender Erscheinungen, welche in dem kurzen Zeitraume seit der Wiederentdeckung der radiometrischen Bewegungen durch Crookes bekannt geworden sind, dürfte nachgewiesen sein, dass durch diese Erscheinungen der Kreis der physikalischen Thatsachen eine ebenso unerwartete wie bedeutungsvolle Erweiterung erfahren hat. Wenn ich mir

erlaube, im Folgenden einige Beobachtungen über die Bewegung des Radiometers mitzutheilen, so geht meine Absicht nur dahin, die Aufmerksamkeit competenterer Physiker auf eine Methode der Beobachtung zu richten, welche über einige der wichtigsten Elemente dieser Bewegung in sehr einfacher Weise Aufschluss zu geben im Stande ist.

Wir nehmen an, dass die Rotation des Radiometers durch einen constanten, normal gegen die eine Seite der Flügel gerichteten Ueberdruck hervorgebracht werde, während gleichzeitig eine der Winkelgeschwindigkeit proportionale Reibung der Bewegung entgegenwirkt. Bezeichnen wir unter dieser Voraussetzung durch p den auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck, durch l den Abstand, in welchem sich der Mittelpunkt der Fläche von der Drehungsaxe befindet, durch Q die Fläche, durch M das Trägheitsmoment aller Flügel zusammengenommen, so ergibt sich für die Bewegung des Radiometerkranzes die Differentialgleichung:

$$M.\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho\,\frac{d\varphi}{dt} = p.Q.l,$$

wo ϱ den Coëfficienten der Reibung bezeichnet.

Ist für $t = 0$ sowohl φ als auch $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null, so gibt die erste Integration:

$$M.\frac{d\varphi}{dt} + \varrho.\varphi = p.Q.l.t,$$

das zweite Integral wird dann:

$$\varphi = \frac{p.Q.l}{\varrho}.t - \frac{p.Q.l}{\varrho}.\frac{M}{\varrho}\left(1 - e^{-\frac{\varrho}{M}\cdot t}\right),$$

woraus durch Differentiation nach t:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p.Q.l}{\varrho} - \frac{p.Q.l}{\varrho}\,e^{-\frac{\varrho}{M}\cdot t}.$$

Für die von dem Radiometer erreichte constante Endgeschwindigkeit ergibt sich der Werth:

$$\alpha = \frac{p.Q.l}{\varrho}.$$

Substituiren wir denselben in die Gleichung für den Drehungswinkel φ, so erhalten wir:

$$\varphi = \alpha . t - \alpha . \frac{M}{\varrho}\left(1 - e^{-\frac{\varrho}{M} \cdot t}\right).$$

Die Curve, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, geht in eine gerade Linie über, sobald die Winkelgeschwindigkeit des Radiometers eine constante geworden ist. Die Gleichung dieser geraden Linie ist, wie man leicht sieht:

$$\varphi = \alpha . t - \alpha . \frac{M}{\varrho};$$

für $\varphi = 0$ gibt dieselbe:

$$t = \frac{M}{\varrho}.$$

Wenn man die Bewegung des Radiometers von der Ruhelage aus in ihrem zeitlichen Verlaufe beobachtet, so sind aus diesen Beobachtungen die Werthe von:

$$\alpha = \frac{p . Q . l}{\varrho} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{M}{\varrho}$$

unmittelbar zu entnehmen. Die Berechnung des auf die Flächeneinheit wirkenden Druckes p und des Reibungscoëfficienten ϱ erfordert dann nur noch die Kenntniss der Masse und der Dimensionen der Radiometerflügel.

Besonders hervorzuheben ist, dass der Werth von τ von der schliesslichen Winkelgeschwindigkeit α unabhängig ist. Wenn wir also für verschiedene Bewegungen eines und desselben Radiometers die Bewegungscurven construiren, so müssen die geradlinigen den constanten Endgeschwindigkeiten entsprechenden Theile dieser Curven die Axe der Zeiten in einem und demselben Punkte schneiden.

Es mögen nun Beobachtungen an zwei Radiometern mitgetheilt werden, welche als Prüfsteine für die Richtigkeit der bei der vorhergehenden Entwickelung zu Grunde gelegten Hypothesen dienen können.

Bei diesen Beobachtungen wurden die Radiometer in das Innere eines Kastens gesetzt, welcher in der Höhe des Kreuzes zwei einander gegenüberliegende Oeffnungen

besass; durch die vordere Oeffnung konnten die Strahlen einer Gaslampe auf das Radiometer geworfen werden, während die hintere für die Beobachtung frei gelassen war. Durch zwei über die Mitte der Oeffnungen herabhängende Senkel wurde eine verticale Visirebene hergestellt, in welche die Drehungsaxe des Radiometers eingestellt wurde. Die Anfangsstellung des Radiometers war immer so gewählt, dass eines der Flügelpaare gerade in die Visirebene hineinfiel. Bei einem bestimmten Secundenschlage wurde ein die vordere Oeffnung verdeckender Schirm entfernt, und so der Zutritt des Lichtes zu dem Radiometer eröffnet; die aufeinanderfolgenden Durchgänge der Flügel durch die Visirebene wurden mit Hülfe eines halbe Secunden schlagenden Chronometers bestimmt. Die Beobachtungen selbst sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt; die erste Columne enthält die Winkel, welche von dem zuerst in die Visirebene eingestellten Flügel des Radiometers durchlaufen wurden, die zweite Columne enthält die entsprechenden Zeiten in Secunden. Wurden unter denselben Verhältnissen, d. h. bei gleichem Abstande und gleicher Helligkeit der Flamme mehrere Beobachtungsreihen angestellt, so sind diese in einer Tabelle zusammengestellt, und ist aus den gleichen Winkeln entsprechenden Zeiten das Mittel genommen.

Radiometer Nr. I.

Der Kranz desselben trug vier Flügel aus geglühtem Glimmer, welche auf der einen Seite berusst waren.

Erste Beobachtungsreihe.

Entfernung zwischen Flamme und Radiometer = 800 mm.

φ	t			Mittel	φ	t			Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	16,9	19,9	17,5	18,1	$\frac{5}{2}\pi$	48,5	52,7	50,0	50,4
π	24,7	28,1	26,2	26,3	3π	55,5	60,4	57,8	57,9
$\frac{3}{2}\pi$	32,7	35,9	35,2	34,6	$\frac{7}{2}\pi$	63,0	67,9	66,2	65,7
2π	40,2	44,0	42,5	42,2	4π	70,7	75,5	73,4	73,2

Es ergibt sich aus diesen Beobachtungen:

$\alpha = 0{,}203.$ $\tau = 11{,}2.$

Zweite Beobachtungsreihe.

Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 700 mm.

φ	t			Mittel	φ	t			Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	14,0	12,9	14,3	13,7	$\frac{7}{2}\pi$	48,7	47,9	48,5	48,4
π	20,6	19,9	21,5	20,7	4π	53,7	52,9	53,7	53,4
$\frac{3}{2}\pi$	27,1	26,1	27,1	26,8	$\frac{9}{2}\pi$	59,1	58,3	59,0	58,8
2π	32,2	31,4	32,7	32,1	5π	64,6	63,4	64,0	64,0
$\frac{5}{2}\pi$	37,9	37,0	38,2	37,7	$\frac{11}{2}\pi$	70,1	68,6	68,2	69,0
3π	43,3	42,5	43,7	43,2	6π	75,1	73,5	73,9	74,2

Es ergibt sich aus diesen Beobachtungen:

$\alpha = 0{,}303$ $\tau = 11{,}8.$

Radiometer Nr. II.

Die Flügel desselben bestanden aus dünnem auf einer Seite mit Glimmer bedeckten Messingblech und waren gegen die Axe des Radiometers geneigt.

Erste Beobachtungsreihe.

Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 400 mm.

φ	t		Mittel	φ	t		Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	17,2	22,2	19,7	$\frac{9}{2}\pi$	62,2	59,7	60,9
π	28,6	30,2	29,4	5π	65,7	63,5	64,6
$\frac{3}{2}\pi$	37,0	35,4	36,2	$\frac{11}{2}\pi$	69,9	67,2	68,5
2π	41,6	39,5	40,5	6π	73,0	70,6	71,8
$\frac{5}{2}\pi$	45,7	44,1	44,9	$\frac{13}{2}\pi$	76,2	73,5	74,8
3π	50,1	48,6	49,3	7π	79,7	77,0	78,3
$\frac{7}{2}\pi$	54,9	52,4	53,7	$\frac{15}{2}\pi$	83,0	80,2	81,6
4π	58,6	56,1	57,3	8π	86,0	83,2	84,6

$\alpha = 0{,}455$ $\tau = 28{,}6.$

Zweite Beobachtungsreihe.
Entfernung zwischen Lampe und Radiometer = 400 mm.

φ	t	φ	t	φ	t
$\frac{1}{2}\pi$	13,0	$\frac{7}{2}\pi$	49,9	6π	66,9
π	22,2	4π	53,2	$\frac{13}{2}\pi$	70,1
$\frac{3}{2}\pi$	31,0	$\frac{9}{2}\pi$	56,7	7π	72,7
2π	36,0	5π	60,1	$\frac{15}{2}\pi$	76,2
$\frac{5}{2}\pi$	40,2	$\frac{11}{2}\pi$	63,7	8π	78,7
3π	45,0				

$\alpha = 0{,}494$ $\tau = 28{,}9.$

Dritte Beobachtungsreihe.
Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 400 mm.

φ	t			Mittel	φ	t			Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	14,2	15,7	14,6	14,8	$\frac{9}{2}\pi$	51,2	52,9	51,5	51,9
π	22,0	21,2	21,0	21,4	5π	54,7	56,0	54,9	55,2
$\frac{3}{2}\pi$	28,7	26,7	27,1	27,5	$\frac{11}{2}\pi$	58,2	59,2	58,0	58,5
2π	33,2	32.2	32,9	32,8	6π	60,7	62,0	61,6	61,4
$\frac{5}{2}\pi$	37,2	37,6	36,5	37,1	$\frac{13}{2}\pi$	63,6	65,4	64,7	64,6
3π	40,7	41,5	40,6	40,9	7π	66,5	68,1	67,5	67,4
$\frac{7}{2}\pi$	45,2	45,1	44,9	45,1	$\frac{15}{2}\pi$	69,7	71,2	70,6	70,5
4π	48,2	48,9	48,2	48,4					

$\alpha = 0{,}523$ $\tau = 25{,}0.$

Vierte Beobachtungsreihe.
Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 370 mm.

φ	t	φ	t	φ	t
$\frac{1}{2}\pi$	15,5	$\frac{7}{2}\pi$	37,5	$\frac{13}{2}\pi$	52,1
π	21,1	4π	40,1	7π	54,5
$\frac{3}{2}\pi$	25,0	$\frac{9}{2}\pi$	42,5	$\frac{15}{2}\pi$	56,6
2π	28,4	5π	45,1	8π	59,0
$\frac{5}{2}\pi$	31,6	$\frac{11}{2}\pi$	47,5	$\frac{17}{2}\pi$	61,0
3π	34,7	6π	50,1		

$\alpha = 0{,}720$ $\tau = 23{,}3.$

Fünfte Beobachtungsreihe.
Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 370 mm.

φ	t		Mittel	φ	t		Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	12,1	12,1	12,1	$\frac{7}{2}\pi$	34,4	32,2	33,3
π	18,0	17,0	17,5	4π	36,6	35,0	35,8
$\frac{3}{2}\pi$	21,9	20,6	21,2	$\frac{9}{2}\pi$	39,1	37,0	38,0
2π	25,0	23,9	24,4	5π	41,6	39,6	40,6
$\frac{5}{2}\pi$	28,0	27,1	27,5	$\frac{11}{2}\pi$	44,0	41,7	42,8
3π	31,5	29,9	30,7	6π	46,0	44,0	45,0

$\alpha = 0{,}690$ $\tau = 17{,}9.$

Sechste Beobachtungsreihe.
Entfernung zwischen Radiometer und Flamme = 370 mm.

φ	t		Mittel	φ	t		Mittel
$\frac{1}{2}\pi$	11,5	11,6	11,5	5π	39,0	40,0	39,5
π	16,2	16,5	16,3	$\frac{11}{2}\pi$	41,1	42,2	41,6
$\frac{3}{2}\pi$	20,6	20,6	20,6	6π	43,4	44,5	43,9
2π	23,5	24,0	23,7	$\frac{13}{2}\pi$	45,5	46,5	46,0
$\frac{5}{2}\pi$	26,6	26,5	26,5	7π	47,5	48,5	48,0
3π	29,5	29,6	29,5	$\frac{15}{2}\pi$	49,6	50,5	50,0
$\frac{7}{2}\pi$	32,0	32,1	32,0	8π	51,5	52,5	52,0
4π	34,8	34,9	34,8	$\frac{17}{2}\pi$	53,5	54,7	54,1
$\frac{9}{2}\pi$	36,5	37,5	37,0				

$\alpha = 0{,}770$ $\tau = 18{,}7.$

Will man zu einer Berechnung des auf die Flächeneinheit der Flügel wirkenden Druckes p vorgehen, so ist die Kenntniss der Masse und der Dimensionen der Radiometerflügel nothwendig; während die letzteren auch bei einem fertigen Radiometer sich mit hinreichender Annäherung bestimmen lassen, ist man in Betreff der Masse auf eine sehr rohe Schätzung angewiesen. Wenn ich im Folgenden versuche auf Grund einer solchen Schätzung den Druck p zu bestimmen, so können die sich ergebenden

Zahlen nur in Betreff der Grössenordnung von p einen Anhaltspunkt gewähren, aber in keiner Weise auf Uebereinstimmung mit den wirklichen Werthen von p Anspruch machen.

Radiometer Nr. I.

Es wurde gemessen:

$l = 18{,}2$ mm, $Q = 600$ qmm.

Die Masse der vier Flügel zusammengenommen wurde geschätzt = 600 mg, woraus:

$$M = 200000.$$

Es ergeben sich hieraus die folgenden Werthe von p:

1) für $\alpha = 0{,}203$ $p = 0{,}33$,
2) für $\alpha = 0{,}303$ $p = 0{,}47$.

Radiometer Nr. II.

Es wurde gemessen:

$l = 16$ mm, $Q = 600$ qmm.

Die Masse der vier Flügel zusammengenommen wurde geschätzt = 340 mg, woraus:

$$M = 100000.$$

Die entsprechenden Werthe von α, ϱ und p sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; hierbei sind die für p unmittelbar sich ergebenden Werthe noch dividirt durch $\cos 45^0 = 0{,}707$, um aus der zu der Bewegungsrichtung der geneigten Flügel parallelen Druckcomponente den gegen die Oberfläche der Flügel senkrechten Druck zu erhalten.

α	ϱ	p	α	ϱ	p
0,455	3500	0,23	0,720	4290	0,45
0,494	3460	0,25	0,690	5590	0,56
0,523	4000	0,31	0,770	5350	0,61

Wie man sieht, nimmt bei dem zweiten Radiometer der Reibungscoëfficient mit der Geschwindigkeit der Umdrehung zu, so dass also dieses Radiometer nicht ganz den bei der theoretischen Entwickelung zu Grunde ge-

legten Voraussetzungen entspricht. Bei dem ersten Radiometer dagegen erweist sich der Reibungscoëfficient als constant.

Die von 1 cmm Wasser infolge seiner Schwere ausgeübte Druckkraft ist gleich 9811 mechanischen Krafteinheiten, der kleinste und grösste der Werthe, welche sich im Vorhergehenden für den Druck p ergeben haben, würde demnach dem Gewichte von 0,00002 und 0,00006 cmm Wasser entsprechen. Herr Schuster[1]) fand auf anderem Wege für eine Rotationsgeschwindigkeit von $\alpha = 20$ seines Radiometers einen Werth von p, der gleich dem Gewichte von 0,0003 cmm Wasser war. Die von ihm beobachtete Rotationsgeschwindigkeit war also beiläufig 30 mal, der entsprechende Druck 7 mal grösser als bei meinen Versuchen.

Es möge schliesslich noch auf die Bedeutung aufmerksam gemacht werden, welche dem im Vorhergehenden berechneten Drucke p vom Standpunkte der Emissionstheorie aus zukommt. Wir denken uns das Kreuz des Radiometers für den Augenblick festgehalten, und auf der zurückgestossenen Fläche irgend eines der Flügel ein Flächenelement von 1 qmm Inhalt abgegrenzt. Wir bilden uns dann die Vorstellung, dass von diesem Flächenstückchen aus materielle Theilchen nach allen Richtungen des Raumes emittirt werden, deren Reaction den auf das Flächenelement ausgeübten Ueberdruck p verursacht. Anstatt eine solche nach allen Richtungen des Raumes vor sich gehende Emission zu untersuchen, beschränken wir uns im Folgenden auf die einfachere Annahme, dass die emittirten Theilchen nur eine zu der emittirenden Oberfläche senkrechte Geschwindigkeitscomponente besitzen, einen Fall, auf welchen sich der allgemeinere leicht reduciren lassen wird.

Wir nehmen an, die emittirten Theilchen bewegen sich unter der Wirkung einer von der Oberfläche der Flügel auf sie ausgeübten constanten Kraft, welche wir

1) Beibl. I. p. 535.

gleich $\mu . \pi$ setzen wollen, wo unter μ die Masse eines einzelnen emittirten Theilchens verstanden ist. Die Wirkung dieser Kraft erstrecke sich aber nur bis zu einer gewissen Entfernung λ von der Oberfläche des Flügels. Legen wir also in der Entfernung λ eine Parallelebene zu der Oberfläche des Flügels, so werden alle Theilchen, welche noch der Wirkung der Flügeloberfläche unterliegen, welche also umgekehrt auch eine Reaction auf den Flügel ausüben, innerhalb jener Parallelebenen sich befinden. Die emittirten Theilchen mögen in der Oberfläche des Flügels die Geschwindigkeit Null besitzen, sie mögen die Parallelebene mit der Endgeschwindigkeit c verlassen; die zu der Durchlaufung des zwischen den beiden Ebenen liegenden Weges λ erforderliche Zeit sei τ, dann ist:

$$c = \pi . \tau.$$

Alle Theilchen, welche sich in irgendeinem Augenblicke zwischen der Oberfläche des Flügels und der Parallelebene befinden, werden nach Verfluss der Zeit τ durch die Parallelebene hindurchgegangen sein; bezeichnen wir durch n die Anzahl der Theilchen, welche in der Zeiteinheit durch 1 qmm der Parallelebene hindurchgehen, so ist die Zahl der in der Zeit τ hindurchgehenden Theilchen gleich $n . \tau$. Ebenso gross muss aber auch die Anzahl derjenigen Theilchen sein, welche sich zu jeder Zeit über 1 qmm der Flügeloberfläche in dem Raume innerhalb der Parallelebene befinden, d. h. die Zahl derjenigen Theilchen, deren Reaction auf die Oberfläche des Flügels in Rechnung zu bringen ist. Die von einem einzelnen Theilchen auf die Oberfläche des Flügels ausgeübte Kraft ist aber gleich $\mu . \pi$, somit die gesammte auf 1 qmm der Oberfläche ausgeübte Reaction:

$$p = n . \tau . \mu . \pi$$

oder mit Rücksicht auf den Werth von τ:

$$p = n . \mu . c,$$

d. h. der auf 1 qmm der Flügeloberfläche ausgeübte Druck ist gleich der Bewegungsgrösse der in 1 Secunde emit-

tirten Theilchen; ein Resultat, welches sich aus dem Princip der Gleichheit der Bewegungsgrösse der emittirten Theilchen mit der Bewegungsgrösse des Flügels ohne weiteres ergeben hätte.

Nehmen wir für p den im Mittel bei meinen Versuchen vorhandenen Werth 0,4, für c den Werth 640000 mm, wie er etwa den Theilchen des Wasserdampfes nach der Gastheorie zukommen würde, so ergibt sich:

$$n \cdot \mu = \frac{1}{1600000} \text{ mg}.$$

XI. *Bestimmung der Resonanztöne der Mundhöhle durch Percussion; von Felix Auerbach.*

Die für den Klang der Vocale maassgebenden Eigentöne der Mundhöhle sind zuerst von Donders[1]) für die verschiedenen Stellungen und Gestaltungen derselben beobachtet und bestimmt worden, allerdings nach einer Methode, welche auf erhebliche Genauigkeit keinen Anspruch machen konnte. Weit brauchbarer ist der Weg, den Helmholtz[2]) zu demselben Zwecke eingeschlagen hat, und der in dem Verfahren besteht, zu einer gegebenen Stellung des Mundes diejenige Stimmgabel zu suchen, auf deren Ton die Mundhöhle am stärksten resonirt; oder umgekehrt, was noch bequemer ist, zu einer gegebenen Tonhöhe diejenige Stellung des Mundes zu suchen, bei welcher die stärkste Resonanz eintritt. Der einzige Uebelstand dieser Methode ist der, dass man nicht bei allen Vocalen sich dem für die Resonanz, also auch für den Vocalklang wesentlichen Theile der Mundhöhle genügend nähern kann. Zumal in

1) Archiv für die holländischen Beiträge für Natur- und Heilkunde, I. p. 157.

2) Die Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl. p. 168.

den Fällen, wo die Mundhöhle zwei selbständige Resonanzräume bildet, wird die Bestimmung des dem hinteren Theile zugehörigen Eigentones schwierig. Der Herd der die Resonanz hervorrufenden Schwingungen liegt eben hier gerade an dem entgegengesetzten Ende des Resonanzraumes wie bei der wirklichen Erzeugung der Vocale.

Infolge dessen stimmen auch die auf diesen verschiedenen Wegen erhaltenen Tonhöhen weder unter einander noch mit denjenigen Berechnungen in befriedigendem Maasse überein, welche sich, wie ich gezeigt habe [1]), an eine sorgfältige Untersuchung der Vertheilung der Gesammtintensität eines Vocalklanges unter seine einzelnen Partialtöne knüpfen lassen.

Geeignet dagegen, eine Entscheidung in dieser Frage herbeizuführen, ist die folgende von mir angewandte Methode, deren Princip einer hier und da geübten Spielerei zu Grunde liegt [2]).

Wenn man nach reichlicher Einathmung den Mund in die einem bestimmten Vocale entsprechende Stellung bringt und nun den Kehlkopf in der Gegend des Schildknorpels nach Art der Aerzte percutirt, d. h. indem man den Mittelfinger der einen Hand fest auflegt und mit demjenigen der anderen Hand darauf klopft, so hört man einen verhältnissmässig klaren, deutlichen Ton. Seine Höhe ändert sich mit Aenderung der Mundstellung, ist aber für dieselbe Mundstellung stets die nämliche. Auf diese Weise kann man die den verschiedenen Vocalen entsprechenden Resonanztöne der Mundhöhle mit grosser Genauigkeit bestimmen. Nur in Betreff der Octave könnte man, wie so oft bei derartigen Tönen, zwischen zwei benachbarten schwanken. Erwägt man jedoch, dass bei kurzen, schnell vergehenden Tönen die Reihe der Partialtöne sich nicht mit der Regelmässigkeit ausbilden kann, wie bei lang aushaltenden Tönen, und dass uns, die wir an

1) Pogg. Ann. Ergbd. VIII. p. 177.

2) Neuerdings hat mich Hr. cand. med. Schlegel in Tübingen in einer brieflichen Mittheilung auf dieselbe aufmerksam gemacht.

die letzteren gewöhnt sind, erstere daher tiefer erscheinen müssen, als sie in der That sind, so wird man nicht zögern, sich für die höhere der beiden in Betracht kommenden Octaven zu entscheiden.

Ferner muss ich, ehe ich die Resultate angebe, über die Aussprache der Vocale einige Bestimmungen treffen. Das *U* soll nicht zu dumpf gewählt werden, d. h. die durch Reibung der Luft entstehenden, dem Consonanten *w* entsprechenden und beim englischen *w* mitklingenden Schwingungen sollen eben noch vermieden sein. *O* und *Å* ergeben sich dann als ungezwungene Erweiterungen der Mundöffnung mit gleichzeitiger Verkleinerung der Mundhöhle. Das volle *A*, wie ich es unten angebe, bezeichnet das Endglied dieser Reihe; d. h. die verticale Höhe der Mundöffnung soll ihren grössten Werth erreicht, die seitliche Zurückziehung der Mundwinkel jedoch, bei welcher der *A*-Klang zunächst noch erhalten bleibt, noch nicht begonnen haben. Ist dies der Fall, so will ich vielmehr von einem scharfen *A*, im Gegensatze zum vollen *A*, sprechen, und dieses geht dann ungezwungen durch *Ä* und *E* zum *I* über; auch hier soll jedoch die Oeffnung noch nicht in dem Grade verkleinert werden, dass bereits die dem Consonanten *j* entsprechenden und beim englischen *y* mitklingenden Reibungsgeräusche auftreten. Schliesslich bildet das *Ö* den Uebergang vom *O* zum *E*, das *Ü* den vom *U* zum *I*.

Die folgende Tabelle zeigt die Eigentöne des Mundes für die verschiedenen Haupt- und Uebergangsklänge:

w (englisch.)	*U*	*ou* (nach Helmholtz.)	*O*	*Å* (schwedisch.)	*A* (voll.)	*a* (scharf.)	*Ä*	*E*	*I*	*y* (englisch.)	*ö*	*ü*
b bis *e'*	*f'*	*fis'* bis *g'*	*a'*	*c''*	*f''*	*g''* bis *b''*	*c''* bis *d''*	*g'* bis *a'*	*f''*	*e'* bis hinunter zum *b*	*gis'* bis *a'*	*e'* bis *f''*

Die Tonhöhe für *U* stimmt mit der Angabe von Donders vollständig, mit der von Helmholtz bis auf die Octave überein. Die Percussion zeigt aber deutlich: erstens dass beim *O* der Eigenton der Mundhöhle *a'* und nicht *a* ist, und zweitens dass der Uebergang vom *U* zum *O* einer Terz, und nicht einer Terz und einer Octave entspricht; diese beiden Umstände heben jeden, beim *U* für sich etwa entstehenden Zweifel. Beim Uebergange vom *U* zum *O*, *Å* und *A* nehmen nun aber die obigen Tonhöhen weit weniger rasch zu, als nach den Stimmgabelversuchen von Helmholtz. Schon mein *O* liegt einen halben Ton tiefer; beim *A* endlich ist der Unterschied auf mehr als eine Octave gestiegen.

Nach der obigen Tabelle finde ich für die Vocalreihe *U O Å A* nahezu den f-dur Accord *f' a' c'' f''*. Es ist überraschend, wie genau dieses Resultat mit den Ergebnissen der obenerwähnten, von mir durchgeführten Berechnungen stimmt[1]). In der That gab ich dort die den charakteristischen Tonhöhen dieser Klänge entsprechenden Schwingungszahlen zu 400, 500, 600 und 800 an. Für die zweite Vocalreihe *A Ä E I* lässt sich dieser Vergleich nicht durchführen, weil es hier mehrere Resonanztöne der Mundhöhle sind, welche für die Berechnung einer reducirten charakteristischen Tonhöhe von Einfluss sind.

Die dem vorderen, engeren Theile des Mundes entsprechenden Eigentöne der Vocale dieser zweiten Reihe steigen nach Helmholtz noch höher hinauf; nach der von mir angewandten Methode lassen sie sich nicht beobachten, weil in diesem entfernten Theile des Mundes die Resonanz nur schwach zu Stande kommt. Die anderen Eigentöne sinken nach Helmholtz von der beim *A* erreichten grössten Höhe wieder bis zu der dem *I* gerade wie dem *U* entsprechenden tiefsten herab. Dasselbe Verhalten zeigt die obige Tabelle. Aber auch für das klare, durch die Zahnreihen noch unbehinderte *I* finde ich den Ton *f'*,

1) l. c. p. 213, Tabelle V.

nicht, wie Helmholtz allerdings nur als Vermuthung ausspricht, *f*.

Da hiernach *O* und *E*, *U* und *I* gleiche Tonhöhen liefern, so ist zu erwarten, wie es sich auch wirklich ergibt, dass die Uebergangsvocale *Ö* und *Ü* die dem *O* und *E*, bezüglich dem *U* und *I* gemeinschaftlichen Tonhöhen liefern.

Uebrigens ist zu bemerken, dass man diese Percussionstöne noch bedeutend deutlicher und klarer wahrnimmt, wenn man sich die Ohren mit Klebwachs verstopft. Sie bilden dann eine schöne Reihe musikalischer Töne, bei mir gerade zwei Octaven; und es ist interessant, mit welcher Leichtigkeit man ohne vorhergegangene Uebung die Töne auf dieser so unfertigen Klaviatur trifft. Besonders leicht geschieht dies bei der ersten, durch die entsprechende Tonreihe bereits zur Genüge charakterisirten Vocalreihe *U O Å A*, welche ja ohnehin schon den ganzen Tonbereich erschöpft.

Des hier benutzten Mittels, den Schallwellen den Weg durch die Mundöffnung und den äusseren Gehörgang zum Trommelfell abzuschneiden, habe ich mich schliesslich auch bedient, um auf anderem Wege, nämlich durch directe Beobachtung der Vocalklänge, eine Bestätigung der obigen auf die Eigentöne der Mundhöhle bezüglichen Resultate zu erlangen. Der Charakter der Vocalklänge, welche man beim Singen mit verstopften Ohren zu hören bekommt, ist nämlich wesentlich durch zwei Umstände bedingt: erstens dadurch, dass die in den der Mundöffnung näher gelegenen Theilen des Resonanzraumes sich ausbildenden Schwingungen nur sehr geschwächt zur Geltung kommen, während bei den übrigen diese Schwächung nicht beträchtlich ist, und zweitens dadurch, dass zu den stets vorhandenen Resonanzräumen noch der von den Wänden des Gehörganges und dem Klebwachs vollständig begrenzte Raum hinzukommt. Wie zu erwarten ist, wirken beide Umstände dahin zusammen, dass die zwischen den beiden oben unterschiedenen Vocalreihen bestehenden wesentlichen Ver-

schiedenheiten verwischt werden. · Allerdings kann man die Fortleitung der den Vocalen der zweiten Reihe zugehörigen höheren Tonschwingungen zum Ohre nicht vollständig ausschliessen; auch kann der Experimentirende sich gegen die gewohnheitsmässige Kenntniss der Mundstellung nicht vollständig verschliessen; trotzdem kann er es dahin bringen, das *U* in das *I* und das *O* in das *E* überzuführen, ohne dass er irgend eine wesentliche Aenderung in der Klangfarbe oder in der Intensität des Gesammtklanges gewahrt; und dieses Verhalten tritt um so deutlicher hervor, als im Gegentheil infolge der Resonanz im Gehörgange Intensität und Klangfarbe beim Uebergange von einem Vocale der einen Reihe zu einem anderen derselben Reihe oder zu einem nicht entsprechenden der anderen Reihe sich sogar in weit erheblicherem Grade ändern, als unter gewöhnlichen Umständen.

Breslau, 5. September 1877.

XII. *Ueber die Tonhöhe einer Stimmgabel in einer incompressibeln Flüssigkeit; von Felix Auerbach.*

Wenn man eine angeschlagene Stimmgabel schnell in ein Gefäss mit Wasser taucht, so hört man, besonders wenn man das Ohr auf den resonirenden Tisch auflegt, einen Ton, dessen Höhe mit derjenigen der Stimmgabel in der Luft nicht übereinstimmt.

Diese Erscheinung, welche bisher ziemlich unbeachtet geblieben zu sein scheint (nur in Chladni's Akustik fand ich eine darauf bezügliche Bemerkung), ergibt sich als eine nothwendige Folge des Umstandes, dass die Zerstreuung der kinetischen Energie in den sogenannten incom-

pressibeln Flüssigkeiten unter anderen Verhältnissen erfolgt, als in den Gasen. In alle Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und für die Schwingungszahl geht nämlich die Quadratwurzel aus einer Grösse ein, welcher ohne weiteres eine bestimmte Bedeutung nicht zukommt. Zwar definirt man gewöhnlich den Elasticitätscoëfficienten schlechthin als das Verhältniss eines unendlich kleinen Druckzuwachses zu der entsprechenden unendlich kleinen Volumencompression; sein Werth hängt jedoch wesentlich davon ab, unter welchen Umständen die betrachtete Zustandsänderung vor sich geht. Von besonderer Wichtigkeit sind zwei Fälle, nämlich der, in welchem die Entropie des Systems constant bleibt, und der, in welchem die Temperatur constant bleibt. Bei den Schallschwingungen elastischer fester Körper in Gasen ist der erste Fall annähernd verwirklicht. Denn die Verdichtungen und Verdünnungen, welche das Gas abwechselnd erfährt, haben zwar Aenderungen der Temperatur zur Folge; bei dem Ausgleich derselben wird daher kinetische Energie an die Umgebung abgegeben werden; allein das Leitungsvermögen der Gase für Wärme ist so gering, dass die Zerstreuung der Energie für schnelle Schwingungen, wie es die Schallschwingungen sind, vernachlässigt werden kann; nach Clausius kann man hierfür auch sagen, dass die Entropie constant bleibt. Der andere Fall ist mit einer gewissen Annäherung verwirklicht, wenn der feste Körper in einer tropfbaren Flüssigkeit schwingt, deren Oberfläche zum Theil freie Oberfläche, d. h. zum Theil von einem elastischen Fluidum begrenzt ist. Waren in jenem Falle die Aenderungen der Entropie zu vernachlässigen, so sind es hier, und zwar aus dreifachem Grunde, die Aenderungen der Temperatur. Erstens sind die Verdichtungen sehr klein; also wird wenig moleculare Energie erzeugt; zweitens ist die specifische Wärme des Wassers sehr gross; also wird die Temperatur unverhältnissmässig wenig geändert; und drittens ist das Leitungsvermögen des Wassers für Wärme nicht so gering, dass nicht

immerhin noch ein beträchtlicher Theil der etwa doch eintretenden Temperaturänderungen durch Ausgleich wieder aufgehoben würde.

Die beiden Werthe des Elasticitätscoëfficienten in diesen beiden Fällen verhalten sich bekanntlich zu einander wie die beiden Werthe, welche die specifische Wärme besitzt, je nachdem der Druck oder das Volumen constant bleibt. Dieses Verhältniss ist von 1,4 nicht erheblich verschieden.

Daraus lässt sich auf die Art und Grösse der Tonänderung schliessen, welche bei dem eingangs erwähnten Versuche eintritt. Der Ton muss tiefer werden, denn die Elasticität bei constanter Temperatur ist kleiner, als bei constanter Entropie; und die beiden Töne in Luft und in Wasser müssen sich zu einander verhalten wie:

$$\sqrt{1{,}4} : 1,$$

d. h. wie 1,18 : 1 oder ungefähr wie 7 : 6; das Intervall muss also grösser sein als ein ganzer Ton und kleiner als eine kleine Terz.

Die Versuche ergeben in der That, dass sich das Intervall diesem von der Theorie geforderten Werthe als einem Maximum nähert: dass es im Durchschnitt etwas kleiner ist (nämlich für die mittlere Tonlage gerade ein ganzer Ton), kann nicht Wunder nehmen, wenn bedacht wird, dass die oben angestellten Betrachtungen für zwei ideale Grenzfälle gelten, zwischen denen die beiden Fälle der Schwingungen in Luft und Wasser liegen. Für einige wenige Töne habe ich die Vertiefung mit Benutzung der Schwebungen bestimmt, welche man hört, wenn man gleichzeitig mit der in Wasser getauchten Gabel eine andere Gabel, deren Ton ein ganzes Intervall tiefer ist, als der Ton der Versuchsgabel in Luft, ihre Schwingungen in der Luft ausführen lässt. Auf diese Weise fand ich für das Schwingungsverhältniss bei den folgenden Tönen die daruntersteheden Werthe:

c (132 Schw.)	c_1 (264 Schw.)	g_1 (396 Schw.)	c_2 (528 Schw.)
1,11 ($< 9:8$)	1,12 (9:8)	1,13 ($< 8:7$)	1,15 ($> 8:7$).

Auch das Ergebniss, welches man aus diesen Zahlen abliest, dass nämlich der ideale Grenzwerth des Intervalles mit um so grösserer Annäherung erreicht wird, je höher der Ton ist, d. h. je kleiner die Periode der Schwingung ist, stimmt nach dem oben Gesagten mit der Theorie überein.

Schliesslich habe ich noch einige Controlversuche mit anderen Flüssigkeiten angestellt. Dieselben ergeben, dass der Einfluss des Widerstandes der Flüssigkeiten, der von ihrer Dichtigkeit und Zähigkeit abhängt, und welcher für die Amplitude und das logarithmische Decrement der Stimmgabel-Schwingungen sehr wesentlich ist, hinsichtlich der Schwingungsdauer nicht merklich in Betracht kommt, selbst nicht bei Quecksilber und Glycerin, obgleich dort die Dichtigkeit, hier die Zähigkeit sehr gross ist.

Breslau, 15. October 1877.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1878. ANNALEN № 2.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND III.

I. *Ueber die Electricitätsleitung und Electrolyse der chemischen Verbindungen; von Dr. L. Bleekrode.*

§. 1. Einleitung.

Als Resultat seiner electrolytischen Untersuchungen gibt Hittorf[1]) namentlich an, dass die Electrolyte dadurch charakterisirt sind, dass in ihnen die entsprechenden Jonen einander vertreten können; sie sind also Salze im Sinne der neueren Chemie, und während der Electrolyse findet der Austausch zwischen denselben Bestandtheilen ihrer Molecüle statt, wie bei der doppelten Wahlverwandtschaft.

Mit der Schwierigkeit dieses Austausches soll der Leitungswiderstand der Electrolyte zusammenhängen, und deshalb z. B. Wasser und Blausäure so schlecht leiten.

In der Theorie von Magnus[2]) wird namentlich die Substituirbarkeit des Wasserstoffs durch andere Körper in Betracht gezogen.

Es schien mir daher wünschenswerth, sowohl die Folgerungen aus den Versuchen des Hrn. Hittorf zu prüfen, als auch zu untersuchen, ob die Anwesenheit der Wasserstoffs, welcher in der Verbindung entweder durch Metalle oder durch Atomgruppen (Radicale) vertretbar ist, verknüpft ist mit der Fähigkeit für Electrolyse; diese müsste also fehlen, wenn jener Austausch auch nach chemischen Vorgängen ausbleibt. Ich habe die einfachsten Verbindungen gewählt, welche ohne Lösungsmittel flüssig zu er-

1) Pogg. Ann. CVI. 1859.
2) Pogg. Ann. CII. 1857.

halten waren; dazu gehören selbstverständlich die condensirten Gase und ausserdem eine grosse Anzahl von Körpern aus dem Gebiete der organischen Chemie; wie z. B. die organischen Metallradicale, die Substitutionsproducte des Ammoniaks u. s. w. Es sind bis jetzt nur sehr wenige organische Substanzen auf ihre Electrolysirbarkeit in dieser Weise untersucht; ich glaubte auch deshalb, dass es nicht ohne Interesse sein würde, diese Lücke auszufüllen.

§. 2. Einrichtung der Versuche.

Das Material für diese Versuche war ziemlich beschränkt, indem ich Verbindungen auszuwählen hatte, die ein Metall oder Wasserstoff enthielten und zu gleicher Zeit in flüssigem Zustande erhalten werden konnten, sei es direct, oder durch hohen Druck, wie die Gase, oder durch Temperaturerhöhung. Es war am bequemsten, für die condensirten Gase die Faraday'sche Methode anzuwenden. Deshalb wurden sie in dickwandige Röhren eingeschlossen, in deren beide Enden ausgeglühte Platindrähte als Electroden eingeschmolzen waren. Der eine durchlief die ganze Länge des Rohres und näherte sich dem anderen bis 1, 2 oder 3 mm. Beide waren durch die Flüssigkeitsschicht getrennt, und die Glasleitung wurde durch diese Anordnung sehr erschwert, meist beseitigt. Auch die übrigen Substanzen, welche keinen hohen Druck zum Flüssigwerden brauchten, wurden in kurze gerade Röhren eingeschlossen, so dass also kleine Quantitäten ausreichten. Die Leitungsfähigkeit der electrolysirten Stoffe wurde aus der Ablenkung der Nadel eines Galvanometers mit Windungen von dünnem Drahte geschätzt, in dem der Strom von zwei in destillirtes Wasser eingesenkten Zink- und Silberdrähten schon eine Ablenkung von 5°, von zwei Silberdrähten in Wasser, die in die Leitung eingeschaltet waren, von 2° ergab. Zur Erzeugung des Stromes für die electrolytischen Versuche diente erstens eine galvanische Batterie von 20 grossen Bunsen-Deleuil'schen Elementen, zweitens eine Batterie von 40 Elementen, welche im Voltameter

600 ccm Knallgas pro Minute entwickelte, und drittens eine Batterie von 80 Elementen, welche 840 ccm pro Minute producirte. Andere Versuchsreihen wurden mit Inductionsströmen angestellt; ich benutzte dazu ein Ruhmkorff'sches Inductorium mit einer Funkenlänge von 15 mm und ein zweites, dessen Funken eine Länge von 42 bis 70 mm erreichten.

Só viel mir bekannt, sind für electrolytische Zwecke, ausser bei den Versuchen von Lapschin und Tichanowitsch[1]), keine so starken Ströme angewendet worden, namentlich nicht bei den von mir untersuchten Substanzen.

Die Chlorsilberbatterie von Hrn. Warren de la Rue in London liefert noch bei weitem stärkere Ströme; meine Experimente mit derselben werde ich in einem besonderen Abschnitte besprechen.

Der Strom wurde durch die Flüssigkeit und zugleich durch das Galvanometer geführt; es liesse sich aber fragen, ob die Ablenkung nicht etwa durch die Leitung des Stromes in dem Glasrohre[2]) und durch eine metallische, nicht electrolytische Leitung bedingt wäre. Um die etwaige Leitung durch das Glas zu bestimmen, falls sich nur eine geringe Ablenkung der Galvanometernadel zeigte, wurde durch Umkehren des Rohres die Flüssigkeit zwischen den Electroden entfernt. Die Leitung konnte nur noch durch die Glaswände geschlossen sein. Die jetzt noch zurückbleibende Ablenkung habe ich die Glasleitung genannt.

Da bisher keine Versuche vorliegen, nach denen ausser den Legirungen zusammengesetzte Körper nur metallisch und nicht zugleich electrolytisch leiten, so glaubte ich aus der Ablenkung der Galvanometernadel nicht nur auf die Leitungsfähigkeit der Verbindung schliessen zu können, sondern auch auf eine Electrolysirbarkeit, obgleich ich meistentheils keinen Polarisationsstrom beobachten konnte.

1) Bull. de l'Ac. de Petersb. IV. 1861.
2) Vgl. Beetz, Pogg. Ann. XCII. p. 465.

§. 3. Electrolyse des Wassers.

Die bisherigen Versuche, namentlich auch die neueren Beobachtungen von Kohlrausch, beweisen, dass Wasser und Alkohol bei möglichster Reinheit den Strom kaum noch leiten.

Auch Lapschin und Tichanowitsch fanden, dass Alkohol den Strom von 1000 Elementen nur leitete, wenn er Feuchtigkeit aufgenommen hatte.

Diese beiden Körper, welche jedenfalls den schlechten Leitern angehören, zeigen schon, dass die Anwesenheit des Wasserstoffs, welcher leicht gegen Metalle ausgetauscht werden kann, nicht immer eine für die Electrolyse hinreichende Leitung bedingt. In beiden können wir den Wasserstoff direct durch Kalium und Natrium vertreten lassen; beim Wasser auch durch Eisen, und doch scheint diese Eigenschaft hier keine besondere Bedeutung für die Leitung zu haben. Auch die Wahlverwandtschaft scheint hier keinen Antheil daran zu haben, sonst dürfte die Electrolyse dieser Körper nicht so zweifelhaft sein, da wir mehrere Reactionen kennen, worin sie ihre Bestandtheile austauschen, z. B. Wasser mit Kaliumoxyd, Wasser mit den Alkoholaten[1]); also in beiden Fällen mit Electrolyten. Beim Alkohol fordert jedoch die Zersetzung, z. B. mit den Chlormetallen, eine Temperaturerhöhung.

§. 4. Electrolyse der flüssigen Wasserstoffsäuren.

Die Verbindung des Wasserstoffs mit den Metalloiden wie Chlor, Brom, Jod, Schwefel u. s. w. liefert Körper, deren Electrolyse für den Zweck dieser Untersuchung von besonderem Interesse war, da sie zahlreiche chemische

---

1) In diesem Falle ist die Reaction:

$$\left.\begin{matrix}C_2H_5\\K\end{matrix}\right\}O + \left.\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\right\}O = \left.\begin{matrix}C_2H_5\\H\end{matrix}\right\}O + \left.\begin{matrix}H\\K\end{matrix}\right\}O.$$

Dieses Alkoholat ist ein Electrolyt; mit der Batterie von 20 B.-E. fand eine starke Gasentwickelung statt, wobei die Flüssigkeit sich braun färbte.

Reactionen zeigen, und fast alle bis jetzt nur in Wasser gelöst auf Electrolysirbarkeit geprüft waren. Da alle gasförmig sind, mussten sie condensirt werden.

Die Faraday'sche Methode zeigte sich hier als die zweckmässigste; sie gibt ziemlich leicht eine hinreichende Quantität von grosser Reinheit. Bei der Condensation des Chlorwasserstoffs u. s. f. wurde wie folgt verfahren: Nachdem in das längere Ende eines starken Glasrohres ein Platindraht eingeschmolzen war, der bis zum anderen Ende reichte, wurde concentrirte Schwefelsäure zur Hälfte eingegossen, und darauf, getrennt durch eine kleine Scheidewand von Löschpapier, Chlorammoniumkrystalle geschichtet. Weiter wurde das zweite Röhrenende umgebogen und daselbst ein kleiner Platindraht als zweite Electrode beim Schliessen des Rohres eingeschmolzen, der sich dem ersten bis auf 2 oder 3 mm näherte. Beide Metalldrähte waren also nie mit demselben Ende des Rohres verbunden, wodurch die Glasleitung erschwert wurde. Jetzt wurden durch Schütteln und zweckmässige Bewegung die Substanzen zur Entwickelung des Gases mit einander zusammengebracht und die Einwirkung durch eine mässige Erwärmung unterstützt, wobei besonders der Ueberführung der Zersetzungsproducte vorzubeugen war. Bei allen Versuchen gelang es schliesslich, im umgebogenen Theile der Röhre eine vollkommen reine Menge des flüssigen Gases anzusammeln. Der flüssige Schwefelwasserstoff wurde bereitet aus Schwefeleisen und verdünnter Schwefelsäure, Jodwasserstoffsäure aus einem Gemisch von Jod, Jodkalium und feuchtem rothem Phosphor; Bromwasserstoff aus flüssigem Brom und einem Gemisch von Bromkalium und feuchtem rothem Phosphor; Arsenikwasserstoff aus Arsenzink und verdünnter Schwefelsäure, Cyanwasserstoff aus Quecksilbercyanid durch Zersetzung mit Schwefelwasserstoff und Abkühlung. Nöthigenfalls war eine kleine Menge Chlorcalcium oder Aetzkalk zum Trocknen in dem umgebogenen Theile der Röhre aufgeschichtet.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Versuche mit diesen Körpern.

Tabelle 1.

Verbindung.	Galvanische Batterie		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
HCl	A = 0	G = 0 A = 0	A = 4°[2]	A = 10°	Funkenentlad. in der Fl. u. Zertrümmerung der Röhre.
HBr	A = 3°	G = 3° A = 3°	A = 0	A = 8°	Funkenentl. und Zertrümm. der Röhre.
HJ	A = 0	G = 0 A = 0	A = 0	A = 6°	Wärmeentwickl. merkbar. Jod ausgeschied.
H_2S	A = 0	G = 0 A = 0	A = 0	A = 6°	Funkenentl. u. Wärmeentwickl. merkbar. Zertrümm. d. Röhre.
H_3As	—	G = 0 A = 0	A = 0[3]	—	Keine Entladung; Entfernung der Electroden = 3 mm.
H Fl	Spur	—	—	—	—
HCN	A = 90°	A = 90°[1]	A = 3°[4]	—	Funke violett.

1) und 2) starkes Aufbrausen an den Electroden. 3) Wellenartige Bewegung an der Oberfläche. 4) Funkenentladung und Wärmeentwickelung.

In der Tabelle bezeichnet A die Ablenkung der Galvanometernadel beim Durchgang des Stromes durch die Flüssigkeit, G die der Glasleitung entsprechende Ablenkung.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass die meisten Wasserstoffsäuren ausserordentlich schlechte Leiter für den galvanischen Strom sind. Dieses Verhalten ist um so beachtenswerther, als hier Verbindungen vorliegen, welche in Wasser gelöst, (ebenfalls einem sehr schlechten Leiter) den besten Leitern und Electrolyten angehören. Eben deshalb, weil eine geringe Spur Wasser ausreicht, die Leitung sehr zu verbessern, kann das negative Resultat

die hinlängliche Reinheit der condensirten Gase beweisen[1]). Nur die Cyanwasserstoffsäure macht eine Ausnahme, da sie schon durch den Strom von drei oder fünf kleinen B.-E. zersetzt wird. Ich habe das Gas ganz trocken zu condensiren versucht, indem ich trockenes Quecksilbercyanid durch trockenen Schwefelwasserstoff zersetzte und das gebildete Gas über Phosphorsäureanhydrid leitete, bevor es in die Condensationsröhre kam. Am negativen Pole war Gasentwickelung (Wasserstoff), und am positiven Pole wurde wahrscheinlich Cyanplatin gebildet, welches die Flüssigkeit gelb färbte. Uebrigens ist diese Verbindung sehr leicht auf chemischem Wege zersetzbar; schon durch Licht zerfällt sie unter Bildung von Ammoniak. Auch der Electricität von hoher Spannung gegenüber bewahren diese Körper ihre isolirenden Eigenschaften, indem nur die grössere Funkenentladung bei einer Entfernung der Electroden von 2 bis 4 mm in ihnen auftritt. Die Leitung von Inductionsströmen ist in diesem Falle complicirt, da es schwierig ist, zu entscheiden, ob blos eine mechanische Entladung stattfindet, welche durch Wärmeentwickelung eine Art von Dissociation der Verbindung veranlasst, oder ob sie noch von einer eigentlichen electrolytischen Wirkung begleitet wird.

Bei der Chlorwasserstoffsäure[2]) wurde schon mit mäs-

---

1) Dieser Einfluss geringer Beimischungen ergibt sich z. B. aus einer Beobachtung von Becquerel, der Alkohol mit einer Batterie von 50 Elementen zersetzen konnte, wenn nur $^1/_{1000}$ Kali zugefügt war. Despretz fand die Electrolyse des Wassers mit $^1/_{2000}$ Schwefelsäure verschieden von der des destillirtes Wassers. Auch Kohlrausch hat hierauf hingewiesen. Pogg. Ann. Ergzbd. VIII. p. 4.

2) Die Leitung des Chlorwasserstoffs und Fluorwasserstoffs in flüssigem Zustande ist auch von Gore untersucht worden. (Proc. Roy. Soc. 1869. p. 256.) Mit einer Säule von 10 Smee-Elementen und in einer Entfernung der Electroden von 0,16 mm zeigte sich eine kleine Ablenkung am Galvanometer; auch mit dem Inductorium war Leitung merkbar von chemischer Wirkung begleitet Gore glaubt jedoch, dass das verflüssigte Gas nicht völlig rein gewesen sei. Fluorwasserstoff zeigte mit Goldelectroden fast keine Leitung.

sigen Inductionsströmen ein Aufbrausen an den Electroden beobachtet. Um die Ursache hiervon festzustellen, wurden die Inductionsströme (15 mm Funkenlänge in Luft) während vier Stunden durch die flüssige Säure geleitet, wobei keine Funkenentladung stattfand. Der die Säure enthaltende Theil der Röhre war in eine Kältemischung gesetzt, wodurch wenigstens die Temperatur auf 0° blieb. Am Ende des Versuches konnte keine Oberflächenänderung der Platinelectroden bemerkt werden. Bei sehr starker Abkühlung der Röhre nahm man kein Aufbrausen mehr wahr, dagegen eine wellenartige Bewegung der Oberfläche (s. w. u.). Wenn jetzt die Röhre aus der Kältemischung in die Luft gebracht wurde, trat bald das Aufbrausen an den Electroden wieder ein; demnach war die Gasentwickelung nur eine Folge der erhöhten Temperatur der Electroden durch die Entladungen. Am Galvanometer wurde nachher keine Polarisation beobachtet; es könnte indess die Flüssigkeit doch noch so weit leitend gewesen sein, dass der Oeffnungs- und auch der Schliessungsstrom durchgeleitet wären, oder der Widerstand der Flüssigkeit könnte für eine Ablenkung durch den Polarisationsstrom zu gross gewesen sein.

So wie das Leitungsvermögen dieser flüssigen Körper ein ganz anderes ist als im gelösten Zustande, ebenso ist ihr chemischer Charakter alsdann sehr verschieden. Ich habe dieses bei der Chlorwasserstoffsäure nachweisen können, indem ich in die Condensationsröhre vor der Schliessung einen blanken Zinkstreifen einlegte und darauf das Gas condensirte, so dass dann das Metall ganz in die Flüssigkeit eingetaucht war. Nach sieben Wochen konnte man erst hier und da auf dem Streifen kleine weisse Punkte von Chlorzink wahrnehmen; übrigens war das metallische Aussehen ziemlich gut bewahrt. Nach fast einem Jahre konnte man einen geringen weissen Niederschlag in der Röhre sehen. Beim Oeffnen der Röhre wurde der Zinkstreifen in der Luft gleich feucht, durch die hygroskopische Eigenschaft des abgelagerten Chlorzinks.

Auf einem Kupferstreifen war erst nach vier Monaten etwas weisses Pulver sichtbar, und später bildete sich allmählich ein weisser Niederschlag in der Röhre, höchst wahrscheinlich von wasserfreiem Kupferchlorür [1]). In flüssigem Schwefelwasserstoff wurde ein Zinkstreifen erst nach zwei Wochen deutlich angegriffen unter Bildung eines weissen Niederschlages (Schwefelzink) auf dem Boden der Röhre. Silber- und Kupferfäden wurden schon vor der Condensation von der Säure in Gasform mit einer Schwefelverbindung bedeckt, die sie dann vor weiteren Angriffen schützte. Danach tauschen die flüssigen Wasserstoffsäuren ihren Wasserstoff sehr schwierig gegen Metalle aus, mit denen sie sonst, in Wasser gelöst, sofort Chlormetalle bilden. Man könnte vielleicht glauben, dass diese Schwierigkeit durch das Experiment selbst bedingt sei, indem die erst gebildete Schicht des Chlormetalles oder der ausgeschiedene Wasserstoff infolge des hohen Druckes (50 bis 60 Atmosphären) an dem Metalle haften bleibt und weiter schützend wirkt. Indess gibt Gore (l. c.) bestimmte andere Beweise einer schwächeren chemischen Activität, indem die flüssige Chlorwasserstoffsäure auf Aetzkalk nicht, auf Metalloxyde und Carbonate, mit Ausnahme des kohlensauren Kalkes, nur sehr langsam, flüssige Fluorwasserstoffsäure nur auf Kalium und Natrium, nicht auf andere Metalle mit lebhafter Wasserstoffentwickelung einwirkt [2]).

Endlich könnte vielleicht die äusserst geringe Löslichkeit der neu gebildeten Substanzen in den flüssigen Säuren von Einfluss sein; sie scheinen nur sehr langsam, wenn einmal gelöst, zu diffundiren, und schliesslich am Boden der Röhre sich abzulagern. Für diese Auffassung spricht ein von mir angestellter Versuch, wonach kohlensaurer Kalk von gewöhnlichem wässerigen Chlorwasserstoff selbst unter einem Drucke von 50 — 60 Atmosphären zersetzt

1) Aehnliche Versuche von Gore mit einem Blei-, Eisen- und Magnesiumstreifen s. Phil. Mag. XXIX. p. 549 und Proc. Roy. Soc. 1869.

2) Mit Fluorwasserstoff war der Druck nicht höher als eine Atmosphäre.

wird; hierbei konnte also das Wasser lösend wirken. Es ist danach sehr zweifelhaft, ob der schwierige Austausch des Wasserstoffs in den flüssigen Gasen von ihrem speciellen chemischen Charakter bedingt wird, und es gibt daher noch keinen wesentlichen Grund, ihr schlechtes Leitungsvermögen mit demselben zu verknüpfen. Ausserdem ist es erwiesen, dass eine directe Einwirkung des hohen Druckes beide Erscheinungen nicht veranlasst haben kann. Die Versuche von Favre, Berthelot und Cailletet haben gezeigt, dass sogar ein Druck von 300 Atmosphären die chemischen Erscheinungen nicht direct beeinträchtigt, ebenso beobachtete Gassiot[1]) die Electrolyse des Wassers noch unter dem Drucke von 86 Atmosphären.

Herwig fand neuerdings keine bedeutende Aenderung des Leitungsvermögens bei einer Kupfersulfatlösung unter dem Drucke von 18 Atmosphären; es gibt also keine Gründe, dem Drucke in diesen Fällen eine directe Einwirkung auf die Resultate zuzuschreiben.

§. 5. Electrolyse der Anhydride.

Da eine Anzahl von Anhydriden gar keinen Wasserstoff in ihrer Zusammensetzung haben, so sollten sie, den früheren Hypothesen gemäss, den schlechten Leitern angehören. Ich wählte zur Prüfung nur diejenigen, welche möglichst rein dargestellt werden konnten und ohne Zersetzung schmelzbar waren. Daher war das Material beschränkt, das Salpetersäureanhydrid und das Phosphorsäureanhydrid z. B. konnten deshalb nicht angewandt werden, und nur zwei Gase, die schweflige Säure und die Kohlensäure brauchten condensirt zu werden. Erstere wurde durch eine Kältemischung flüssig gemacht, die andere nach der Faraday'schen Methode aus dem Ammoniumbicarbonat und verdünnter Schwefelsäure. Die folgende Tabelle umfasst die Resultate:

1) Jahresber. f. Chemie 1854. p. 523.

Tabelle 2.

Verbindung.	Galvanische Batterie		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
Anhydrid:					
Schweflige Säure SO_2	Spur.	Spur.	A = 0	A = 10°	Keine Funkenentlad. aber Aufbrausen an den Electroden.
Schwefelsäure SO_3	A = 0	A = 8° G = 6°		A = 90°	Starkes Aufbrausen an den Electroden.
Kohlensäure CO_2	A = 0	A = 0 G = 0	Spur.	Funkenentladung.	Zertrümmer. d. Röhre bei der Entladung.
Borsäure Bo_2O_3	A = 0				Keine Leitung des Stromes v. 950 B.-E. (L. und T.)
Arsenige Säure As_2O_3	A = 0				
Chromsäure CrO_3	Leiter.	A = 90°		A = 10°	
Osmiumsäure OsO_4	A = 0	A = 0		A = 40° und Zersetz.	Ein schwarzer Rückstand bei der Entlad. ausgeschieden.
Vanadinsäure VO_3	A = 30°				Zersetzung und Gasentwickelung durch den galv. Strom.
Molybdänsäure MoO_3	Leiter.				Zersetzung und Gasentwickelung durch den galv. Strom.
Essigsäure $(C_2H_3O)_2.O$	A = 25°	A = 40°	A = 4° Gasentw. an den Electrod.	A = 6°	Mit dem galv. Strome starke Gasentwickelung u. Polarisation der Electroden.
Benzoësäure $(C_7H_5O)_2.O$	A = 3°		Funkenentlad.		Bei Abstand der Electroden von 1 mm Funken mit Absatz von Kohle.
Phtalsäure $C_6H_4(CO)_2.O$	A = 20°		A = 6° Keine Funkenentlad.		Mit dem Inductorium starke Zersetzung u. Gasentwickelung an beiden Electroden.
Aepfelsäure $(C_2HO)_2.O$	A = 8°		Zersetz. ohne Funk.		Entfernung der Electroden = 3 mm.
Buttersäure $(C_4H_7O)_2.O$	A = 3°		Funkenentladung.		Funken mit blauer Farbe. Entfern. der Electrod. = $1\frac{1}{2}$ mm.

Die Tabelle umfasst drei Gruppen von Anhydriden; nämlich die Anhydride, in welchen der Sauerstoff mit einem Metalloide verbunden ist, die Anhydride der organischen Säuren und die Anhydride, welche ein Metall enthalten. Die erste Gruppe zählt sehr schlechte Leiter; bei der schwefligen Säure und der Schwefelsäure (Ablenkung von nur 2° mit 80 B.-E.) ist die Leitung kaum merkbar, es kann dieselbe noch von einer Spur Wasser herrühren, da die Bereitung der ersten Verbindung durch eine Kältemischung geschah, und die zweite, obgleich sie eine gut krystallisirte Substanz bildet, doch äusserst hygroskopisch ist. Der Wasserdampf aus der Luft ist hierbei sehr schwierig zu beseitigen; besser gelingt dies bei der Kohlensäure, welche dann auch gar keine Leitung zeigt [1]).

Von den chemischen Reactionen dieser Körper im flüssigen Zustande ist wenig bekannt; verschiedene Metalle wirken auf sie bei einiger Temperaturerhöhung reducirend ein; flüssige Kohlensäure übt nach Gore keine chemische Wirkung aus, hat ein sehr geringes Lösungsvermögen und wird nur von den Alkalimetallen reducirt. Die Anhydride, welche Metalle enthalten, gehören (soweit bekannt) zu den guten Leitern mit Ausnahme der Osmiumsäure. Diese Verbindung (welche schon bei 40° schmilzt) wird von einem sehr starken galvanischen Strome (80 B.-E.) nicht zersetzt, obgleich ihre chemischen Eigenschaften denen der drei anderen Anhydride analog sind, welche schon mit einer Batterie von 16 B.-E. gespalten wurden [2]); sie tritt ebenso leicht ihren Sauerstoff an oxydirbare Körper ab, wie diese. In ähnlicher Weise zeigt sich, dass leichte chemische Zersetzbarkeit nicht ein gutes Leitungsvermögen bedingt, an der Untersalpetersäure (NO_2), welche wohl nicht den Anhydriden angehört, daher auch nicht in

1) Gore, Philos. Trans. I. 1861. p. 83. Als die Electroden 2 mm von einander entfernt waren, ging der Strom von 40 Smee-Elementen nicht durch; ebenso wenig die Entladung eines Inductoriums, wenn nur 0,2 mm Flüssigkeit die Electroden trennte.

2) Vgl. die Versuche von Buff Pogg. Ann. CX. p. 267. 1859.

obige Tabelle aufgenommen ist. Das Gas wurde durch eine Kältemischung flüssig gemacht und war vollkommen rein. In diesem Zustande leitete sie den galvanischen Strom von 80 B.-E. durchaus nicht und bei einer Entfernung der Electroden von nur 1 mm konnte ein Inductionsfunken von 15 mm Länge nicht durchgehen. Und doch hätte nach der Hittorf'schen Theorie diese Verbindung ein Electrolyt sein sollen, da sie mit Wasser oder mit Kalihydrat eine Zersetzung durch Wahlverwandtschaft erleidet. Im flüssigen Zustande wirkt sie auf Metalle und Metalloxyde, mit denen sie salpetersaure Salze unter Entbindung von Stickstoffoxyd bildet [1]). Ebenso wie bei Fluorwasserstoff war auch hier der Druck nur der der Atmosphäre, und die Metalle, wie Blei, Quecksilber, Kalium und Natrium wirkten noch bei sehr niedriger Temperatur ein, wenn auch etwas träge. Die chemischen Eigenschaften scheinen also durch den tropfbaren Zustand allein nicht beeinträchtigt zu werden.

Die Anhydride der organischen Säuren sind, soweit die Prüfung angestellt wurde, Leiter, ohne dass jedoch behauptet werden kann, es sei damit eine leichte chemische Zersetzbarkeit verknüpft. Zwar wird im Essigsäureanhydrid der Wasserstoff von Kalium und von Zink direct ausgetrieben, die gegenseitige Zersetzung mit anderen Verbindungen tritt aber nur bei höheren Temperaturen ein; bei der Benzoësäure und der Phtalsäure tritt öfters das ganze Molecül, ohne zersetzt zu werden, in die neue Verbindung.

§. 6. Electrolyse der Amine und Amide (Ammoniaksubstitute).

Zunächst untersuchte ich das Ammoniak selbst. Mit dem Gase wurde Chlorsilber oder Chlorcalcium gesättigt und mit denselben Aetzkalk und Natrium in das Condensationsrohr eingeschlossen, um beim Austreiben des Gases

1) Richard Müller, Liebig Ann. CXXII. p. 1. 1859.

durch Erwärmung noch die letzten Spuren von Wasser zu beseitigen. Das abgeschiedene flüssige Ammoniak wurde mehrfach auf das Natrium zurückgegossen und von neuem überdestillirt[1]).

Das flüssige Ammoniak ist ein guter Leiter und wird vom Strom zersetzt. Die Batterie von 20 B.-E. gab schon eine Ablenkung der Multiplicatornadel von 5° bis 10°, welche mit 80 B.-E. auf 90° stieg. Dabei zeigte sich dann die eigenthümliche Erscheinung einer reichlichen Gasentwickelung, wobei zugleich die Flüssigkeit hellblau gefärbt wurde; diese Färbung verschwand, sobald der Strom aufhörte, ausserdem wurde die Flüssigkeit sehr warm. Das Ammoniak verhält sich also als Electrolyt; die positive Electrode schwärzte sich, und ein deutlicher Polarisationsstrom konnte nachher beobachtet werden. Es war nicht möglich, über die Zersetzungsproducte bestimmt zu entscheiden; eine Spaltung in H und NH_2 ist möglich, obgleich NH_2 nur in Verbindung mit Metallen bekannt ist[2]). Die Tabelle 3 a. f. S. umfasst die Resultate mit den dem Ammoniak analogen Körpern.

Es gehören zu dieser Reihe nur zwei condensirte Gase, das Ammoniak und das Methylamin, die übrigen sind bei gewöhnlicher Temperatur flüssig oder schmelzbar, ohne Zersetzung. Eine bestimmte Electrolyse findet statt bei dem Ammoniak, dem Aethylamin und dem Methylamin,

---

1) Ich habe auch die Condensation mit flüssiger schwefliger Säure versucht; es steht aber dann eher eine Verunreinigung mit Wasserdampf aus der Luft und die Bildung von schwefligsaurem Ammoniak zu befürchten.

2) Weyl (Pogg. Ann. CXXI. p. 607) beschreibt die Bildung des Körpers $\left.\begin{matrix}NH_3\\H\end{matrix}\right\}$. Er erhielt eine blaue Flüssigkeit, welche bei einer Temperatur von 12° bis 14° zerfällt. Es zeigt sich die beginnende Zersetzung durch eintretende Entfärbung der vorher tief dunkelblauen Flüssigkeit und endet unter Zurücklassung völlig farblosen Ammoniaks als leicht beweglicher Flüssigkeit. — Dieses stimmt überein mit meinen Beobachtungen und es konnte also auch hier Ammonium ausgeschieden sein nach der Reaction: $2NH_3 = NH_4 + NH_2$.

Tabelle 3.

Verbindung.	Galvanische Batterie.		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
Ammoniak $\left.\begin{matrix}H\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	G = 0 A = 5°	G = 0 A = 90°	A = 10° starkes Aufbrausen.	A = 20° keine Funkenentl.	Durch den galvan. Strom Gasentwickelung, Flüssigkeit blau.
Äthylamin $\left.\begin{matrix}C_2H_5\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 4°	A = 20°	A = 4°	A = 8° starke Erwärmung.	Keine Funkenentladung.
Diäthylamin $\left.\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 3°				Funkenentl. bei Entfernung der Electroden auf 3 mm.
Triäthylamin $\left.\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix}\right\}N$	A = 0	G = 0 A = 4°	Keine Funkenentl.		Bei Entf. d. Electr. bis 1 mm Entl. d. Induct durch eine wellenartige Beweg. d. Flüssigkeit.
Propylamin $\left.\begin{matrix}CH_3\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 7°	A = 20° Gasentwickel.	A = 5° starke Erw. u. Aufbr.	A = 9° keine Funkenentl.	
Methylamin $\left.\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 6°		Starke Zersetz. u. Gasentwickel.		Keine Funkenentl. bei Abstd. der Electroden von 2,5 mm.
Trimethylamin $\left.\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\end{matrix}\right\}N$	A = 0	A = 4°	Funkenentl. u. starke Erwärm.		Entfernung d. Electroden = 2 mm.
Amylamin $\left.\begin{matrix}C_5H_{11}\\H\\H\end{matrix}\right\}N$		A = 10°	Funkenentlad. b. Entf. der Electr. auf 2 mm.		Bei grösserer Entf. als 2 mm Erschütterungen merkbar a. d. längeren Electrode.
Propylamin $\left.\begin{matrix}C_3H_7\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	G = 0 A = 0		Funkenentladung.		Bei gering. Entf. d. Electr. als 2 mm. schlag. Funk. durch mit grün. Farbe; Erschütt. d. Electr.
Allylamin $\left.\begin{matrix}C_3H_5\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 2°		Funkenentl. A = 10° starke Erw.		Entfernung d. Electroden = 2 mm.
Anilin $\left.\begin{matrix}C_6H_5\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 0	Spur.	Keine Wirkung.		Entfernung d. Electroden = 1 mm.
Phenylamin $\left.\begin{matrix}C_6H_5\\C_6H_5\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 0		Funkenentl. Entf. der Electr. = 1 mm.		Schmelzbar; bei d. Entl. wird Kohle ausgeschieden.
Äthylanilin $\left.\begin{matrix}C_2H_5\\C_6H_5\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 0	Spur.	Funkenentladung.		Funk. schlag. durch mit hellgrün. Farbe; Entf. d. Electr. = 2 mm; Ausscheidung von Kohle.
Naphtylamin $\left.\begin{matrix}C_{10}H_7\\H\\H\end{matrix}\right\}N$	A = 0	A = 0	A = 0 keine Wirkung.	Keine Leitung.	Schmelzbar; Entfern. d. Electr. = 3 mm; keine Entl.

indem schon eine Batterie von 5 B.-E. einen Polarisationsstrom nachher hervorbringt. Die Verbindungen, in denen das Alkoholradical mehr als ein Atom *H* ersetzt hat (Di- und Triäthylamin u. s. w.), zeigen eine Verringerung des Leitungsvermögens, was mit dem Zurücktreten der chemischen Reactionsfähigkeit im Einklange sein kann. So sind bei den secundären und tertiären Aminen die basischen Eigenschaften geringer, die Löslichkeit nimmt ab u. s. w. Die Reihe des Phenylamins (Anilin) umfasst sehr schlechte Leiter und beim Naphthylamin schlagen sogar die Inductionsfunken von 70 mm nicht durch.

Das chemische Verhalten dieser Körper in dem leichten Austausch ihres Wasserstoffs gegen Metalle ist nicht immer in Uebereinstimmung mit der Leitungsfähigkeit. Im Phenylamin z. B. wird Wasserstoff direct ausgetrieben von Kalium; Kupfer- und Quecksilberverbindungen bilden sich bei gewöhnlicher Temperatur durch Wahlverwandtschaft; dagegen tritt mit dem gasförmigen Ammoniak der Austausch mit Kalium und Natrium, auch mit Silber nur bei Temperaturerhöhung ein. Im flüssigen Zustande scheinen sogar seine chemischen Wirkungen weit geringer zu sein. Aus den Beobachtungen von Gore[1]) ergibt sich, dass diese Flüssigkeit ein ziemliches Lösungsvermögen hat für gewisse anorganische Salze, so wie auch für Kalium und Natrium, aber ohne von diesen zersetzt zu werden. Weyl fand mit Quecksilber und Zink nach tagelanger Berührung keine Veränderung. Und doch zeigt das Ammoniak eine weit bessere Leitung als das Phenylamin. Die Erscheinungen der Wahlverwandtschaft sind hier wenig maassgebend, da diese Körper meistens durch ihre Eigenschaft als Basis wirken, ohne selbst dabei sich zu zersetzen. Zu den doppelten Zersetzungen bedarf es oft einer starken Temperaturerhöhung, z. B. bei der Wirkung von Ammoniak auf essigsaures Aethyl, wobei Acetamid bei 130° gebildet wird, oder auf Chloracetyl (unter Bildung von Acet-

1) Proc. Roy. Soc. XX. p. 441 1872.

amid und Salzsäure), erst bei 120°. Dagegen tritt die Wirkung von Phenylamin auf Chloracetyl schon bei gewöhnlicher Temperatur unter Bildung von Acetanilid sehr energisch ein.

Electrolyse der Amide.

Tabelle 4.

Verbindung.	Galvan. Batterie. 20 B.-E.	Inductor. Funkenlge. = 15 mm.	Bemerkungen.
Benzamid $C_7H_5O\atop H_2\}N$	A = 90°	A = 30°	Schmelzbar; keine Funkenentladung, sondern starke Zersetzung.
Acetamid $C_2H_3O\atop H_2\}N$	A = 90°		Schmelzbar.
Formamid $CHO\atop H_2\}N$	A = 90°	A = 15°	Flüssig; starkes Aufbrausen an den Electroden.
Butylamid $C_4H_7O\atop H_2\}N$	A = 70°	A = 8°	Schmelzbar; Entf. d. Electr. = 4 mm; starke Gasentwickel. an beiden Electr.

Diese Körper sind ausgezeichnete Leiter, daher wurden nur geringere electromotorische Kräfte zur Prüfung angewandt. Bei allen tritt eine sehr merkbare Zersetzung mit Gasentwickelung ein.

Uebrigens sprechen ihre chemischen Eigenschaften zu Gunsten der oben erwähnten Hypothesen, indem sie leicht ein Atom Wasserstoff gegen Metalle austauschen; die Zersetzungen durch Wahlverwandtschaft treten dagegen meistens nur mit Hülfe der Temperaturerhöhung ein.

§. 7. Electrolyse der organischen Metallverbindungen.

Diese Metallverbindungen gehören zu den schlechtesten Leitern der Electricität; selbst hohe Spannung reicht nicht immer hin, den Widerstand zu überwinden. Doch scheint eine Durchströmung bei dem Quecksilbermethyl stattzufinden; bei Entfernung der Electroden von 4 mm versuchte ich den Inductionsstrom durchzuleiten, dessen Funkenlänge in Luft 15 mm war; es trat keine Entladung durch die

Flüssigkeit ein, selbst nicht bei Annäherung bis auf 2 mm, aber dieselbe gerieth in eine wellenartige Bewegung, wobei auch die längere Electrode in Vibration kam (s. w. u.). Als die Electroden bis 1 mm einander genähert wurden. zeigte sich die Funkenentladung.

Tabelle 5.

Verbindung.	Galvan. Batterie. 80 B.-E.	Inductor. Funkenlge. = 70 mm.	Bemerkungen.
Zinkäthyl $(C_2H_5)_2Zn$	A = 0	A = 0	Keine Funkenentladung.
Quecksilberäthyl $(C_2H_5)_2Hg$	A = 0	A = 0	Wellenartige Bewegung der Flüssigkeit.
Zinkmethyl $(CH_3)_2Zn$	A = 0	Spur	Schwache Erwärmung.
Quecksilbermethyl $(CH_3)_2Hg$	A = 0	Spur	Schwache Erwärm. bei Entf. d. Electr. auf 3 mm und Funkenentladung.
Aluminiummethyl $(CH_3)_3Al$	A = 0	A = 0	Entf. d. Electr. = 3 mm; Erschütt. d. läng. Electr.
Zinkamyl $(C_5H_{11})_2Zn$	A = 0	A = 0	Entf. d. Electr. = 3 mm; starke Erschütt. d. läng. Electr.; Funkenentl. bei 2 mm Entfernung.

Die isolirenden Eigenschaften dieser Körper lassen sich gar nicht in Einklang bringen mit den oben erwähnten Hypothesen, nach denen eine gute Leitung zu erwarten wäre [1]). Sie sind charakterisirt durch eine sehr lose Bindung ihrer Bestandtheile; sie werden leicht von den meisten Agentien durch Wahlverwandtschaft zersetzt oder tauschen ihr Metall gegeneinander selbst bei gewöhnlicher Temperatur aus. So bildet sich aus dem Quecksilbermethyl mit

1) Hittorf sagt in seiner Abhandlung (l. c. p. 500) hierüber: „Frankland und Löwig ist es gelungen, auch die entschieden basischen Metalle mit Alkoholradicalen zu paaren. Die Verbindungen, welche sich wie die gewöhnlichen Salze verhalten, werden auch Electrolyte sein; soviel ich weiss, ist jedoch nichts über die Electrolyse veröffentlicht worden." Durch die obigen Resultate wird diese Meinung nicht bestätigt.

Aluminium Aluminiummethyl; auch wird das Quecksilber durch Zink durch doppelte Zersetzung ausgeschieden; mit Chlorblei oder mit Quecksilberchlorid bilden sich aus dem Zinkäthyl die entsprechenden Aethylverbindungen; Wasser und verdünnte Säuren verwandeln das Zinkäthyl in ein Hydrat und Aethylhydrür u. s. w.

Einige anorganische Metallverbindungen sind als sehr schlechte Leiter bekannt, z. B. das Chlorzinn ($SnCl_4$); ich fand keine Ablenkung des Galvanometers mit einer Batterie von 80 B.-E. Damit könnte das chemische Verhalten übereinstimmen, da das Chlorzinn bei verschiedenen Reactionen, ohne Zersetzung, fast immer als Atomgruppe aufgenommen wird. Dasselbe gilt für das Antimoniumpentachlorid und das Arsenchlorid, bei dem ich die Resultate von Buff[1]) jetzt mit viel stärkeren Strömen bestätigt fand. Die Verbindungen des Quecksilbers mit den Halogenen sind schmelzbar und leiten dennoch sehr schlecht die Electricität; indessen werden sie von den meisten Metallen zersetzt und scheinen auch nur durch schwache Verwandtschaft zusammengehalten zu werden. Hittorf versucht diese Thatsachen mit einander in Uebereinstimmung zu bringen, indem er bemerkt, dass die Zersetzungen durch doppelte Wahlverwandtschaft ausbleiben, da die Sauerstoffsäuren, welche als die stärksten betrachtet werden, weder im verdünnten noch im concentrirten Zustande, weder in der Kälte noch in der Wärme diese Verbindungen zerlegen. Aber diese Bemerkung ist nicht auf die organischen Metallverbindungen anwendbar, auf welche concentrirte und verdünnte Säuren sofort einwirken und neue Körper als Zersetzungsprodukte liefern. So z. B. gibt das Zinkäthyl mit Salzsäure Chlorzink und Aethylhydrür; das Quecksilberäthyl mit verdünnter Schwe-

1) Pogg. Ann. CX. p. 267. 1859. Buff fand keine Leitung bei diesen Körpern mit einer Batterie von 16 Elementen, und er hält das Chlorzinn für einen absoluten Nichtleiter. Lapschin und Tichanowitsch beobachteten ebenfalls keine Leitung mit dem Strome von 370 Elementen beim Antimonoxychlorid.

felsäure Aethylhydrür und eine Schwefelsäureäthylverbindung u. s. w. Das Resultat dieser Versuchsreihe ist also, dass hier keine einfache Beziehung zwischen chemischer und electrolytischer Zersetzbarkeit nachzuweisen ist.

§. 8. Electrolyse einiger einfacher Kohlenstoffverbindungen.

Tabelle 6.

Verbindung.	Galvan. Batterie 80 B.-E.	Inductorium Funkenlge. = 15 mm.	Inductorium Funkenlge. = 70 mm.	Bemerkungen.
Cyan C_2N_2	A = 0	A = 0, keine Funken-entladung.	Funken-entladung.	Die Funk. schlag. durch m. hellweisser Farbe, u. Kohle wird ausgeschieden.
Schwefelkohlenstoff CS_2	A = 0	Funken-entladung.		Entf. d. Electr. = 1 mm; Kohle wird ausgesch.
Kohlenstoffdichlorid C_2Cl_4	A = 0	A 4°, keine Funkentl.	Funken-entladung.	
Kohlenstofftrichlorid C_2Cl_6	A = 0	A = 2°, Erwärm.	Funken-entladung.	Schmelzbar bei 160°.
Kohlenstofftetrachlorid CCl_4	A = 0	A = 0	Funken-entladung.	

Die Versuche stimmen darin überein, dass alle diese Verbindungen ausserordentlich schlechte Leiter für den galvanischen Strom sind. Bei den zwei ersten habe ich dies noch mit einer viel stärkeren Batterie nachweisen können (§. 10).

In chemischer Beziehung zeigt sich das Cyan, obgleich es in Lösung in Wasser oder Ammoniak schnell zersetzt wird, als condensirtes Gas als ein äusserst indifferenter Körper von sehr geringem Lösungsvermögen. Gore[1]) fand, dass von 32 Substanzen nur 14 aufgelöst wurden, und keine zeigte eine starke chemische Einwirkung.

Schwefelkohlenstoff indess zersetzt sich in Berührung mit gewissen Verbindungen und zeigt mit Electrolyten den

1) Proc. Roy. Soc. XX. p. 67.

Austausch durch Wahlverwandtschaft. Kaustisches Kali z. B. löst denselben und bildet kohlensaures Kali und ein Sulfocarbonat; mit Ammoniaklösung entsteht ein Sulfocarbonat und Sulfocyanammonium u. s. w. Dennoch leitet er nicht den Strom einer Batterie von 950 B.-E. Die Chlorverbindungen des Kohlenstoffs sind auch fast isolirend, die Inductionsfunken von 50 mm z. B. schlagen im Kohlenstofftetrachlorid nicht durch eine Strecke von 10 mm, sondern gleiten längs der inneren Wände des Rohres. Hier finden indess auch Zersetzungen durch Wahlverwandtschaft, z. B. mit Kalihydrat, nur nach längerer Zeit und mit Temperaturerhöhung statt, und die Säuren wirken nur bei Gegenwart eines Metalles ein. Dieses Verhalten würde also einigermaassen für die Hittorf'sche Hypothese sprechen; auch mit Rücksicht auf die Rolle, welche der Wasserstoff bei der Electrolyse spielen könnte ist zu beachten, dass diese schlechten Leiter gerade Verbindungen sind, die gar keinen Wasserstoff enthalten[1]).

§. 9. Electrolyse einiger Kohlenwasserstoffe und Haloidverbindungen der Alkoholradicale.

Nur zwei der von mir untersuchten Verbindungen, das Diäthyl und Dimethyl (Aethylhydrür) brauchten condensirt zu werden. Dieses gelang leicht, indem sie nach der Frankland'schen Methode aus Jodäthyl und Jodmethyl durch Zersetzung mit Zink bei hoher Temperatur bereitet wurden. Die Resultate sind in Tab. 7 (p. 182 – 184) zusammengestellt. Da einige dieser Körper sich gegen die Säuren indifferent verhalten und auch ihren Wasserstoff nicht gegen Metalle auswechseln, andere dagegen die gegenseitige Zersetzung zeigen, so geben sie wieder Gelegenheit, die erwähnten Hypothesen zu prüfen. Dem galvanischen Strome gegenüber verhalten sich die geprüften Kohlenwasserstoffe als sehr schlechte Leiter; ihr chemisches Verhalten gegen die stärksten Säuren, wie Salpetersäure

1) Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Anhydride, welche aus Sauerstoff und einem Metalloid gebildet sind (Tab. 2), und für das NO_2.

Tabelle 7.

Verbindung.	Galvan. Batterie		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
	A	A			
Diäthyl $(C_2H_5)_2$	0	2^0	A = 2^0	A = 10^0	Starke Nebel bild. sich und Aufbraus. ohne Funkenentladung.
Chloräthyl C_2H_5Cl	2^0	3^0		Funkenentladung.	
Jodäthyl C_2H_5J	Spur.	2^0 (G=0)	A = 5^0	Starke Erwärm. und Ausscheid. von Jod.	Entf. d. Electr. = 1 mm.
Sulfäthyl $(C_2H_5)_2S$	Spur.	2^0	A = 20^0		Funkenentl. u. d. Flüss. wird gefärbt. D. Funken schlag. durch m. grüner Farbe.
Bromäthyl C_2H_5Br		2^0	Starkes Aufbraus.		Zersetz. durch d. Inductstr. u. d. Flüss. färbt sich gelb.
Aethylenbichlorid $C_2H_4Cl_2$	0	3^0 (G=0)	Funkenentladung.		
Aethylenbromid $C_2H_4Br_2$	0	0		Keine Wirkung.	
Mercaptan C_2H_5SH	0		Spuren von Leitung.		Bisweil. tritt Funkenentladung ein.
Dimethyl $(CH_3)_2$	0	0		A = 4^0 starkes Aufbraus.	Keine Funkenentlad.
Jodmethyl CH_3J	4^0		Starke Wärmeentwickelung.	A = 5^0 Funkenentladung.	Die Flüss. wird sehr warm aber nicht gefärbt bei d. Entlad.
Amylen C_5H_{10}	0	0	A = 0 keine Wirk.	Funkenentladung.	Funken schlagen durch mit grüner Farbe.
Amylenbromid $C_5H_{10}Br_2$	2^0	4^0	A = 0	A = 15^0 Funkenentladung.	
Chloramyl $C_5H_{11}Cl$		4^0	A = 4^0 Funkenentladung.	A = 30^0	Die Flüss. wird durch d. Entl. schwarz gef.
Bromamyl $C_5H_{11}Br$	0	4^0 (G=0)	A = 0	A = 6^0	Aufbraus. d. Flüss., welche gelb gef. wird.
Jodamyl $C_5H_{11}J$	0	0	A = 0	Funkenentladung A = 10^0	Viel Jod wird bei der Entl. ausgeschieden.
Sulfamyl $(C_5H_{11})_2S$	0		A = 0 kein Funken.		Entf. d. Electr. = 3 mm, wellenart. Beweg. d. Flüss. u. Vibrat. der längeren Electrode.

Tabelle 7.

Verbindung.	Galvan. Batterie		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
Amylalkohol $C_5H_{11}OH$	A	A 0	Keine Wirkung.		L. u. T. fanden m. 900 B.-E. u. Entfern. d. Electr. von 1 mm etwas Leitung.
Trichlorallyl $C_3H_5Cl_3$	15°		Funkenentladung.	Funkenentladung.	Entf. d. Electr. = 5 mm, Kohle wird von den Funken ausgeschied.
Tribromallyl $C_3H_5Br_3$	3°	15°	A = 0		Kohle wird ausgesch. bei der Entladung.
Jodallyl C_3H_5J	6°	20°	A = 0 keine Erwärmung.	A = 15° Funkentl.	Zersetz. durch d. Entl. Entwickel. von braunen Dämpfen.
Sulfallyl $(C_3H_5)_2S$	0		A = 0 keine Wirk.		Entf. d. Electr. = 1 mm, Vibr. d. läng. Electr.
Benzol C_6H_6	0	0	Keine Wirkung.		In einer Richt. schlag. d. Funk. von 15 mm durch m. hellblauer Farbe. Entf. d. Electr. = $2^1/_2$ mm, Erschütt. d. längeren Electr.
Brombenzol C_6H_5Br	0	0	Keine Wirkung.	Funkenentladung A = 20°	Die Flüssigkeit färbt sich schwarz.
Nitrobenzol $C_6H_5(NO_2)$	0		A = 0 keine Wirk.		Vibr. d. länger. Electr. Entfern. der Electr. = 2 mm.
Binitrobenzol $C_6H_4(NO_2)_2$	6°		A = 20°		Schmelzb.; keine Funkenentladung.
Phenol C_6H_5OH	10°		A = 3° Funkenentladung.		Entf. d. Electr. = 2 mm.
Nitrophenol $C_6H_4(NO_2)OH$	2°		A = 0 keine Wirk.		Schmelzbar bei 45°, schwache Vibr. der läng. Electr. Entf. d. Electr. = 3 mm.
Trinitrophenol $C_6H_2(NO_2)_3OH$	2°		A = 10° Zersetzung ohne Funk.		Schmelzb. b. 42°, Entf. d. Electr. = 4 mm, Gasentwickel. a. den Electroden.
Toluol $C_6H_5CH_3$	0	0	Funkenentladung.		Ohne Funkenentl. tritt eine wellenart. Beweg. d. Flüss. ein.
Bromtoluol $C_6H_4BrCH_3$	0	0	Funkenentladung.		Einzel. Funk. schlagen durch, Entf. d. Electr. = 1 mm.

Tabelle 7.

Verbindung.	Galvan. Batterie		Inductorium		Bemerkungen.
	20 B.-E.	80 B.-E.	Funkenlge. = 15 mm.	Funkenlge. = 70 mm.	
Nitrotoluol $C_6H_3(NO_2)CH_3$ Ortho-	A 2^0	A	Funkenentladung.		Flüssig, Entf. d. Electr. = 3 mm, die Flüss. wird braun gef. durch die Entladung.
Para-	2^0 (G=0)		A = 10^0 Funkenentladung.		Stark. Aufbraus. bei d. Funkenentl.; d. Flüssigk. färbt s. schwarz.
Binitrotoluol $C_6H_3(NO_2)_2CH_3$	2^0		Funkenentladung.		Entf. d. Electr. = 2 mm, nur bei d. Entl. zeigt s. Abl. d. Galvanom. = 8^0, schwache Vibr. d. läng. Electrode.
Naphtalin $C_{10}H_8$	0	0	Keine Wirkung.	Keine Wirkung.	Schmelzb. b. 79^0, Entf. d. Electr. = 5 mm, sehr schlecht. Leiter.
Nitronaphtalin $C_{10}H_7(NO_2)$	5^0	30^0	A = 40^0 Funkenentladung.	Funkenentladung.	Schmelzbar bei 43^0.
Binitronaphtalin $C_{10}H_6(NO_2)_2$	8^0	40^0 u. Zers.		Funkenentladung.	Schmelzb. b. 210^0, Entf. d. Electr. = 4 mm
Nitroanilin $C_6H_4(NO_2)NH_2$	90^0		A = 90^0		Starke Zersetz. mit d. Inductionsströme.

und Schwefelsäure, ist verschieden. Das Diäthyl ist ganz indifferent und leidet keine Zersetzung, das Dimethyl ebenso gegen die Schwefelsäure. Amylen wird von Schwefelsäure gespalten, und diese Körper bilden nur dadurch Derivate, dass sie die Halogene direct an sich binden. Das Benzol, das Toluol und das Naphtalin sind äusserst schlechte Leiter und sollten also vielleicht auch in chemischer Beziehung neutral sein. Aber hier ist der Wasserstoff leicht durch die Halogene zu ersetzen[1]); sie werden direct zersetzt von der Schwefelsäure und der Salpeter-

1) Die Substitution von Metallen für Wasserstoff in diesen Kohlenwasserstoffen ist nicht bekannt. Das Natriummetall wirkt auf Benzol ein; Berthelot bestreitet dieses jedoch. Auf Toluol wirken sie nicht ein.

säure, indem Wasser ausgeschieden wird und Sulfosäuren und Nitroverbindungen entstehen; sonst werden sie von den Alkalien nicht angegriffen, oder die Reactionen treten nur bei hohen Temperaturen ein. Da also hier weder Wasserstoff gegen Metalle ausgetauscht wird, noch Zersetzung durch eigentliche Wahlverwandtschaft eintritt, geben diese Verbindungen Belege für meine Hypothese, wie für die von Hittorf; und dieses gilt auch für Substitute, wie z. B. das Brombenzol (ein schlechter Leiter, der z. B. von Aetzkali oder vom essigsauren Silber nicht zersetzt wird), auch für einige Nitroverbindungen. Nitrobenzol ist ein schlechter Leiter und wird von den Alkalien nur schwach angegriffen, ebenso Binitrotoluol, das sogar von rauchender Salpetersäure bei hoher Temperatur fast nicht angegriffen wird. Dagegen ist das Binitronaphtalin ein sehr guter Leiter, der auch durch die Alkalien und durch Schwefelverbindungen zersetzt wird. Umgekehrt enthält die Tabelle Körper, bei denen derartige Uereinstimmung nicht besteht. Das Phenol ist ein schlechter Leiter, obgleich der Wasserstoff des Hydroxyls durch Kalium und Natrium[1]) und der Wasserstoff des Radicals durch die Halogene oder Atomgruppen wie NO_2, NH_2 u. s. w. meist ohne Temperaturerhöhung ersetzt werden kann. Doppelte Zersetzung mit den Alkalien findet zwar nicht statt, das Phenol kann z. B. die Kohlensäure nicht aus kohlensaurem Kali austreiben. Ganz ebenso verhält sich das Nitrophenol, welches jedoch kohlensaure Magnesia zersetzt. Das Trinitrophenol hat sehr starke saure Eigenschaften und bildet mit löslichen Basen durch gegenseitige Zersetzung Salze, die Metalle treten an die Stelle des Wasserstoffs; dennoch zeigt es kaum Spuren von Leitung mit dem Strome von 20 Elementen, und erst mit dem Inductionsstrom findet Zersetzung statt. Dagegen ist das Nitroanilin ein guter Leiter, obgleich es

1) Das Phenolkalium (C_6H_5OK) wird schon von dem Strome von 5 B.-E. mit lebhafter Gasentwickelung zersetzt.

mit Metallsalzen durch doppelte Zersetzung keine Verbindungen gibt.

Die Haloidverbindungen der Alkoholradicale zeigen öfters für starke galvanische Ströme eine gewisse Leitungsfähigkeit, da eine Ablenkung am Galvanometer von 2—4° beobachtet wird, welche bei den Allylverbindungen viel grösser ist. Ihr chemischer Charakter stimmt insoweit mit den angeführten Hypothesen überein, dass sie von löslichen Basen unter Bildung eines Metallsalzes und eines Alkohols zersetzt werden, doch vielfach ist eine Temperaturerhöhung dazu nöthig. Auch wirken einzelne Metalle auf diese Körper direct ein, z. B. das Magnesium bei gewöhnlicher Temperatur auf das Jodäthyl[1]) unter Bildung des Magnesiumäthyls, das Eisen auf das Jodallyl unter Bildung des Diallyls; auch werden die Silbersalze von ihnen zersetzt. Die Schwefelverbindungen der Alkoholradicale verhalten sich wieder nicht im Einklange mit den Hypothesen, da sie schlechte Leiter zu sein scheinen, und doch kann z. B. das Sulfallyl, welches den Inductionsstrom nicht durchlässt, mit Silbernitrat durch doppelte Zersetzung Schwefelsilber bilden. Noch auffallender ist dieses Verhältniss bei dem Mercaptan, welcher den Wasserstoff gegen Kalium und Natrium[2]) auswechselt und in alkoholischer Lösung auch gegen Kupfer, Gold u. s. w.; sogar festes Goldchlorür wird unter Entwickelung von Salzsäure heftig angegriffen und noch heftiger das Goldoxyd bei gewöhnlicher Temperatur. Der Amylalkohol leitet den Strom von 950 B.-E. kaum, obgleich Kalium und Natrium Wasserstoff austreiben.

Das Eintreten der Inductionsströme in die Flüssigkeiten ist eine sehr complicirte Erscheinung, bei der es oft

---

1) Neuerdings fanden Gladstone und Tribe (Proc. Roy. Soc. XXVI. p. 2. Beibl. I. p. 414) mit Jodäthyl für den Strom einer Batterie von 100 Grove-Elementen keine Ablenkung am Galvanometer.

2) Mercaptan liefert mit Quecksilberoxyd das Aethylquecksilbersulfid; diese Verbindung ist leicht schmelzbar und leitet den Strom von 20 B.-E. (Ablenkung des Galvanometers 3°).

schwer zu entscheiden ist, ob electrolytische Zersetzung stattgefunden hat, oder blos die thermische Wirkung der Funkenentladung die Verbindung spaltete. Dabei können die Electroden so weit von einander entfernt sein, dass der Inductionsstrom (und zwar nur der Oeffnungsstrom) ohne Funkenentladung durchgeleitet wird und an einem empfindlichen Galvanometer eine Ablenkung zeigt (z. B. beim Jodmethyl, wo eine starke Erwärmung zugleich merkbar war), oder bei geringerer Entfernung finden Funkenentladungen statt (wie bei den Allylverbindungen, wobei alsdann Kohle ausgeschieden wird), und während derselben wird die Magnetnadel abgelenkt. Die ganz eigenthümliche, schon früher von mir erwähnte Leitung unter Auftreten einer wellenartigen Bewegung der Flüssigkeit bei der Durchleitung des Inductionsstromes[1]) zeigt sich auch beim Sulfamyl und beim Toluol; beim Brombenzol und dem Sulfallyl gelangt nur die längere Electrode in Vibration. Beim Bromtoluol ist aber nichts derartiges bei Entfernung der Electroden bis 1 mm zu beobachten, obwohl auch dieses ein sehr schlechter Leiter ist. Im Naphtalin schlägt sogar ein Funken von 70 mm nicht durch. Demnach scheint diese Art von Entladung nur bei einem gewissen Grade von Isolirung aufzutreten.

Im ganzen sind also die chemischen Eigenschaften hier nicht für eine gute Leitungsfähigkeit maassgebend, im voraus lässt sich aus denselben kein Schluss auf die letztere ziehen.

§. 10. Versuche mit Warren de la Rue's Chlorsilberbatterie von 8040 Elementen und einigen sehr schlecht leitenden Verbindungen[2]).

Ungeachtet der vorliegenden Versuche bleibt es immerhin noch eine offene Frage, ob bei der Anwendung

1) In Tab. 3 beim Triäthylamin und in Tab. 4 beim Quecksilbermethyl, wo die Electroden noch 4 mm von einander entfernt waren.

2) Einen kurzen Bericht über diese Resultate s. Proc. Roy. Soc. XXV. p. 322. 1876. Beibl. I. p. 121.

von noch viel stärkeren Strömen schliesslich nicht doch bei den als isolirend betrachteten Körpern Leitung und Zersetzung eintreten würde. Es steht ja fest, dass es für jede Verbindung eine Temperatur gibt, bei der ihre Zersetzung durch Wärme eintritt; analog könnte man sich denken, dass ein Strom von hinreichender Intensität auf jede Verbindung electrolytisch wirken würde.

Ich glaubte es also für den Zweck dieser Untersuchung von grossem Interesse, den Strom der Chlorsilberbatterie des Hrn. Warren de la Rue, der kräftigsten galvanischen Batterie, welche je dargestellt ist, anzuwenden. Ich fühle mich daher verpflichtet, ihm öffentlich meinen Dank für die Bereitwilligkeit abzustatten, mit der er auf meine Wünsche einging, und für seine Theilnahme an den von uns gemeinschaftlich unternommenen Versuchen.

Die Batterie [1]) zählte zur Zeit dieser Versuche 8040 Elemente, welche in verschiedene Reihen getheilt oder alle zusammen angewandt werden konnten. Die grösste Funkenlänge in der Luft und zwischen Kupferelectroden war 8,5 mm. Ich hatte zwar keine Gelegenheit, alle vorher untersuchten Substanzen mit diesem Strome zu prüfen; die demselben unterworfenen Verbindungen gehören indess zu den wichtigsten der Chemie.

I. Ammoniak. Bei Durchleitung des Stromes von 3240 Elementen wurden die früher mit der Batterie von 80 B.-E. erhaltenen Resultate bestätigt gefunden; nur war selbstverständlich die Wirkung viel stärker. Dunkelblaue Strömungen wurden in der Flüssigkeit sichtbar und die positive Electrode bedeckte sich mit einer schwarzen Farbe; zu gleicher Zeit wurde eine reichliche Gasmenge frei. Sobald der Strom unterbrochen wurde, verschwand sogleich die blaue Farbe.

II. Schwefelkohlenstoff. Wir wandten zuerst den Strom von 3240 Elementen an; die negative Electrode

1) Pogg. Ann. CXXXV. p. 496. 1868 und CLVII. p. 290. 1876.

wurde von der Flüssigkeitsoberfläche gegen die Wand des Rohres zurückgestossen und es schienen gewisse innere Bewegungen stattzufinden, kleine Staubtheilchen bewegten sich in der Flüssigkeit in verschiedenen Richtungen hin und her; möglicherweise konnte dieses von Temperaturerhöhung bewirkt sein, obgleich mit der Hand keine wahrzunehmen war. Der Strom von 5640 Elementen war zu stark, eine Funkenentladung trat zwischen den Electroden ein und diese wurden braun gefärbt (Ablagerung von Kohle). Nachher untersuchten wir mit einem sehr empfindlichen Thomson'schen Galvanometer, ob sich vielleicht ein Polarisationsstrom zeigte; dies war jedoch nicht der Fall.

III. Benzol. Mit 3240 Elementen wurde eine starke vibratorische Bewegung in der Flüssigkeit beobachtet. Mit 5640 Elementen vermehrte sich diese Bewegung stark und wurde deutlicher. Auch war damit ein gewisses summendes Geräusch verknüpft, welches von der längeren Electrode herkam, die durch das ganze Rohr lief und sich frei bewegen konnte; die Durchleitung des Stromes durch die Flüssigkeit versetzte letztere in Schwingungen und an der Oberfläche des Benzols waren wellenartige Bewegungen merkbar. Diese Erscheinung war am deutlichsten, wenn die längere Electrode der negative Pol war; die Oberfläche der Flüssigkeit wurde dann herabgedrückt. Wenn die längere Electrode positiv war, beobachtete man die entgegengesetzte Erscheinung; die Vibrationen waren dann schwächer und die Oberfläche hob sich; die Flüssigkeit lief gewissermaassen den Draht hinauf. Wir fanden nachher keine Anzeigen eines Polarisationsstromes.

Diese eigenthümliche Erscheinung der Vibrationen ist analog mit einem merkwürdigen Versuche, welchen Hr. Warren de la Rue schon früher beobachtet hat. Wenn die eine Electrode der Batterie von 8040 Elementen in eine flache horizontale Kupferscheibe endet und die andere Electrode in einen sehr feinen Platindraht, welcher in etwas grösserer Entfernung als der Schlagweite darüber

gestellt ist, so geräth beim Ausströmen der Electricität die Electrode in eine oscillatorische Bewegung, wodurch ihr Ende leuchtende Kreise (öfters auch Ellipsen) beschreibt. Ist der Platindraht positiv, so ist die vibrirende Bewegung schwächer und daher sind die leuchtenden Kreise kleiner.

IV. Zinntetrachlorid. Der Strom von 8040 Elementen, durch die Flüssigkeit geleitet, bewirkte starke Vibrationen, wenn die längere Electrode negativ war; wenn positiv, waren sie schwächer. Wir bemerkten weder einen Polarisationsstrom, noch eine andere Anzeige von Electrolyse.

V. Kohlensäure. Wir führten direct den Strom von 5640 Elementen durch das zur Flüssigkeit verdichtete Gas. Die Entladung war bei der kleinen Entfernung der Electroden in der Flüssigkeit zu stark; da lebhafte Funken sich zeigten. Die dabei entwickelte Wärme verursachte die Explosion des Rohres. Indessen ist dadurch die Folgerung, dass die flüssige Kohlensäure ein sehr schlechter Leiter ist, gerechtfertigt, da Funkenentladung in leitende Flüssigkeiten mit diesem Strome nicht stattfindet.

VI. Chlorwasserstoffsäure. Die condensirte Säure wurde im verschlossenen Rohre dargestellt aus trockenem Salmiak und concentrirter Schwefelsäure, durch welche zugleich das entwickelte Gas getrocknet wurde. Die Batterie von nur 2160 Elementen an war ohne Wirkung. Bei Anwendung von 3240 Elementen beobachteten wir abermals die Vibrationen der Flüssigkeit und die wellenartige Bewegung der Oberfläche. Schliesslich wurden 5640 Elemente eingeschaltet und nun war auch das eigenthümliche Geräusch an der vibrirenden Electrode hörbar. Von dem vorigen Versuche belehrt, wollten wir nicht die ganze Batterie anwenden, was vielleicht eine Explosion zur Folge haben konnte; ohnedies war doch das Experiment schon entscheidend für die Folgerung, dass die condensirte Chlorwasserstoffsäure selbst ausserordentlich starken galvanischen Strömen einen fast unüberwindlichen Widerstand entgegengestellt.

VII. Cyan. Der Strom von 3240 Elementen blieb ohne Wirkung im condensirten Gase. Mit 5640 Elementen wurden die Vibrationen sehr merkbar und wir konnten auch dabei denselben Unterschied zwischen der negativen und positiven Electrode wie schon beim Benzol beobachten. Die Flüssigkeit drängte sich zur Electrode hinauf, als diese mit dem positiven Pole verbunden war. Es konnte kein Polarisationsstrom nachgewiesen werden.

VIII. Zinkäthyl. Mit 3240 Elementen wurden schon Vibrationen in der Flüssigkeit erregt. Sie waren besonders deutlich mit 5640 Elementen, und dabei erhöhte sich die Temperatur der Flüssigkeit sehr merkbar. Nachher konnte man einen Polarisationsstrom nachweisen, welcher eine Ablenkung von fünf Scalentheilen verursachte. Hier fand also vielleicht eine electrolytische Wirkung statt, welche von vibratorischen Bewegungen begleitet sein kann, obgleich ein ausserordentlich starker Strom dafür nothwendig ist.

IX. Benzol. Der früher mitgetheilte Versuch (III) mit Benzol wurde wiederholt, um festzustellen, ob ein galvanischer Strom von einer Verbindung geleitet werden kann, ohne Electrolyse zu bewirken. Wir wandten die ganze Batterie von 8040 Elementen an, die Entladung war von Funken zwischen den Electroden begleitet. Ein voluminöser Niederschlag von Kohle färbte die Flüssigkeit und deshalb musste eine andere Röhre zubereitet werden, in welcher die Electroden weiter von einander entfernt waren. Der Strom wurde während zweier Minuten durchgeleitet; es sprangen keine Funken über, aber die Flüssigkeit befand sich continuirlich in Vibration, was also auf das Durchströmen der Electricität deutet. Nachher war jedoch nicht der geringste Polarisationsstrom am Galvanometer nachzuweisen; auch die Electroden waren vollkommen rein geblieben. Es ist indess zu bemerken, dass bei Flüssigkeiten, welche äusserst schlechte Leiter sind, das Ausbleiben des Polarisationsstromes nicht den Schluss erlaubt, dass überhaupt keine Electrolyse statt-

gefunden hat, denn der grosse Widerstand des Benzols, welchen der Strom der ganzen Batterie zu überwinden hatte, verringerte seine Intensität so stark, dass er an dem Galvanometer nur noch eine Ablenkung von 55 Scalentheilen bewirken konnte. Der etwaige Polarisationsstrom hätte demnach keine merkliche Ablenkung gegeben.

Wenn der Strom der ganzen Batterie durch reines Wasser geleitet wurde, entwickelte sich sofort eine bedeutende Gasmenge, aber es war keine vibratorische Bewegung in der Flüssigkeit wahrnehmbar; diese scheint erst (wie schon bemerkt) bei einem gewissen Grade von Isolirung und einer bestimmten Potentialdifferenz an den Electroden aufzutreten. Es ist leicht möglich, dass wir es dann mit Entladungen, welche von Faraday „Carrying discharges" genannt sind, zu thun haben, wobei die Electricität von den Gesammtmolecülen getragen, gewissermaassen mechanisch übergeführt wird.

§. 11. Zusammenstellung der Resultate.

Der Zweck dieser Untersuchung war, die Möglichkeit der Electrolyse einer Anzahl Verbindungen festzustellen, damit möglicherweise der Antheil, welchen der Wasserstoff an der electrolytischen Leitung in chemischer Beziehung haben könnte, bestimmt würde. Es ergibt sich aus den mitgetheilten Versuchsreihen, dass endgültige Schlussfolgerungen sich hierauf nicht begründen lassen und auch die Wahlverwandtschaft dafür nicht maassgebend ist.

Die Wasserstoffsäuren für sich sind (mit Ausnahme der Cyanwasserstoffsäure) zwar sehr schlechte Leiter, und ihre Electrolyse ist nicht bewiesen; ihr chemischer Charakter ist im flüssigen Zustande sehr schwach, aber derselbe kann, wie schon bemerkt ist, sehr gut durch äussere Umstände erklärt werden, z. B. durch ein sehr geringes Lösungsvermögen. Das Zusammentreffen der isolirenden Eigenschaft damit sollte also gewissermaassen als zufällig zu betrachten sein. Aber es gibt dem gegenüber eine Menge organischer Verbindungen, wie die organischen Metallradi-

cale und einige Haloidverbindungen der Alkoholradicale, welche ihr Metall oder ihren Wasserstoff leicht gegen andere Metalle (oder gegen Atomgruppen, wie z. B. bei der Benzolreihe und den meisten Aminen) austauschen und doch den schlechten Leitern angehören. Es ist indess bemerkenswerth, dass keine Verbindung ohne Wasserstoff oder Metall als Leiter bekannt ist, wenn auch blos die Anwesenheit dieser Elemente nicht allein die Leitungsfähigkeit zu bedingen scheint. Das Verhalten der Anhydride (§. 5) z. B. gibt besonders Stützen für diese Meinung. Auch liegen keine Substanzen vor, welche gute Leiter sind, ohne leicht durch chemische Reactionen zersetzt zu werden.

Der jetzt von immer mehr Physikern getheilten Ansicht, dass das Leitungsvermögen für Electricität nicht als einfache Function der chemischen Zusammensetzung betrachtet werden kann, wird also durch meine Versuche eine neue Grundlage geliefert. Ein ähnliches Resultat für eine andere Gattung von Körpern, nämlich geschmolzene Salze, Verbindungen also, welche auch ohne Lösungsmittel flüssig sind, ist von Braun[1]) experimentell festgestellt, indem er angibt, dass ein Zusammenhang der galvanischen Leitungsfähigkeit mit sonstigen physikalischen oder chemischen Eigenschaften (Moleculargewicht, Molecularvolumen, Valenz der Metalle des Salzes) nicht erkennbar ist. Der Hauptsatz der Hittorf'schen Theorie der Electrolyse, wonach mit der Schwierigkeit des Austausches der Bestandtheile der Leitungswiderstand der Electrolyte zusammenhängt, wird durch meine Versuche durchaus nicht bestätigt. Hittorf hat die Verbindungen immer in gelöstem Zustande der Prüfung ausgesetzt, und ebendaher muss es bedenklich sein, bestimmte Schlussfolgerungen über das Leitungsvermögen dieser Körper daraus abzuleiten. Neuerdings haben F. Kohlrausch, Herwig und Andere nachgewiesen, dass schlechtleitende Flüssigkeiten

1) Pogg. Ann. CLIV. p. 195.

durch Mischung mit anderen Körpern (auch wenn diese schlechte Leiter sind) besser leitend werden. Ausserdem haben wir in dem Mercaptan, der Untersalpetersäure, dem Schwefelkohlenstoff, den organischen Metallradicalen u. s. w. Beispiele von Verbindungen, welche mit Salzen, Säuren oder mit Wasser leicht ihre Bestandtheile auswechseln und doch sich den bedeutendsten electromotorischen Kräften gegenüber als sehr schlechte Leiter verhalten.

Eine neuere Ansicht, welche von G. Wiedemann und nach ihm von F. Kohlrausch auf ihre Versuche begründet ist, zieht hauptsächlich die mechanischen Vorgänge bei der Electrolyse in Betracht, wie Reibung der Molecüle an einander, Ueberführung der Jonen mit verschiedener Geschwindigkeit u. s. w., welche Punkte bei anderen Theorien wohl ganz im Hintergrunde bleiben. Der grosse Leitungswiderstand der Flüssigkeiten wird demnächst aus dem häufigen Zusammentreffen der Bestandtheile erklärt. Das Lösungsmittel gibt Gelegenheit, dass die Theilchen einen grossen Weg zurücklegen können, bevor sie, an einander vorübergehend, sich wieder vereinigen. Es wird dabei erwähnt, dass wir keine einzige Flüssigkeit kennen, welche bei gewöhnlicher Temperatur für sich ein gut leitender Electrolyt[1]) sei. Meine Versuche jedoch lassen das flüssige Ammoniak und die flüssige Cyanwasserstoffsäure als solche erkennen, welche schon von mässigen galvanischen Strömen deutlich zersetzt werden. Wenn auch Gründe für diese Annahmen vorhanden sein konnten[2]) und die übrigen Versuche darauf hindeuten, dass Flüssig-

1) Pogg. Ann. p. 253. 1876.

2) F. Kohlrausch hat, bevor er von meinen Versuchen in Kenntniss gesetzt war, die Vermuthung ausgesprochen, dass flüssige Chlorwasserstoffsäure, Bromwasserstoff und Jodwasserstoff isoliren würden (l. c. p. 278); ich habe dieses vollständig bestätigt gefunden. Dagegen zählte er Cyanwasserstoffsäure und Ammoniak in Lösung zu den schlechtesten Leitern; im condensirten Zustande zeigen sie sich bei meinen Versuchen als sehr gute Leiter und Electrolyte. Dieses entgegengesetzte Verhalten ist sehr auffallend.

keiten allgemein den sehr schlechten Leitern angehören; auch durch die obige Annahme die auffallende Erscheinung der Verringerung des Widerstandes bei der Mischung von schlechtleitenden Verbindungen erklärt wird, so kann ich doch damit nicht in Einklang bringen, dass ein geschmolzenes Salz trotzdem ein guter Leiter ist; z. B. das Chlorsilber. Hier liegt der Schmelzpunkt weit unter der Zersetzungstemperatur; also liegt kein triftiger Grund vor, die bessere Leitung in der Auflockerung der Verwandtschaft durch Wärme zu suchen, und doch müssen die Theilchen hier wenigstens ebenso häufig zusammentreffen, als in einer bei gewöhnlicher Temperatur flüssigen Verbindung.

Schwierig ist es auch, wenn die Lösung als eine der Bedingungen für das chemische Leitungsvermögen gelten soll, sich Verbindungen vorzustellen, welche schon in fester Form electrolysirt werden, wie die Haloidverbindungen des Bleies[1]), das Zinkoxyd, das Schwefelantimon und das Realgar[2]), bei deren Electrolyse das ausgeschiedene Zink und der Schwefel sich in der Luft entzündeten.

Es ist wohl die Meinung ausgesprochen worden, dass mit Anwendung ausserordentlich grosser electromotorischer Kräfte auch die für den galvanischen Strom einer gewöhnlichen galvanischen Batterie isolirenden Verbindungen electrolytische Leitung annehmen würden.

Der höchst bedeutende Strom von Warren de la Rue's Chlorsilber-Batterie bewirkt indess noch keine deutliche Electrolyse von Verbindungen, welche sich am meisten isolirend gezeigt hatten, sondern lässt diese zweifelhaft. Doch muss aus der wellenartigen Bewegung der Flüssigkeit ein wirklicher Durchgang der Electricität geschlossen werden. Es ist mir gelungen, dieselben Erscheinungen auch mit mässigen Inductionsströmen eines Ruhmkorff'schen Inductoriums, ebenso wie mit dem Ent-

1) E. Wiedemann, Pogg. Ann. CLIV. p. 319.
2) Lapschin u. Tichanowitsch l. c.

ladungsstrome einer kräftigen Electrisirmaschine in Flüssigkeiten bei einem gewissen Grade von Isolirung und bei einer bestimmten Entfernung der Electroden hervorzubringen. Diese besondere Art von Fortpflanzung der Electricität ist also mit einfacheren Hülfsmitteln zu beobachten, als ich anfangs glaubte[1]). Weitere Experimente hierüber gedenke ich später mitzutheilen; nur bemerke ich noch, dass dadurch ein neuer Beweis gegen die Existenz einer sogenannten metallischen Leitung bei zusammengesetzten Körpern geliefert wird, da auch sehr starke galvanische Ströme in gleicher Art, wie die Inductionsströme, durch schlechtleitende Flüssigkeiten hindurchgeleitet werden; und wir müssen dann die Leitung als schnell aufeinanderfolgende Selbstentladungen eines Condensators betrachten, wobei die Flüssigkeitsschicht zwischen den Electroden die Rolle des Isolators spielt und die Electroden die Belegungen bilden[2]).

Haag, Holland, im November 1877.

II. *Experimentelles zur Theorie der stationären electrischen Strömung nach zwei Dimensionen; von Dr. Tschirjew aus St. Petersburg.*

Die unlängst veröffentlichte Abhandlung von Hrn. Töpler: „Zur Theorie der stationären electrischen Strömung in

1) Lapschin und Tichanowitsch theilen in ihrer mehrfach erwähnten Abhandlung mit, dass nur bei Aether mit 900 Elementen eine wellenförmige Bewegung von Kohle zum Zinkpol stattfand.

2) Auch Herwig (Pogg. Ann. CLIX. p. 83) ist auf eine ähnliche Vorstellung aus ganz anderen Gründen gekommen.

Es ist hier wohl die Gelegenheit, die Chemiker darauf aufmerksam zu machen, wie wünschenswerth es wäre, dass sie die von ihnen dargestellten, den Physikern nur sehr schwer zugänglichen, neuen Substanzen auch auf ihre electrolytischen Eigenschaften untersuchten.

gekrümmten Flächen“ [1]) veranlasst mich zu folgender kurzen Mittheilung.

Im Wintersemester 1876/77 studirte ich im Laboratorium des Hrn. E. du Bois-Reymond unter anderem auch den Einfluss einiger Formen der Zuleitungselectroden auf die Stromvertheilung in einem Electrolyte. Unter verschiedenen Combinationen befand sich auch die folgende, welche man als reciproke zur bekannten Kirchhoff'schen betrachten könnte. Es wurde eine rechtwinkelige, in einer Ebene nach einem Kreisbogen gekrümmte Kautschukplatte (1,5 mm dick) genommen, deren convexe und concave Flächen mit verquickten Zinkplatten belegt waren. Letztere wurden entweder mit den Polen einer constanten Kette, oder mit den Enden der secundären Rolle eines Schlitteninductoriums in Verbindung gebracht. Dieses Electrodenpaar wurde mit dem einen gebogenen Rande an den Boden eines Gefässes senkrecht angekittet, das aus einer Spiegelglasplatte bestand, an welcher ein 20 mm breiter Kautschukstreifen in der Weise befestigt war, dass er die seitliche zum Boden senkrechte Begrenzung des Gefässes bildete. Bei der horizontalen Aufstellung des Gefässes besass also die in ihm eingeschlossene Flüssigkeit eine cylindrische Gestalt; sie konnte deshalb als aus einer unendlich grossen Anzahl von unendlich dünnen Flüssigkeitsschichten bestehend betrachtet werden.

Um möglichst den schädlichen Einfluss der Begrenzung des Electrolyten zu vermeiden, habe ich der seitlichen Begrenzung des Gefässes folgende Form gegeben: sie bestand, in einem horizontalen Durchschnitte betrachtet, aus zwei sich schneidenden Kreisen, denen die Enden des Electrodenpaares als Centra dienten (Taf. II Fig. 1). Bei dieser Form des Gefässes hatte die Strombahn in den Theilen $ADBC$ und $AD'BC'$ überall denselben Querschnitt.

1) Pogg. Ann. CLV. 1877.

Das Gefäss wurde bis an den oberen Rand der Electroden mit der gesättigten Zinkvitriollösung gefüllt.

Die Reciprocität dieser Anordnung zu der Kirchhoff'schen bestand also darin, dass zwei Strömungscurven der letzteren zu Curven gleichen electrischen Potentiales gemacht wurden.

Als Ableitungselectroden gebrauchte ich zwei dünne (ungefähr 0,3 mm Durchmesser), isolirt mit einander verbundene Zinkdrähte, deren Enden auch verquickt und ungefähr auf 1,5 mm von einander entfernt waren. Diese Electroden waren in Verbindung mit den Rollen der Wiedemann'schen Spiegelbussole (16000 Windungen dünnen Drahtes) und immer möglichst senkrecht zum Boden des Gefässes aufgestellt. Der Griff dieser Electroden bestand aus einem cylindrischen Glasstabe, welcher an einem Stativ befestigt wurde. Es gestattete sehr bequem durch Drehung um die verticale Axe, ohne jede seitliche Verschiebung, für jeden Punkt des Electrolyten entweder die maximale Wirkung auf die Bussole, d. h. die Stromrichtung, oder die Richtung der isoelectrischen Curve aufzusuchen.

Es fragt sich nun, was man auf diese Weise messen konnte. Da die ableitenden Electroden in meinem Falle in constanter Entfernung von einander und von verschwindend kleinen Dimensionen im Vergleich zu denjenigen des Electrolyten (etwa 280 mm im grossen und 215 mm im kleinen Durchmesser) waren, und da ferner der Widerstand des Bussolekreises constant war, so konnte der gesammte Widerstand des Electrolyten für alle in einer endlichen Entfernung von der Grenze $\left(\frac{dq}{dn} = 0\right)$ des letzteren befindlichen Stellungen des Ableitungsbogens als constant betrachtet werden (Kirchhoff). Die gemessenen Stromintensitäten mussten dann den Stromdichten in den betreffenden Punkten des Electrolyten proportional sein.

In diesem Sinne werde ich später immer von Strom-

dichten sprechen, obschon ich eigentlich nicht sie selbst, sondern nur ihnen proportionale Grössen gemessen habe.

Für mehrere Stellen in jeder der (Taf. II, Fig. 2) mit geraden Linien angedeuteten Richtungen von dem zuleitenden Electrodenpaare aus wurden sowohl die Stromdichten, als auch die Richtung der Curven gleichen electrischen Potentiales bestimmt, wobei immer auch die Entfernungen dieser Stellen von den Electroden, nach den genannten Richtungen genommen, notirt wurden.

Alle diese Bestimmungen haben in der That die Consequenzen der bekannten Kirchhoff'schen Gleichung für die stationäre electrische Strömung in einem Körper bestätigt.

Erstens hat sich hier für die Systeme der Strömungs- und isoelectrischen Curven, abgesehen von den Besonderheiten, welche ersichtlich von der Begrenzung des Electrolyten abhängig waren, ein vollständiger Umtausch zwischen diesen beiden Systemen vollzogen (Taf. II Fig. 1): das System der Strömungsflächen in meinem Falle entsprach demjenigen der Curven gleichen Potentiales im Kirchhoff'schen, und umgekehrt — ein Ergebniss, welches theoretisch schon längst bekannt war [1]), bisher aber noch der experimentellen Verificirung bedurfte.

Zweitens ist das System der Curven gleicher Stromdichte im wesentlichen unverändert geblieben — auch in diesem Falle war es ein Lemniscatensystem.

Um dieses System zu bestimmen, bediente ich mich der graphischen Methode: die Abstände der Punkte von den Zuleitungselectroden wurden auf die Abscissenaxe aufgetragen und die Stromdichten als Ordinaten genommen: Auf diese Weise konnte ich für jede der oben erwähnten

1) Es gehen bekanntlich in die Auflösungen der Strömungsaufgaben zwei Functionen φ und ψ derartig symmetrisch ein, dass ohne Aenderung des Resultates entweder die Curven φ = const., oder die Curven ψ = const. als Curven gleichen electrischen Potentials gewählt werden können, wobei dann die constanten Werthe der anderen Function die Strömungslinien bilden.

Richtungen von den zuleitenden Electroden aus eine Curve construiren. Alle Durchschnittspunkte dieser Curven mit jeder beliebigen der Abscissenaxe parallel gezogenen Linie besassen sichtlich dieselbe Stromdichte, ausgedrückt durch die Ordinate dieser Linie, und die Abscissen dieser Punkte bestimmten deren Abstände von den Electroden, nach den entsprechenden Richtungen genommen. Als ich nun alle solchen Systeme von Punkten auf die Zeichnung, einen Durchschnitt des Electrolyten und der Zuleitungselectroden darstellend, auftrug und die Punkte gleicher Dichte mit einander verband, erhielt ich in der That ein System von lemniscatenförmigen Curven (Taf. II, Fig. 2), deren Abscissenaxe jedoch etwas in der Richtung zur Electrodenplatte gebogen war.

Diese Biegung schien mir hauptsächlich davon abzuhängen, dass die beiden Electrodenflächen der Form nach nicht ganz die entsprechenden Strömungscurven nachahmten: sie waren parallel, deshalb war die convexe Fläche mehr und die concave weniger gebogen, als die Strömungscurven, welche sie ersetzen sollten. Um diese Voraussetzung zu prüfen, habe ich die Form des Electrodenpaares in diesem Sinne corrigirt (Taf. II Fig. 3). Damit die Stromstärke in den entfernteren Theilen des Electrolyten durch die starke Annäherung der amalgamirten Flächen an den seitlichen Rändern nicht zu sehr abgeschwächt werde, habe ich diese Ränder etwas beschnitten und kleine Glascylinder an sie befestigt, die nicht nur keine Störung in der Stromvertheilung hervorbringen konnten, sondern umgekehrt den Verlauf der kürzesten Strömungsflächen corrigirten.

Bei dieser Form der Zuleitungselectroden verschwand die obenerwähnte Biegung der Abscissenaxe der Lemniscaten fast vollständig (Taf. II Fig. 3).

Alle anderen Unterschiede, z. B. in Bezug auf den Verlauf der Curven in der Nähe der seitlichen Begrenzung des Gefässes liessen sich leicht aus dieser Begrenzung erklären.

Diese Bestimmungen haben also gezeigt, dass nicht nur ein vollständiger Umtausch zwischen den Systemen der Strömungscurven und Curven gleichen electrischen Potentiales stattfindet, sondern auch, dass das System der Curven gleicher Dichte bei diesem Umtausch unverändert bleibt, wie es die in Bezug auf φ und ψ symmetrische Gleichung: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=$ const. erfordert.

Dies alles bietet schon jetzt nicht nur rein theoretisches Interesse, sondern auch praktisches, insofern damit die Strömungsaufgaben für eine grosse Anzahl von Formen electromotorischer Flächen oder Zuleitungselectroden als gelöst gelten können, wenigstens für Leiter von hinreichend weit entfernter äusserer Begrenzung, in denen die Strömungen nur nach zwei Dimensionen verlaufen.

Berlin, 26. October 1877.

III. *Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie; von H. Helmholtz* [1].

Als electrochemisches Aequivalent eines Ions wollen wir diejenige Menge desselben betrachten, die durch die gewählte Stromeinheit in der Zeiteinheit an der entsprechenden Electrode ausgeschieden wird.

Die Ueberführungszahl n, auf das Kation bezogen

1) Die nachfolgenden Betrachtungen sind in ihren wesentlichen Theilen der Berl. Akademie (Monatsber. 26. Nov. 1877) mitgetheilt worden. Der Schluss ist umgearbeitet, da inzwischen neue experimentelle Data gewonnen waren.

(Hittorf's $\frac{1}{n}$), gibt, wie in G. Wiedemann's „Galvanismus", denjenigen Bruchtheil des Aequivalents des betreffenden Kations, der von der Stromeinheit während der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt der Strombahn in der betreffenden Lösung nach der Kathode hingeführt wird. Andererseits wandert in entgegengesetzter Richtung das Quantum $(1-n)$ des Anions, wodurch $(1-n)$ des Kations an der Kathode frei wird, was mit der Menge n nach dieser Seite geführten Kations vereinigt, die an der Kathode frei werdende Menge 1 gibt. Ebenso ist auf der anderen Seite das Quantum n des Kations weggeführt, dadurch n des Anions frei geworden. Dazu kommt $(1-n)$ des zugeführten Anions. Wenn nun das Kation ein Metall ist, welches sich an die Electrode ablagern kann, so schwindet dort $(1-n)$ des Metalls aus der Lösung und $(1-n)$ des salzbildenden sauren Körpers ist weggeführt worden, also wird ebenda $(1-n)$ des Salzes weggenommen. Andererseits verbindet sich das frei werdende Anion mit dem Metall der Electrode und es tritt also 1 Aequivalent Metall hier neu in die Lösung, während n des Metalls fortgeführt und $(1-n)$ des Anions zugeführt ist. Dies gibt hier eine Vermehrung der Salzmenge um $(1-n)$ des Aequivalents für Zeiteinheit und Stromeinheit. Ist das Metall der Electrode gleich demjenigen, welches in der Lösung enthalten ist, so ist das ganze Resultat der Electrolyse dasselbe, als wenn ein Aequivalent Metall von der Anode an die Kathode, und $(1-n)$ Aequivalent Salz in der Lösung von der Kathode zur Anode geführt wäre.

Wenn nun die Salzlösung an der Kathode concentrirter ist als an der Anode, so werden durch diese Ueberführung die Unterschiede der Concentration ausgeglichen. Die Flüssigkeit nähert sich dabei dem Gleichgewichtszustande, dem die Anziehungskräfte zwischen Wasser und Salz auch in den Vorgängen der Diffusion zustreben, nämlich dem Zustande gleichmässiger Vertheilung des Salzes. Also werden die in dieser Richtung wirkenden chemischen

Kräfte ihrerseits auch wiederum den electrischen Strom, der in ihrem Sinne wirkt, unterstützen können.

Dass nun die hierbei eintretende Arbeit der chemischen Kräfte in diesem Falle nach demselben Gesetze, wie andere electrolytische chemische Processe als electromotorische Kraft wirkt, lässt sich aus der mechanischen Wärmetheorie herleiten.

Einen reversibeln Process ohne Temperaturänderungen, wie er zur Anwendung des Carnot'schen Gesetzes gefordert wird, können wir in folgender Weise herstellen.

1) Wir lassen in die Anode das Quantum positiver Electricität E langsam in constantem Strome eintreten, nehmen aus der Kathode dagegen das Quantum $+E$ weg, oder, was zu demselben Resultat führt, wir lassen $+\frac{1}{2}E$ in die Anode ein-, $-\frac{1}{2}E$ austreten, umgekehrt an der Kathode. Wenn P_k und P_a die Werthe der electrostatischen Potentialfunction für die beiden Electroden sind, so ist:

$$E\{P_a - P_k\}$$

die Arbeit, welche geleistet werden muss, um diese Durchströmung zu bewerkstelligen. Ist die Dauer der Durchströmung gleich t, so ist die Stromintensität nach electrostatischem Maass gegeben durch die Gleichung:

$$Jt = E.$$

2) Unter Einfluss dieser Durchströmung kommt in der electrolytischen Zelle, die wir mit zwei gleichartigen Metallelectroden versehen und mit einer Lösung desselben Metalls von ungleichmässiger Concentration gefüllt denken, eine Ueberführung des Salzes im Electrolyten zu Stande. Die Veränderung, die hierdurch im Zustande der Flüssigkeit entsteht, können wir aber dadurch beseitigen, dass wir aus allen Schichten der Flüssigkeit, wo der Strom die Flüssigkeit verdünnt, so viel Wasser, als zugeführt wird, verdampfen lassen, umgekehrt, wo der Strom die Flüssigkeit concentrirt, die entsprechende Menge Wasser durch Niederschlag von Dämpfen zuführen. Wenn man in dieser Weise den Zustand innerhalb der Flüssigkeit vollkommen

constant erhält, so muss das Anion ganz an seiner Stelle bleiben, weil sich von diesem an keinem Ende etwas ausscheidet und nichts dazukommt. Vom Kation dagegen muss durch jeden Querschnitt der Strombahn eine der Stromstärke vollkommen äquivalente Menge gehen, da an der Anode ein volles Aequivalent aufgelöst, an der Kathode niedergeschlagen wird. Da nun die Verschiebung des Anions gegen das Wasser, sich zu der des Kations gegen das Wasser, wie $(1-n):n$ verhält, so muss das Wasser mit einer Geschwindigkeit vorwärts gehen, welche $(1-n)$ von der des Kations beträgt. Wenn also ein electrolytisches Aequivalent des Salzes verbunden ist mit q Gewichtstheilen Wasser, und durch ein Flächenstück $d\omega$ der Strom von der Dichtigkeit i die Quantität $id\omega$ des Kations, in Aequivalenten ausgedrückt, führen soll, so müssen durch dasselbe $q(1-n)id\omega$ Gewichtstheile Wasser gehen, um die Theile des Anions an ihrer Stelle zu erhalten.

Diese $q(1-n)i.d\omega$ betragende Menge Wasser führt mit sich als aufgelöste Bestandtheile $(1-n)i.d\omega$ Aequivalente des Kations sowohl als des Anions. Die Electrolyse treibt durch denselben Querschnitt $n.i.d\omega$ des Kations vorwärts und $(1-n)i.d\omega$ des Anions rückwärts, daher in Summa ein Aequivalent des Kations vorwärts geht und das Anion an seiner Stelle bleibt.

Wenn wir also mit u, v, w die Componenten der electrischen Strömung parallel den x, y, z bezeichnen, berechnet nach der Menge Electricität, die in der Zeiteinheit die Einheit der Fläche passirt: so ist die Zunahme der Wassermenge in dem Volumenelemente $dx\,dy\,dz$ nach bekannten hydrostatischen Gesetzen für die Zeiteinheit:

$$(1)\quad \begin{aligned} &-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)u]+\frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)v]+\frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)w]\right\}dx.dy.dz \\ &=-\left\{u\frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)]+v\frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)]+w\frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)]\right\}dx.dy.dz, \end{aligned}$$

da im stationären Strome:

(1a) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

An der Oberfläche der Electroden dagegen würde durch das Flächenelement $d\omega$ die Einströmung des Wassers verlangt werden:

(1b) $$q(1 - n)\,[u \cos a + v \cos b + w \cos c]\,d\omega,$$

wenn a, b, c die Winkel zwischen der gegen die Flüssigkeit gerichteten Normale des Elements $d\omega$ und den positiven Coordinatenaxen bezeichnen.

Wenn wir den obigen mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirten Ausdruck über das ganze Volumen der Flüssigkeit integriren, so erhalten wir durch bekannte Methoden partieller Integration denselben Werth, den der letzte mit $d\omega$ multiplicirte Ausdruck gibt, wenn wir ihn über die Oberfläche integriren.

Das Wasser also, welches sich im ganzen Innern sammelt, und nach unserer Voraussetzung durch Verdampfung entfernt werden soll, wird gerade genügen, um an den Electrodenflächen wieder niedergeschlagen die dort verlangte Zufuhr zu geben. Hierbei kann natürlich sowohl die Ansammlung des Wassers im Innern, wie der Niederschlag an der Oberfläche stellenweise auch negative Werthe haben.

3) Die Verdampfung, beziehlich, wo sie negativ ist, Niederschlag des Dampfes, kann so geführt werden, dass man durch Zuleitung von Wärme zu jedem der Volumenelemente die Temperatur während der Verdampfung constant erhält. Solange Wasser aus einem Volumenelemente der Flüssigkeit entfernt werden soll, lässt man den Dampf damit in Berührung. Schliesslich trennt man beide und lässt den Dampf unter weiterer Zuführung von Wärme bei constanter Temperatur sich so weit dehnen, bis er einen bestimmten constanten Druck p_1 erreicht hat. Wo die Verdampfung negativ sein soll, wird der Dampf natürlich aus dem Drucke p_1 entnommen und unter Abgabe von Wärme bei constanter Temperatur zunächst ohne,

nachher mit Berührung der Flüssigkeit comprimirt, bis er Wasser geworden ist. Da der Dampf, der mit den concentrirteren Theilen der Flüssigkeit in Berührung ist, geringeren Druck hat, als der mit verdünnteren Theilen in Berührung stehende, so wird bei dieser Verdampfung Arbeit gewonnen, wenn das Wasser aus den verdünnten Theilen in die concentrirten übertragen wird; verloren, wenn umgekehrt.

4) Die electrische Strömung kann so langsam gemacht werden, dass die dem Quadrat ihrer Intensität proportionale Wärmeentwickelung wegen Widerstandes der Leitung verschwindend klein wird im Vergleich mit denjenigen Wirkungen, die wir bisher besprochen haben und die der ersten Potenz der Intensität proportional sind.

Ebenso könnte die Diffusion, welche zwischen verschieden concentrirten Theilen der Lösung vor sich geht, durch Einschaltung enger Verbindungsröhren auf ein Minimum zurückgeführt werden, ohne dass die electromotorische Kraft des Apparates, die wir berechnen wollen, dadurch geändert wird.

Wir können deshalb diese beiden irreversibeln Processe vernachlässigen und das Carnot-Clausius'sche Gesetz auf die reversibeln anwenden. Da alle an dem Processe theilnehmenden Körper dauernd gleiche Temperatur haben sollen und alle dieselbe, so kann keine Wärme in Arbeit und durch die reversibeln Processe auch keine Arbeit in Wärme verwandelt werden. Es muss also die Summe der gewonnenen und verlorenen Arbeit für sich genommen gleich Null sein, und ebenso die Summe der ab- und zugeführten Wärme. Daraus gehen zwei Gleichungen hervor.

Die eine, welche sich auf die Wärme bezieht, sagt nichts anderes aus, als was schon ohne Betrachtung des electrolytischen Vorgangs gewonnen werden kann, nämlich dass die gleiche Wärmemenge erzeugt wird, wenn das Metall der Electroden in eine concentrirte Salzlösung eintritt, die stufenweise verdünnt wird, als wenn es direct in die verdünnte Lösung eintritt.

Die zweite Gleichung sagt aus, dass bei dem oben beschriebenen reversibeln Processe die mechanische Arbeit gleich Null sein müsse. Arbeit ist theils

1) für Eintreibung der Electricität verwendet. Wenn P_a und P_k die Werthe der Potentialfunction in der Anode und Kathode sind, und in der Zeit t die Electricitätsmenge $+E$ in P_a eingetrieben, aus P_k weggenommen wird, so ist die Arbeit für die Zeiteinheit, wie schon oben bemerkt:

$$\frac{E}{t}(P_a - P_k) = J(P_a - P_k);$$

2) theils wird Arbeit durch den sich dehnenden Dampf geleistet. Dieser Dampf entwickelt sich zunächst unter dem Drucke p, der dem Sättigungsgrade der Flüssigkeit mit Salz entspricht; dann dehnt er sich bei constanter Temperatur bis zum Drucke p_1. Nennen wir die Arbeit für die Masseneinheit W und das Volumen der Masseneinheit V, beide immer auf die gleichbleibend gegebene Temperatur bezogen, so ist:

$$W = p \,.\, V + \int_V^{V_1} p \,.\, dv. \tag{1c}$$

Die Gesammtgrösse dieser Arbeit $\mathfrak{W}$ ergibt sich mittels der in (1) und (1b) aufgestellten Werthe der Strömung gleich:

$$\begin{aligned} &-\iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \,.\, W\left\{u\frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)] + v\frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)] + w\frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)]\right\} \\ &-\int d\omega \,.\, W \,.\, q(1-n)\{u\cos a + v\cos b + w\cos c\} = \mathfrak{W}. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch partielle Integration des dreifachen Integrals und mit Berücksichtigung der Gleichung (1a) finden wir:

$$\mathfrak{W} = \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz\, q \,.\, (1-n)\left\{u \,.\, \frac{\partial W}{\partial x} + v \,.\, \frac{\partial W}{\partial y} + w \,.\, \frac{\partial W}{\partial z}\right\}. \tag{2a}$$

Hierin sind n und W Functionen von q. Wenn man also setzt:

$$q(1-n)\,dW = d\Phi, \tag{2b}$$

wo Φ eine neue Function von q bedeutet, oder auch:

$$\Phi = \int_{p_0}^{p} q(1-n)\frac{dW}{dp}\,dp. \tag{2c}$$

worin p, der Dampfdruck über der betreffenden Salzlösung, ebenfalls Function von q ist, so erhält man:

$$\mathfrak{W} = -\int d\omega \,.\, \Phi\{u\cos a + v\cos b + w\cos c\}. \tag{2d}$$

Die Parenthese in diesem Ausdrucke bedeutet die zur Grenzfläche des Electrolyten senkrechte Stromcomponente. Diese ist nur an den den Electroden zugewendeten Theilen der Grenzfläche von Null verschieden. Ist die Concentration der Flüssigkeit, also q, n, p, Φ längs jeder einzelnen Electrode constant, so wird:

$$\mathfrak{W} = J(\Phi_k - \Phi_a) \tag{3}$$

und die Gleichung der Arbeit:

$$\begin{aligned} P_k - P_a &= \Phi_a - \Phi_k \\ &= \int_k^a q\,.\,(1-n)\,.\,\frac{dW}{dp}\,.\,dp. \end{aligned} \tag{3a}$$

$P_k - P_a$ ist aber der Werth der electromotorischen Kraft, den die electrolytische Zelle in der Richtung von der Anode zur Kathode, also in Richtung des von uns angenommenen Stromes wirkend, hervorbringt.

Diese Gleichung zeigt also die Existenz einer electromotorischen Kraft an, deren Grösse nur von der Concentration der Flüssigkeit an den beiden Electroden abhängt, nicht von der Vertheilung concentrirterer und verdünnterer Schichten im Innern der Flüssigkeit, ein Schluss, der in den neulich der Akademie mitgetheilten Versuchen von Hrn. Dr. J. Moser[1]) seine Bestätigung findet.

Nach Wüllner's Versuchen ist die Verminderung des Dampfdrucks der in constant bleibender Wassermenge gelösten Salzmenge direct, also unserem q umgekehrt pro-

1) Siehe den folgenden Aufsatz.

portional. Bezeichnen wir den Dampfdruck des reinen Wassers bei der Temperatur des Versuches mit dem bisher unbestimmt gelassenen p_o, so ist also zu setzen:

$$p_o - p = \frac{b}{q}, \tag{4}$$

wo b eine von der Art des Salzes abhängige Constante bezeichnet. Also:

$$P_k - P_a = b \int_{p_k}^{p_a} \frac{\partial W}{\partial p} (1-n) \frac{dp}{p_o - p}. \tag{4a}$$

Wenn man für die geringen Dichtigkeiten, welche die Wasserdämpfe bei Zimmertemperatur haben, das Mariotte'sche Gesetz als gültig voraussetzt, und das Volumen der Masseneinheit des Dampfes unter dem Drucke p mit V bezeichnet, so ist, wie oben in Gleichung (1c) bemerkt:

$$W = p \,.\, V + \int_V^{V_1} p \,.\, dV.$$

Nach Mariotte's Gesetz ist:

$$V = \frac{V_1 p_1}{p} \qquad dV = - V_1 p_1 \,.\, \frac{dp}{p^2} \tag{4b}$$

$$\int_V^{V_1} p\, dV = V_1 \,.\, p_1 \,.\, \log \,.\, \left(\frac{p}{p_1}\right) \text{ und } W = p_1 V_1 \left\{1 + \log \,.\, \frac{p}{p_1}\right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{p_1 V_1}{p} = V \tag{4c}$$

als angenähert richtiger Werth.

Setzt man diesen Werth von $\frac{\partial W}{\partial p}$ in die Gleichung (4a) mit Anwendung von (4b), so erhält man:

$$P_k - P_a = b p_o V_o \int_k^a \frac{(1-n)\, dp}{p\,(p_o - p)}, \tag{4d}$$

oder wenn man statt der Variabeln p unter dem Integra-

tionszeichen mittelst der Gleichung (4) die Variabele q einführt:

$$(4e) \qquad P - P_a = b p_o V_o \int_k^a \frac{(1-n)\,dq}{q\,p_o - b}.$$

Daraus ergibt sich, dass die electromotorische Kraft der Zelle positiv ist, wenn an der Kathode die Flüssigkeit concentrirter, und also $q_k < q_a$ und $p_k < p_a$ ist, was ebenfalls durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen des Hrn. J. Moser bestätigt ist.

Wenn wir die Fortführungszahl $(1-n)$ innerhalb der Grenzen der Versuche als constant betrachten dürfen, so kann dieselbe als Factor vor das Integrationszeichen gesetzt werden.

Wir setzen zugleich zur Abkürzung die Grösse:

$$\frac{b}{p_o} = q_o.$$

Es bezeichnet alsdann q_o diejenige Wassermenge, bei deren Zusatz zu einem Aequivalent des Salzes die Dampfspannung Null werden würde, wenn das Wüllner'sche Gesetz bis zu dieser Grenze hin Gültigkeit behielte. Dann wird:

$$(5) \qquad P_k - P_a = b \,.\, V_o\,(1-n).\ \log.\left[\frac{q_a - q_o}{q - q_o}\right].$$

Die Grösse q_o muss um so kleiner sein, je weniger das betreffende Salz den Dampfdruck vermindert. Der Einfluss von q_o verschwindet um so mehr, je verdünnter die dem Versuche unterworfenen Lösungen sind. Da auch gerade für verdünntere Lösungen der Werth von $(1-n)$ nach Hittorf's Versuchen nahe constant ist, so lässt sich für solche die angenähert richtige Formel aufstellen:

$$(5a) \qquad P_k - P_a = b \,.\, V_o \,.\, (1-n).\ \log.\left[\frac{q_a}{q_k}\right],$$

in welcher die Constante der Dampfspannung nur vorn als Factor vorkommt, und welche Formel das Verhält-

niss der electromotorischen Kräfte bei verschiedenen Concentrationenen unter den genannten Beschränkungen ergibt, auch wenn man den Werth von b nicht kennt.

Da nach Wüllner's Versuchen die Grösse b bei wechselnden Temperaturen nahehin proportional dem Drucke p_o über reinem Wasser bleibt, und $p_o V_o$ nahehin proportional der absoluten Temperatur wächst, was innerhalb der Grenzen der Zimmertemperaturen nicht viel ausmacht, so folgt geringes Anwachsen der electromotorischen Kraft mit der Temperatur, was die Versuche bestätigen.

Das S der folgenden Tabellen ist die q proportionale Wassermenge, die mit einem Gewichtstheil des wasserfreien Salzes vereinigt in der Lösung vorkommt, A die electromotorische Kraft nach den Beobachtungen von Hrn. J. Moser in Tausendtheilen eines Daniell'schen Elementes (Cu, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Zn) angegeben. Die Grösse:

$$\eta = \frac{1}{A} . \log . \frac{S_a}{S_k}$$

sollte constant sein nach Gleichung (5a).

Für eine Zelle mit Kupfervitriollösung und Kupferelectroden ergeben sich folgende Werthe:

Kupfersulfat.

S_a	S_k	A beobachtet.	A berechnet.	η	Werth von $(1-n)$ nach Hittorf.
128,5	4,208	27	27,4	0,0550	0,724 für $S = 6{,}35$.
—	6,352	25	23,8	0,0525	
—	8,496	21	21,4	0,0562	
—	17,07	16	15,8	0,0548	
—	34,22	10	10,3	0,0575	0,644 für $S > 39{,}67$.

Die bei der Berechnung von η gebrauchten Logarithmen sind Briggische. Bei diesem Salze ist nach

einer unten folgenden Berechnung in Uebereinstimmung mit neueren Bestimmungen der Dampfdichte durch Hrn. J. Moser das dem q_o entsprechende S_o ungefähr gleich 0,082, also so klein, dass es kaum einen Einfluss hat. Die Werthe von η_1 steigen im allgemeinen gegen die stärkeren Verdünnungen hin, was mit dem Fallen von $(1-n)$ in derselben Richtung zusammenhängt.

Als eine für die Rechnung bequeme Interpolationsformel, die das Steigen des $(1-n)$ bei höheren Concentrationen ausdrückt und bei starken Verdünnungen es sich einem constanten Werthe nähern lässt, habe ich gebraucht:

$$(6) \qquad (1-n) = B.\frac{S-S_o}{S-\sigma}.$$

Setzt man $S_o = 0{,}082$, so ergibt sich σ aus den obigen beiden aus Hittorf's Untersuchungen citirten Werthen gleich 0,35; B ist gleich 0,644 und die Einsetzung dieses Werthes von $(1-n)$ in die Gleichung (4e) ergibt, dass:

$$(6a) \qquad \eta_1 = \frac{1}{A}\log\left(\frac{S_a-\sigma}{S_k-\sigma}\right)$$

constant sein müsste. Die Rechnung gibt für η_1 eine Reihe von Werthen, die das Steigen bei den stärkeren Verdünnungen nicht mehr zeigen, nämlich:

$\eta_1 = 0{,}05630 \quad 0{,}05311 \quad 0{,}05691 \quad 0{,}05517 \quad 0{,}05762$

Mittel 0,055 822.

Mit diesem Mittelwerthe von η_1 sind dann die in der Tabelle als berechnet angegebenen Werthe von A gefunden, welche, wie man sieht, verhältnissmässig gut mit den beobachteten übereinstimmen.

Für den Zinkvitriol liegen drei Beobachtungen von Hittorf für den Werth von $(1-n)$ vor, nämlich:

$$\begin{aligned} 1-n &= 0{,}778 \text{ für } S = 2{,}524 \\ &= 0{,}760 \;\;„\;\; „ = 4{,}052 \\ &= 0{,}636 \;\;„\;\; „ = 267{,}16. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich eine Interpolationsformel mit drei Constanten construiren, nämlich:

$$1 - n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \,.\, S^{-\alpha}$$

worin:

$$\mathfrak{A} = 0{,}636 \qquad \mathfrak{B} = 0{,}44445 \qquad \alpha = 0{,}60474.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (4e), indem man $q = m\,S$ setzt, und $\frac{b}{p_o}$ als unerheblich vernachlässigt, so erhält man:

$$A = b\,V_o \,.\, \mathfrak{A}\left\{\log \frac{S_a}{S_k} - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,.\,\alpha}\left[S_a^{-\alpha} - S_k^{-\alpha}\right]\right\}.$$

Wenn man den Ausdruck in der Parenthese durch A dividirt, muss man einen constanten Werth von $b\,.\,V_o\,.\,\mathfrak{A} = \eta_2$ erhalten.

Zinksulfat.

S_a	S_k	A beobachtet.	A berechnet.	η_2
163	1,972	36	35,2	0,09838
	2,963	28	29,5	0,11665
	4,944	22	23,6	0,11505
	10,889	18	16,2	0,10700
			Mittel	0,10927

Die beobachteten Werthe von A sind die von Hrn. J. Moser gefundenen, die berechneten die aus obiger Formel mit dem Mittelwerthe von η_2 gefundenen.

Für das Zinkchlorid sind die bisher vorliegenden Beobachtungen noch nicht zu verwenden, da die Unterschiede des $(1 - n)$ sehr beträchtlich sind, und die Verminderung des Dampfdruckes in den concentrirten Lösungen sehr gross.

Für die Berechnung des absoluten Werthes der electromotorischen Kraft ist noch Folgendes zu bemerken. Die bisher gebrauchte Stromstärke J ist nach electrostatischem Maasse gemessen; ebenso ist die electro-

motorische Kraft $(P_k - P_a)$ nach electrostatischen Einheiten bestimmt. Nach electromagnetischem Maasse gemessen wird die Stromstärke J übergehen in:

$$J = \frac{1}{\mathfrak{E}} . J$$

und die electromotorische Kraft:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} . (P_k - P_a),$$

wo $\mathfrak{E}$ die von Hrn. W. Weber bestimmte Geschwindigkeit ist. Nach den Bestimmungen von Hrn. Friedrich Weber ist für ein Daniell'sches Element (Cu, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Zn) die electromotorische Kraft in electromagnetischem Maasse:

$$\mathfrak{A}_D = 109\,540\,000 . \frac{cm^{\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}}}{sec^2} .$$

Das in den obigen Tabellen gebrauchte A ist in Einheiten von 0,001 Daniell ausgedrückt, also:

$$\mathfrak{A} = \frac{A . \mathfrak{A}_D}{1000} .$$

Nun zersetzt die electromagnetische Stromeinheit Weber's, deren Einheit ist:

$$\frac{\sqrt{mg . mm}}{sec} = 0{,}01 . \frac{\sqrt{g . cm}}{sec}$$

in der Secunde nach R. Bunsen:

0,009 270 5 mg Wasser

und $\frac{159{,}5}{18}$ mal so viel Kupfersulfat ($CuSO_4$), d. h.:

0,082 147 mg.

Wenn wir also, wie in den Zahlentabellen, mit S die Menge Wasser bezeichnen, die mit einem Gewichtstheil des wasserfreien Salzes in der Auflösung enthalten ist, so ist für die Versuche mit Kupfervitriol:

$$\mathfrak{E}q : S = 0{,}008\,214\,7 . \sqrt{\frac{g}{cm}} : 1.$$

Ist nun die Verminderung des Dampfdruckes durch die

angewendete Salzlösung bekannt, so ergibt sich die Constante b aus der Gleichung:

$$p_0 - p = \frac{\mathfrak{E} b}{\mathfrak{E} q},$$

worin der Druck p auch nach absolutem Kraftmaasse als $\frac{g}{cm \cdot sec^2}$ zu berechnen ist.

Unsere Gleichung (4e) wird mit Hülfe von (6):

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E}(P_k - P_a) = (\mathfrak{E} b) \cdot V_0 B \cdot \log\left[\frac{S_a - \sigma}{S_k - \sigma}\right].$$

Der Werth der Constante $\mathfrak{E}$ braucht also nicht bekannt zu sein für die Berechnung des $\mathfrak{A}$ nach electromagnetischem Maasse, da im Obigen der Werth des $\mathfrak{E} b$ direct gefunden ist.

Mittels der Gleichung (6a) erhalten wir für Kupfervitriollösungen:

$$(6b) \quad \frac{\mathfrak{A}_D}{1000} = \frac{\mathfrak{E} \cdot b \cdot V_0 \cdot B \cdot \eta_1}{\log \text{brigg } e} = \mathfrak{E} \cdot q \cdot \frac{V_0 \cdot p_0 \cdot B \cdot \eta_1}{\log \text{brigg } e} \cdot \frac{p_0 - p}{p_0}.$$

Es ist oben gefunden:

$$B = 0{,}644 \qquad \eta = 0{,}055\,822.$$

Die Berechnung von V_0 ist nach Mariotte's und Gay Lussac's Gesetzen unter Annahme des theoretischen specifischen Gewichtes 0,623 gegen Luft ausgeführt.

Um die Uebereinstimmung des absoluten Werthes der electromotorischen Kraft unserer Ketten mit der durch die Formel gegebenen zu prüfen, fehlen noch ausreichende Data über die Dampfspannung der gebrauchten Salzlösungen. Benutzt man die Gleichung (6b), um aus der von Hrn. J. Moser gefundenen electromotorischen Kraft der Zellen mit Kupfersulfatlösungen die Grösse $\frac{p_0 - p}{p_0}$ für die einprocentige Lösung bei 20° C. zu berechnen, so erhält man diese Grösse gleich 0,00091 [1]), was zwischen den

1) Die Abweichung von dem in den Berl. Monatsber. angegebenen Werthe 0,00082 ist hier durch die Berücksichtigung der Inconstanz des Werthes von $(1 - n)$ in der oben angegebenen Weise bedingt.

von Hrn. Wüllner für Rohrzuckerlösungen (0,00070) und den für die leicht löslichen Alkalisalze gefundenen Werthen liegt. Hr. J. Moser hat in der letzten Zeit im hiesigen Laboratorium versucht die Dampfspannung über Kupfervitriollösungen durch Wasserdruckhöhen zu messen. Für Lösungen, welche 25% ihres Gewichtes an krystallisirtem Salze enthalten, war die Verminderung des Dampfdruckes etwa nur 3 mm Wasser. Die oben angegebene Grösse berechnet sich aus seinen bisher ausgeführten Versuchen im Mittel zu 0,00086. Aber die einzelnen Bestimmungen schwankten noch bei der Kleinheit des zu beobachtenden Werthes zwischen 0,00076 und 0,00110. Eine Verbesserung der Methode steht noch in Aussicht.

Wenn man berücksichtigt, dass sich bei dieser Berechnung Factoren gegen einander heben, die aus den verschiedensten Gebieten der Physik entnommen sind, und von denen einer über hundert Millionen beträgt, so mag der bisher erreichte Grad von Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch immerhin als beachtenswerth erscheinen, obgleich die Genauigkeit einiger Elemente der Rechnung noch zu wünschen übrig lässt.

IV. *Galvanische Ströme zwischen verschieden concentrirten Lösungen desselben Körpers und deren Spannungsreihen; von James Moser.*

(Aus den Monatsber. der Berl. Akad. 8. Nov. 1877, vom Hrn. Verf. mitgetheilt.)

Auf die electromotorische Kraft der Flüssigkeitsketten ist die Concentration der Flüssigkeiten von Einfluss. Um die Art dieses Einflusses zu bestimmen, habe ich im Laboratorium des Hrn. Prof. Helmholtz Flüssigkeiten untersucht, bei denen es möglich ist, diesen Einfluss der Concentration zu isoliren. Alle chemischen Processe waren auszuschliessen; es durften also nur Verschiedenheiten der

Concentration vorhanden sein oder Aenderungen derselben während des Stromes eintreten. Ebenso mussten zur Eliminirung aller chemischen Wirkungen die Electroden aus demjenigen Metalle bestehen, welches sich in der Lösung befand.

Zwei Gläser mit verschieden concentrirten Lösungen desselben Salzes wurden durch einen Heber verbunden und durch eine metallische Leitung mit den eben erwähnten Electroden der Kreis geschlossen.

Dann beobachtete ich in allen untersuchten Fällen, dass ein Strom entsteht, der in der Flüssigkeit von der verdünnteren zur concentrirteren Lösung geht. Sein Schema ist:

Zn, verdünntes $ZnSO_4$, concentrirtes $ZnSO_4$, Zn.
$\longrightarrow$

Dieser Strom zeigte sich gesetzmässig an einer Reihe von Lösungen von Zinksulfat, von Zinknitrat, von Zinkchlorid, Zinkacetat, Kupfersulfat, Kupfernitrat, Eisenchlorid, Silberacetat, Silbernitrat u. a.

Die electromotorischen Kräfte dieser Ketten beobachtete ich nach der von Hrn. du Bois-Reymond modificirten Poggendorff'schen Compensations-Methode von wenigen Tausendteln bis zu $^1/_5$ Daniell, letztere Kraft zwischen sehr verdünnter und concentrirter Zinkchloridlösung.

In folgender Tabelle gebe ich die zehn electromotorischen Kräfte zwischen je zwei von fünf Zinksulfatlösungen, wobei die Einheit nahe 0,001 Daniell ist:

100 Theile Lösung enthalten $ZnSO_4 + 7H_2O$:

an der Anode	an der Kathode 15 %	30 %	45 %	60 %	an der Anode	an der Kathode 15 %	30 %	45 %	60 %
1 %	18	22	28	36	30 %	—	—	7	17
15 %	—	5	13	21	45 %	—	—	—	9

Diese Zahlen weisen auf eine Spannungsreihe; denn es ist z. B. die electromotorische Kraft:

zwischen 15 und 30 procentiger Lösung 5,
zwischen 30 und 60 procentiger Lösung 17,
zwischen 15 und 60 procentiger Lösung 21.

Dass eine Spannungsreihe besteht, bestätigte ich dann dadurch, dass ich beispielsweise fünf Gläser, von denen das 1., 3., 5. gleich starke Lösung von 45 %, das 2. stärkere von 60 %, das 4. schwächere von 15 % enthielt, durch vier Heber hintereinander verband. Ich tauchte die eine Electrode in Glas 1, die zweite der Reihe nach in 2, 3, 4, 5. Beim Eintauchen der zweiten in 3 und 5 erhielt ich keinen Strom, denn die Concentrationen der Endlösungen waren gleich. Beim Eintauchen dieser zweiten Electrode in Glas 2 und 4 ergaben sich aber jedesmal Ablenkungen, von denen die eine durch die electromotorische Kraft 9 zwischen 45 und 60 procentiger Lösung, die andere Ablenkung durch die Kraft 13 zwischen 45 und 15 procentiger Lösung in entgegengesetzter Richtung hervorgerufen wurde.

Diese Versuche machte ich auch an einer Reihe anderer Salze. So bestimmte ich die 15 electromotorischen Kräfte zwischen je zwei von sechs Kupfersulfatlösungen:

	B	*C*	*D*	*E*	*F*
A	10	16	21	25	27
B	—	6	11	15	17
C	—	—	5	9	11
D	—	—	—	4	6
E	—	—	—	—	2

F war eine Lösung, die in 100 Theilen 30 Theile krystallisirten Salzes ($CuSO_4 + 5H_2O$) enthielt. Von dieser Lösung waren 100 Volumentheile in *E* mit $33^1/_3$, in *D* mit 100, in *C* mit 300, in *B* mit 700, in *A* mit 2900 Volumentheilen Wassers versetzt.

Durch diese von der verdünnten zur concentrirten Lösung gehenden Ströme wird in der verdünnten Lösung Metall aufgelöst, in der concentrirten Metall ausgeschieden. Erst wenn eine gleichmässige Concentration hergestellt ist, hört der Strom auf.

Für die Arbeit, welche der Strom leistet, würde man das entsprechende Aequivalent in der Arbeit der An-

ziehungskraft zwischen dem Salz und dem Wasser zu suchen haben, welche sich auch in den Wärmewirkungen zu erkennen gibt, die beim Mischen von Lösungen desselben Salzes zu beobachten sind.

Demnach ist der von mir beobachtete Strom aufzufassen als Reactionsstrom gegen die Wanderung der Ionen, wie der Polarisationsstrom Reactionsstrom gegen den Zersetzungsstrom ist. Denn wird irgend ein Salz electrolysirt, so wird immer die Lösung an der Anode concentrirter, an der Kathode verdünnter. Meine Versuche ergeben, dass dann eine electromotorische Kraft auftritt, welche der der electrolysirenden Batterie entgegenwirkt.

V. *Experimente über die Reibung zwischen Wasser und Luft; von Dr. Viktor von Lang*[1]).

Ueber die Reibung zwischen Wasser und Luft existiren nur wenige Angaben und diese wenigen widersprechen einander. J. B. Venturi[2]) behauptet, dass die durch einen Wasserstrahl in Bewegung gesetzte Luft leichte Körper bewege, G. Magnus[3]) leugnet dies, da er findet, dass die einem verticalen Wasserstrahl genäherte Flamme keine Bewegung der benachbarten Luft verräth. Die nachfolgenden Versuche beweisen jedoch, dass in der That zwischen Wasser und Luft starke Reibung stattfindet, so starke, dass sie sich kaum von völliger Adhäsion unterscheidet.

Es ist aber sehr fraglich, ob Venturi diese reine Reibung zwischen Wasser und Luft gekannt hat, da er nichts über die Constitution seiner Wasserstrahlen angibt.

1) Diese Abhandlung ist auch englisch in den Phil. Trans of the Roy. Soc. CLXVI. 2 erschienen. — Der Verf.

2) Recherches expérimentales sur le principe de communication latérale dans les fluides etc. Paris 1797. Gilbert's Ann. II. 1799.

3) Pogg. Ann. LXXX 1850.

Es ist nämlich zu bedenken, dass Venturi lange vor Savart experimentirte, welcher erst die zwei Theile eines verticalen Wasserstrahles unterscheiden lehrte, den continuirlichen Theil und den in Tropfen aufgelösten. Nur an dem ersteren lässt sich das besprochene Phänomen nachweisen, obwohl auch der discontinuirliche Theil des Strahles die umliegende Luft in Bewegung setzt und noch viel kräftiger. Aber in diesem Falle war Magnus in vollem Rechte, wenn er die Bewegung der Luft anderen Ursachen zuschrieb.

Beschreibung des Apparates.

Nach dem oben Gesagten ist es klar, dass ich meine Versuche mit der Herstellung eines continuirlichen Wasserstrahles zu beginnen hatte. Magnus gibt hierzu die nöthigen Vorschriften; allein derselbe lässt den Strahl aus einem Reservoir ausfliessen, während ich dazu die Leitung benutzen wollte, welche seit kurzem der Stadt Wien Wasser aus den Bergen zuführt. Es ist kein Zweifel, dass auf diese Weise viele Unbequemlichkeiten vermieden werden konnten, welche die Methode von Magnus und seines Vorgängers Savart ziemlich lästig machen. Nach vielen fruchtlosen Versuchen gelangte ich zuletzt zum Ziele hauptsächlich durch Einschaltung eines Kautschukschlauches zwischen den Wasserhahn und das Ausflussrohr *a*. Taf. II. Fig. 4.

Letzteres Rohr ist aus Glas, 8 cm lang, äusserer Radius 0,72 cm, innerer 0,54 cm. Unten ist dasselbe nicht eben, sondern absichtlich unregelmässig gezackt.

Der ganze Ausflussapparat muss äusserst solid aufgestellt sein; auch die leiseste Erschütterung bewirkt sogleich die Auflösung des continuirlichen Strahles in Tropfen; überdies ist es wünschenswerth die Mittel zu haben, um das Ausflussrohr genau vertical stellen zu können, falls nämlich die Axe des Strahles ihre Lage nicht ändern soll, wenn die ausfliessende Wassermenge zunimmt oder abnimmt. Man erreicht beide Zwecke auf folgende Weise.

Ein hölzerner Balken *b* ist horizontal an den beiden Seitenwänden einer Fensternische befestigt. Darauf ist mit Hülfe zweier Zug- und zweier Druckschrauben eine Messingplatte *c* festgehalten. Diese Platte trägt ein verticales Messingrohr *d*, 4 cm lang und mit einem äusseren Radius von 1,1 cm; und dieses Rohr hält das Ausflussrohr, welches darin luftdicht eingekittet ist, so dass es auf beiden Enden vorsteht.

Mittelst der erwähnten vier Schrauben kann das Ausflussrohr vertical gestellt werden, indem es zugleich ganz unabhängig von Erschütterungen des Fussbodens ist.

Der Kautschukschlauch *e*, welcher das Ausflussrohr mit dem tiefer gelegenen Wasserhahn *f* verbindet ist beiläufig einen Meter lang und 0,3 cm dick. Die beiden Enden des Schlauches sind in verticaler Richtung 30 cm, in horizontaler 40 cm entfernt. Fäden, welche an der Zimmerdecke befestigt sind, halten den Schlauch in die Höhe.

Auf diese Weise konnten continuirliche Wasserstrahlen von verschiedener Länge erzielt werden. Die grösste Länge konnte aber nicht ermittelt werden, da der Strahl 130 cm unter der Ausflussöffnung auf ein Brett traf, das ebenfalls an der Mauer befestigt war. Regulirte man durch den Hahn *f* die ausfliessende Wassermenge, so dass der Strahl continuirlich blieb, bis er die Oberfläche des Wassers in einem darunter gestellten Gefässe erreichte, so war von der Bewegung des Wassers nichts zu hören und der Strahl glich vollkommen einem Glasstabe.

Diese Regelmässigkeit wurde natürlich vollständig gestört, so oft an benachbarten Orten die Wasserleitung benutzt wurde. Ein in die Leitung eingeschaltetes Manometer zeigte wenigstens an, wann der normale Zustand wieder eingetreten war. Dieser normale Druck des Wassers beträgt am Beobachtungsorte beiläufig vier Atmosphären.

Ich habe nun die speciellen Vorrichtungen zur Demonstration der Reibung zwischen Luft und Wasser zu

beschreiben. Dahin gehört zunächst ein Kreuzstück *g* aus Glasröhren, alle mit einem äusseren Radius von 1,1 cm. Von den vier Armen dieses Kreuzstückes hat einer die Länge von 36 cm, die übrigen drei eine Länge von 7 cm. Der lange Arm wird durch ein Kautschukrohr mit dem unteren Ende des Messingrohrs *d* luftdicht verbunden, zu welchem Zwecke beide Röhren denselben äusseren Radius haben. Bei dieser Stellung des Kreuzstückes sind 2 Arme desselben horizontal. In einen dieser Arme ist mittelst eines Kautschukstöpsels ein offenes Manometer *h* eingesetzt; der andere Arm führt zum Maassrohr *i*, mit welchem er durch ein kurzes Kautschukrohr luftdicht verbunden ist. Dieses Rohr *i* dient zur Messung der Luftbewegung, die durch die Reibung am Wasserstrahle in der Saugröhre *k* veranlasst wird, deren Querschnitt den des Strahles nicht viel übertrifft. Die Saugröhre wird durch den vierten Arm des Kreuzstückes gehalten, mit welchem sie durch ein Kautschuk-Mundstück verbunden ist, wie es zum Säugen von Kindern gebraucht wird. Das obere Ende der Saugröhre wurde immer in die Höhe der horizontalen Axe des Kreuzstückes, also 35 cm unter die Ausflussöffnung gebracht; das untere Ende war gewöhnlich trichterförmig erweitert, um Störungen durch adhärirende Tropfen zu vermeiden. Um aber das Saugrohr so stellen zu können, dass seine Axe mit der des durchfliessenden Wasserstrahles coïncidirte, wurde ein schwerer Träger *m* mit drei verschiebbaren Armen auf dem zuvor erwähnten Brette aufgestellt. Jeder dieser Arme endigt in einen Ring mit drei Schrauben, um ein Glasrohr in der Mitte festhalten zu können. Der oberste Ring *n* dient blos zur Sicherung des Kreuzstückes, dessen längster Arm von ihm festgehalten wird. Im übrigen unterscheidet sich dieser Arm nicht von ähnlichen Vorrichtungen für chemische Zwecke. Bei den beiden anderen Ringen *o*, *o'*, welche das Saugrohr festzuhalten haben, handelt es sich aber darum, zwei horizontale Bewegungen zu haben, die senkrecht auf einander sind und durch Schrauben getrieben werden. Dies

ist auf folgende Weise ausgeführt. Das zum Ringe *o* gehörige Verschiebungsstück *p* hat in horizontaler Richtung ein viereckiges Loch, in welches ein viereckiger Stab *q* hineinpasst, dessen hinteres Ende mit einem Gewinde versehen ist. Die dazu gehörige Mutter *r* wird durch eine Gabel *s* festgehalten, die ebenfalls am Verschiebungsstück befestigt ist, so dass das Drehen dieser Mutter eine Verschiebung des Stabes nach vorn oder hinten bewirkt. Auf einer Seite des Stabes ist eine starke Feder *t* befestigt, welche vorn den Ring *o* trägt. Die Feder drückt gegen eine Schraube *u*, welche senkrecht durch den Stab in horizontaler Richtung geht und welche so den Ring nahezu in einer Geraden von rechts nach links bewegt.

In Betreff der Maassröhre habe ich noch zu sagen, dass dieselbe ein Knie bildet mit zwei ungleichen Armen. Der kürzere Arm hat einen äusseren Durchmesser von 1,1 cm und wird, wie schon oben erwähnt, an einen der Seitenarme des Kreuzstückes mittelst eines Kautschukschlauches angesetzt. Der andere Arm des Knies ist gewöhnlich abwärts gerichtet und bildet die eigentliche Maassröhre; ihr Radius wurde von verschiedener Grösse gewählt, indem genaue Messungen einen grösseren Radius verlangen. In letzterem Falle musste die Maassröhre aus zwei Theilen verfertigt werden, welche durch Kork und Siegellack luftdicht mit einander verbunden wurden.

Die durch das Saugen des Wasserstrahles bewirkte Luftbewegung kann durch Seifenlamellen leicht sichtbar gemacht werden. Taucht man nämlich das offene Ende der Maassröhre in eine Lösung von Seife, so bleibt beim langsamen Wegziehen dieser Lösung eine Lamelle zurück, welche sogleich der Bewegung der Luft in der Saugröhre zu folgen beginnt. Ist einmal die ganze Maassröhre benetzt, so wandern solche Lamellen sogar durch den horizontalen Theil dieser Röhre, bis sie an der Mündung der Saugröhre platzen. Man kann auch eine ganze Reihe von Lamellen hintereinander zu gleicher Zeit auf-

steigen lassen, wobei dieselben noch besser halten, da die Geschwindigkeit mit der Anzahl der Lamellen abnimmt.

Handelt es sich um Messung des durchgesaugten Luftvolumens, so wird man eine einzige Lamelle anwenden und an dem Maassrohr eine Papierscala anbringen, an welcher der Weg der Lamelle in einer Secunde abgelesen werden kann. Hieraus und aus dem inneren Halbmesser der Röhre findet man dann leicht das durchgesaugte Volumen[1]).

Mit Hülfe des beschriebenen Apparates kann man noch auf eine andere Art die Bewegung der Luft durch einen Wasserstrahl studiren. Man vertauscht nämlich die gläserne Maassröhre mit einer metallenen. Das offene Ende derselben wird nach unten gekehrt und die Flamme einer mit Terpentinöl gefüllten Lampe hineingehalten. Der intensive Rauch einer solchen Flamme verräth sogleich heftige Bewegung, da wo scheinbar alles in Ruhe ist. Der Rauch steigt an den Wänden des Kreuzstückes empor und bewegt sich abwärts in der Nähe des Strahles. Dazwischen ist natürlich eine Zone ohne verticale Bewegung, aber in dieser Zone findet eine sehr heftige Rotation um eine horizontale Axe statt. Dies sieht man an grösseren Russtückchen, die zufällig in diese Zone gelangen.

Was die Bewegung der Luft in der Saugröhre betrifft, so ist der Rauch nicht dicht genug um darin gesehen zu werden, wenn die Röhre sehr eng ist, man sieht aber, dass der Rauch beim Verlassen des Rohres den Strahl noch einige Zeit einhüllt. Dies zeigt, dass die Lufttheilchen sehr regelmässig durch das Rohr in parallelen Linien fliessen.

Das zuletzt beschriebene Phänomen findet nicht mehr statt, wenn der Radius der Saugröhre grösser wird. In

---

1) Diese Methode Gasvolumina zu messen wurde schon von Dr. F. Exner bei seinen Untersuchungen über die Diffusion der Gase durch Flüssigkeitslamellen angewandt. Wien. Ber. LXX (1874).

diesem Falle kann man auch den Rauch sehen und dadurch bemerken, dass die Bewegung der Luft sehr unregelmässig ist, obwohl auch in diesem Falle eine aufsteigende Bewegung nicht entdeckt werden konnte.

Messung der Gestalt des Wasserstrahles.

Die Menge der aspirirten Luft hängt natürlich ab von dem Durchmesser des Wasserstrahles und von der Geschwindigkeit des Wassers an seiner Oberfläche. Um letztere zu ermitteln blieb nichts übrig als anzunehmen, dass für den ganzen Querschnitt des Strahles die Geschwindigkeit constant sei. Dieselbe kann dann leicht berechnet werden aus dem Durchmesser des Strahles und aus der in der Secunde ausgeflossenen Wassermenge. Diese zwei Grössen hängen von einander ab für jeden Querschnitt des Strahles. Hat man correspondirende Messungen derselben an verschiedenen Stellen des Strahles ausgeführt, so kann man dann später den Radius blos aus der ausgeflossenen Wassermenge berechnen.

Die Messung des Halbmessers des Strahles geschah mit Hülfe eines 2 m von letzterem abstehenden Kathetometers. Das Fernrohr ist mit einem Ocularmikrometer versehen und seine Vergrösserung derart, dass einer Länge von 1 cm 6,80 Umdrehungen der Mikrometerschraube entsprechen. Ich habe noch hinzuzufügen, dass die per Secunde ausfliessende Wassermenge durch Wägen des in 5 Secunden ausgeströmten Quantums gefunden wurde.

Für das Folgende ist eigentlich nur die Kenntniss des Wasserstrahles von 35 cm unter der Ausflussöffnung abwärts nöthig. Aber es scheint mir, dass es für andere Probleme von Interesse sein könnte, die Form eines Wasserstrahles auch oberhalb jener Grenze zu kennen, und deshalb will ich hier meine vollständigen Beobachtungen mittheilen.

In der folgenden Tabelle bezeichnet z die verticale Entfernung von der Ausflussöffnung, W die per Secunde ausfliessende Wassermenge und r den Halbmesser des Strahles an der durch z gegebenen Stelle. Die Entfernung

z ist in Centimetern, W in Grammen und r in Umdrehungen der Mikrometerschraube gemessen. Die für W und r gegebenen Zahlen sind Mittelwerthe aus 2 — 10 Beobachtungen.

z	W	r	r'	$r-r'$	z	W	r	r'	$r-r'$
5	2,2	1,29			15	2,5	0,88		
	4,0	1,56				4,7	1,03		
	8,0	2,24				9,0	1,76		
	12,0	2,72				13,5	2,13		
	15,8	2,98				23,0	2,60		
	18,5	3,24				26,6	2,99		
	23,1	3,67				33,8	3,40		
	29,5	4,07							
25	5,4	1,20			35	9,0	1,29		
	9,4	1,52				11,5	1,60		
	13,0	1,80				13,8	1,68		
	19,0	2,13				18,2	2,02	2,009	+0,011
	24,0	2,45				25,4	2,31	2,334	−0,024
	29,7	2,75				31,0	2,60	2,587	+0,013
	33,5	2,95							
45	8,1	1,25			55	10,4	1,27		
	11,2	1,50				11,9	1,36		
	13,8	1,68				14,2	1,51		
	18,0	1,85	1,905	−0,055		16,9	1,80	1,755	+0,045
	24,2	2,25	2,165	+0,085		20,7	1,92	1,921	−0,001
	27,4	2,30	2,299	+0,001		25,6	2,09	2,115	−0,025
	34,8	2,58	2,610	−0,030		32,4	2,37	2,396	−0,026
65	12,9	1,36			75	12,4	1,27		
	14,7	1,56				16,2	1,51	1,502	+0,008
	18,3	1,73	1,729	+0,001		21,5	1,80	1,763	+0,037
	23,8	1,93	1,931	−0,001		28,3	2,01	2,097	−0,087
	28,6	2,11	2,106	+0,004		33,2	2,38	2,338	+0,044
	36,2	2,38	2,384	−0,004					

Die mit r' überschriebene Columne gibt die Werthe von r, aus folgenden Formeln berechnet:

$z=35$ $r=1{,}1860+0{,}045\,202\ W.$
45 $1{,}1503+0{,}041\,941\ W.$
55 $1{,}0566+0{,}041\,354\ W.$
65 $1{,}0606+0{,}035\,555\ W.$
75 $0{,}7064+0{,}049\,137\ W.$

Die Constanten dieser Formeln wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den entsprechenden direct beobachteten Werthen von r berechnet. Die letzten Formeln geben für $W=20$ und $W=30$ folgende Zahlen für r:

W	z	r	r'	$r-r'$	W	z	r	r'	$r-r'$
20	35	2,090	2,085	+0,005	30	35	2,542	2,567	−0,025
	45	1,989	1,957	+0,032		45	2,408	2,404	+0,004
	55	1,884	1,865	+0,019		55	2,297	2,287	+0,010
	65	1,791	1,795	−0,004		65	2,157	2,198	−0,041
	75	1,689	1,741	−0,052		75	2,181	2,129	+0,052

Die berechneten Werthe von r, mit r' bezeichnet, wurden aus folgenden Formeln erhalten:

$$W=20 \quad r=0{,}9976+6{,}4342\frac{1}{\sqrt{z}},$$

$$30 \qquad 1{,}1819+8{,}1973\frac{1}{\sqrt{z}},$$

deren Constanten ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den vorstehenden Werthen von r berechnet wurden. Auch in diesem Falle stimmen die berechneten Zahlen mit den beobachteten, so gut als es für den gegenwärtigen Zweck nöthig ist. Aus den zwei letzten Formeln wurde schliesslich die Gleichung:

$$r=0{,}6290+0{,}01843\,W+(2{,}9080+0{,}17631\,W)\frac{1}{\sqrt{z}}$$

abgeleitet, welche den Radius des Strahles für jede Höhe und Wassermenge gibt. Drückt man die Schraubenumdrehungen in Centimetern aus, so erhält man dem angegebenen Werthe dieser Umdrehungen zufolge:

$$r=0{,}09246+0{,}002\,709\,W+(0{,}42748+0{,}025\,918\,W)\frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Messung des Volumens der durchgesaugten Luft.

Ich habe schon die Methode auseinandergesetzt, nach welcher das Volumen der durchgesaugten Luft gemessen wurde. Dabei entsteht aber die Frage, ob bei dieser Methode das durch eine Seifenlamelle bestimmte Volumen auch wirklich gleich ist dem Volumen, welches durchgesaugt wird, wenn die Maassröhre ganz offen ist. Fürs erste könnte das Gewicht der Lamelle von Einfluss sein, indem dasselbe in einem der Bewegung der Luft entgegengesetzten Sinne wirkt. Es kann aber der Versuch leicht so abgeändert werden, dass das Gewicht der Lamelle die Luftbewegung begünstigt; zu dem Zwecke braucht man nur die Maassröhre mit ihrem offenen Ende nach aufwärts einzusetzen; die Seifenlamellen können jetzt nicht direct erzeugt werden, sondern man muss zuerst einen weiten Cylinder in die Seifenlösung tauchen und hierauf muss die Lamelle von diesem Cylinder auf das Maassrohr übertragen werden. Dieses Verfahren kann auch bei der nach abwärts gerichteten Stellung der Maassröhre bisweilen von Vortheil sein.

Solche Versuche ergaben, dass das Gewicht der Lamelle keinen angebbaren Einfluss hat, da beide Stellungen der Maassröhre dieselben Zahlen für die unter sonst gleichen Umständen durchgesaugte Luft gaben. Es wurde daher bei den folgenden Versuchen der Bequemlichkeit halber immer die nach abwärts gerichtete Stellung der Maassröhre beibehalten.

Von grossem Einfluss dagegen ist der Durchmesser der Maassröhre, und es zeigt sich, dass bei Röhren von verschiedenem Durchmesser die weiteren Röhren immer ein grösseres Volumen geben. Aber diese Vermehrung wird continuirlich geringer, wenn man fortfährt die Maassröhre weiter zu machen, und von einem gewissen Radius an wächst das Volumen nicht mehr. Bei diesem Punkte angelangt kann man sagen, dass die Seifenlamelle ohne jeden nachtheiligen Einfluss auf das Volumen der durchgesaugten Luft ist.

Aehnliche Beobachtungen kann man auch an dem früher erwähnten Wassermanometer machen. Dasselbe zeigt keinen Druckunterschied, wenn während der Aspiration die Maassröhre offen bleibt; schliessen wir dieselbe jedoch mit einer Seifenlamelle, so zeigt das Manometer eine Druckverminderung an, die desto unmerkbarer wird, je weiter die Maassröhre ist.

Der Radius, bei welchem der Einfluss des Querschnittes der Maassröhre verschwindet, hängt gewiss von dem durchgesaugten Quantum Luft ab. Für meine Versuche scheint ein Halbmesser von 2,4 cm vollkommen hinreichend zu sein.

Da in einer weiten Maassröhre die Bewegung der Lamellen eine viel langsamere als in einer engen ist, so kann sie auch mit grösserer Genauigkeit gemessen werden. Die Verwendung weiterer Maassröhren ist daher auch aus diesem Grunde vortheilhaft.

Die folgende Tabelle gibt die Radien aller benutzten Maassröhren.

Maassrohr	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Halbmesser	1,096	4,00	2,42	1,57	1,13	0,85 cm.

Man kann diese Maassröhren auch paarweise anwenden, indem man an Stelle des Manometers die zweite Maassröhre einsetzt. Einige auf diese Weise angestellte Versuche finden sich unter den folgenden Messungen.

Der erste Theil dieser Messungen wurde im Juli 1875 mit den Röhren 1—4 ausgeführt, deren Länge succesive verkleinert wurde, um so auch den Einfluss dieser Dimension zu finden. Zu diesen Messungen wurde noch die Maassröhre I verwendet, deren Durchmesser nicht die erforderliche Grösse hatte, wie die späteren Versuche lehrten. Aber dieser Umstand, welcher von grossem Einfluss ist mit Bezug auf die absoluten Werthe des Luftvolumens, konnte bei den gegenwärtigen Versuchen vernachlässigt werden. Das Resultat dieser Versuche war, dass das Quantum der durchgesaugten Luft mit der Länge der Röhre

sich einem Maximum nähert. Das Maximum selbst konnte auch bei den engsten Röhren nicht erreicht werden; aber dies dürfte wohl an der conischen Form des Wasserstrahls liegen; innerhalb gewisser Dimensionen wächst nämlich das Luftvolumen, wenn der Strahl enger wird, natürlich immer bei gleichbleibender Ausflussmenge des Wassers.

Die folgende Tabelle gibt die bei diesen Versuchen gefundenen Zahlen, wobei die Ausflussmenge des Wassers gleich 20 g ist. A bedeutet das Volumen der aspirirten Luft, l die Länge der Saugröhre, R ihren Radius, welcher durch das Gewicht des die Röhre füllenden Quecksilbers gefunden wurde. Die zwei letzten Grössen sind in Centimetern, A in Cubikcentimetern ausgedrückt.

Saugröhre.	R	l	A	Saugröhre.	R	l	A
1	0,254	47,2	17,1	2	0,288	47,1	22,3
		38,2	16,6			37,3	21,8
		36,0	15,1			26,5	19,1
		16,0	14,0				
3	0,383	49,8	28,1	4	0,435	50,5	25,2
		42,6	25,8			44,0	23,1
		36,5	22,6			31,7	17,5.

Die Zahlen für A sind nicht direct beobachtet, sondern zuerst wurde das Mittel genommen aller Ablesungen für A über und aller unter $W = 20$, und dann wurde die verlangte Grösse aus diesen zwei Mitteln durch einfache Proportion interpolirt.

Für die Röhren 1 und 2 ist die Veringerung des Volumens A sehr klein, wenn ihre Länge um 10 cm abnimmt. Die Röhren 3 und 4 dagegen sind offenbar viel zu kurz, um das Maximum von A zu geben. Wir können daher sagen, dass eine Saugröhre von 47 cm Länge, wenn $W = 20$, das Maximum von A nur dann gibt, wenn ihr Radius unter 0,29 cm ist.

Die zweite Serie von Messungen wurde im October desselben Jahres mit den Saugröhren 5—9, alle 48 cm lang,

und mit den Maassröhren II – VI ausgeführt. Die Werthe von *A*, welche mit diesen verschiedenen Röhren gefunden wurden, sind in der folgenden Tabelle gegeben. Es existirt kein wesentlicher Unterschied zwischen den Zahlen, welche mit den Röhren II und III gefunden wurden; selbst die gleichzeitige Anwendung beider Röhren vermehrte das Volumen nicht. Für die nachfolgenden Rechnungen wurde daher das Mittel der Werthe II und III genommen, und die so gefundenen Zahlen sind in der letzten Columne angegeben.

Saugröhre.	*R*	*W*	II.	III.	IV.	V.	VI.	II. + III.	*A*
5	0,238	26,0	13,8	14,0	14,1	13,4	12,6	14,0	14,0
6	0,244	25,5	14,7	14,8	14,7	13,8	13,5	—	14,8
7	0,261	20	20,5	19,5	18,7	17,8	17,1	—	20,0
		30	17,9	17,0	16,6	16,3	15,8	—	17,5
8	0,287	17,0	24,5	25,6	21,3	17,9	17,7	—	25,1
		22,0	24,0	23,8	22,1	19,6	18,4	—	23,9
		30,0	22,5	22,7	20,7	19,7	19,5	—	22,6
9	0,303	20,0	26,0	25,3	21,4	21,7	–	—	25,7
		23,8	25,5	25,8	22,5	21,8	—	26.1	25,6
		30	24,7	25,1	22,6	21,9	—	—	24.9

Angenäherte Theorie der Versuche.

Die exacte Theorie dieser Versuche wird unter anderm dadurch erschwert, dass der Wasserstrahl an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Radius hat. Aber um wenigstens eine angenäherte Lösung des Problems zu erhalten, wollen wir eine cylindrische Form des Strahles voraussetzen. Im Einklange mit den Rauchexperimenten nehmen wir ferner an, dass alle Lufttheilchen durch die Saugröhre in geraden Linien fliessen, parallel zur Röhrenaxe, welche wir zur X-Axe wählen. Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen hat daher nur für diese Axe einen endlichen Werth u, während dieselbe Null wird für jede Richtung senkrecht zu dieser Axe.

Der letzten Annahme zufolge muss der Druck in jedem Querschnitt der Saugröhre constant sein. Nun haben wir aber mit Hülfe des Manometers gesehen, dass der Druck am Anfang der Röhre derselbe ist wie am Ende, nämlich der Druck der Atmosphäre; dies führt uns darauf, anzunehmen, dass der Druck überhaupt in der ganzen Länge der Röhre nicht variirt.

Bedenken wir ferner, dass die Bewegung der Luft in der Saugröhre eine stetige ist und unabhängig von der Zeit, und dass keine äusseren Kräfte existiren, so reduciren sich die hydrodynamischen Gleichungen für den gegenwärtigen Fall auf:

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0. \tag{1}$$

und die Continuitätsgleichung wird:

$$\frac{d(\mu u)}{dx} = 0. \tag{2}$$

In dieser letzten Gleichung bezeichnet μ die Dichte, welche constant sein muss, wenn der Druck constant ist. Diese Gleichung ist daher durch unsere Annahme erfüllt. Was Gleichung (1) betrifft, so ist ihr Integral:

$$u = L \log q + M, \tag{3}$$

wo q die Entfernung von der X-Axe bedeutet. Die Constanten L und M müssen bestimmt werden durch die Bewegung der Luft nächst der Röhre und nächst dem Wasserstrahle. Setzen wir voraus, dass kein Gleiten stattfindet, dass also die Luft sowohl am Glase als am Wasser adhärirt, so haben wir die correspondirenden Werthe:

$$q = R \quad u = 0, \qquad q = r \quad u = U, \tag{4}$$

wo U die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche des Strahles gegeben ist durch:

$$W = \pi r^2 U. \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) geben:

$$u = \frac{W}{\pi r^2} \frac{\log R - \log q}{\log R - \log r}, \tag{6}$$

und folglich für das Luftvolumen A, welches per Secunde durch die Röhre fliesst:

$$(7) \qquad A = \int_r^R u\, 2\pi\, q\, dq = W\left[\frac{R^2 - r^2}{2r^2(\log R - \log r)} - 1\right].$$

Um unsere Beobachtungen mit dieser Formel vergleichen zu können, haben wir noch zu bestimmen, welchen numerischen Werth wir für den Radius des Strahles annehmen wollen. Das Einfachste ist natürlich, für r das Mittel seiner Werthe am Anfang und Ende der Röhre zu nehmen; und in der That erhalten wir auf diese Weise ein ziemlich gutes Resultat, wie aus der folgenden Vergleichung der beobachteten Werthe von A mit den berechneten A' hervorgeht.

Saugröhre.	r	A	A'	$A - A'$
5	0,1582	14,0	14,20	− 0,20
6	0,1566	14,8	15,56	− 0,76
7	0,1392	20,0	20,02	− 0,02
	0,1708	17,5	17,22	+ 0,28
8	0,1300	25,1	24,57	+ 0,53
	0,1456	23,9	24,77	− 0,87
	0,1708	22,6	22,71	− 0,11
9	0,1392	25,7	28,06	− 2,36
	0,1512	25,6	27,83	− 2,23
	0,1708	24,9	26,19	− 1,29

Erst bei der Röhre 9 übersteigen die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen die möglichen Beobachtungsfehler. Aber der Radius dieser Röhre ist schon über der Grenze, innerhalb welcher unsere Annahmen über die Bewegung der Luft gültig sind.

Ich versuchte noch eine bessere Uebereinstimmung zu erreichen durch die Annahme, dass ein Gleiten stattfände zwischen der Luft und dem Wasserstrahle, und

auch zwischen der Luft und der Saugröhre. Wir erhalten dann statt der Bedingungen (4) die folgenden:

$$\begin{aligned} q &= R\,, & u &= -\psi \frac{du}{dq}, \\ q &= r\,, & U - u &= -\xi \frac{du}{dq}, \end{aligned} \tag{8}$$

wo ξ der Gleitungscoëfficient für Wasser, ψ dieser Coëfficient für die Glasröhre ist. Diese Bedingungen geben für u und L:

$$u = \frac{W}{\pi r^2} \frac{\log R - \log q + \frac{\psi}{R}}{\log R - \log r + \frac{\psi}{R} + \frac{\xi}{r}}, \tag{9}$$

$$L = W \frac{(R^2 - r^2)\left(\frac{R^2}{r} + \psi\right) - Rr^2 (\log R - \log r)}{Rr^2 (\log R - \log r) + Rr\xi + r^2\psi}. \tag{10}$$

Wendet man die letzte Formel auf die früheren Beobachtungen an, so erhält man zehn lineare Gleichungen für ξ und ψ, aus welchen man nach der Methode der kleinsten Quadrate $\xi = \psi = 0{,}029$ findet. Mit diesen Zahlen erhält man die folgenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen von A:

+ 0,23	− 0,26	+ 0,87	+ 0,85	+ 1,69
+ 0,20	+ 0,71	− 1,86	− 1,18	− 0,40.

Man sieht, dass die Uebereinstimmung von derselben Ordnung ist wie früher, obwohl die Summe der Fehlerquadrate jetzt ein wenig kleiner ist, 10,01 gegen 17,46 von früher. Die Gleichheit von ξ und ψ könnte leicht erklärt werden, da die Röhre inwendig immer nass war; die Werthe von ξ und ψ verdienen aber kein Vertrauen, da sie sogar negativ werden, wenn man nur die sieben ersten Beobachtungen zu ihrer Bestimmung verwendet. Die wahren Werthe von ξ und ψ können nur gefunden werden, wenn man die conische Form des Wasserstrahles berücksichtigt.

Ich habe auch die erste Serie der Beobachtungen nach Formel (7) berechnet. Die berechneten Werthe sind

natürlich alle zu gross, da die Maassröhre, mit der die Beobachtungen ausgeführt wurden, zu eng war; aber man kann doch bemerken, dass die Rechnung parallel mit der Beobachtung geht, so lange als die Grenze nicht überschritten wird, innerhalb welcher unsere Theorie Stich hält.

Saugröhre.	l	r	A	A'	$A-A'$
1	47,2	0,1393	17,1	18,5	− 1,4
	38,2	0,1408	16,6	17,8	− 1,2
	26,9	0,1435	15,1	16,9	− 1,8
	16,0	0,1463	14,0	16,1	− 2,1
2	47,1	0,1393	22,3	25,1	− 2,8
	37,3	0,1410	21,8	24,3	− 2,4
	26,5	0,1434	19,1	23,4	− 4.3
3	49,8	0,1389	28,1	45,1	− 18,0
	42,6	0,1400	25,8	44,4	− 18,6
	36,5	0,1412	22,6	43,9	− 21,3
4	50,5	0,1391	25,2	57,2	− 32,0
	44,0	0,1398	23,1	56,2	− 33,1
	31,7	0,1422	17,5	54,8	− 37,3

Anhang.

Wir haben gesehen, dass selbst, wenn wir $\xi = \psi = 0$ setzen, die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung nicht grösser als die Beobachtungsfehler werden. Wir können daher keine wesentlichen Differenzen erwarten, wenn wir Saugröhren aus anderem Materiale anwenden. Dies wurde auch durch Versuche bestätigt, die mit zwei Messingröhren angestellt wurden. In diesem Falle war es ziemlich mühsam, den Strahl in die Axe der Röhre zu bringen, da ja die Röhre undurchsichtig war. Der Radius dieser Röhren wurde bestimmt mittelst Cylindern, welche sorgfältig in die Röhren eingepasst wurden, ihre Länge war wieder 48 cm. In der folgenden Tabelle sind die

Werthe A durch die Beobachtung gefunden, die Werthe A' nach Gleichung (7) berechnet.

Saugröhre.	R	W	r	A	A'	$A-A'$
10	0,228	22,2	0,1461	14,7	13,66	+ 1,04
		24,9	0,1548	13,6	12,70	+ 0,90
11	0,270	19,8	0,1386	23,8	21,69	+ 2,11
		23,7	0,1509	23,2	21,14	+ 2,06

Ich habe auch einige wenige Versuche mit anderen Gasen angestellt. Aber auch in diesem Falle konnten keine grossen Differenzen aus dem früher erwähnten Grunde erwartet werden, da Unterschiede nur aus verschiedenen Gleitungscoëfficienten entstehen könnten. Bei diesen Versuchen wurde der Manometer-Arm des Kreuzstückes benutzt, um das Gas einzuleiten. Um den Apparat gänzlich von Luft zu befreien, wurde abwechselnd die Seifenlamelle aspiriren gelassen durch den Strahl, dann aber wieder zurückgetrieben nach der Mündung der Maassröhre durch die Einführung von neuem Gase. Die erhaltenen Resultate sind:

Saugröhre.	W	r	A	A'	
6	24,3	0,1528	15,2	16,0	Leuchtgas
7	30,0	0,1708	17,0	17,2	„
8	24,2	0,1525	25,1	24,4	„
	26,0	0,1461	26,0	24,4	Kohlensäure

VI. *Ueber einige Eigenschaften der Metalllegirungen; von Eilhard Wiedemann.*

I. Ueber Ausdehnung und Abkühlungsgeschwindigkeit des Rose'schen und Lipowitz'schen Metallgemisches.

Im Jahre 1827 wies G. A. Erman[1]) durch specifische Gewichtsbestimmungen nach, dass das Rose'sche Metall im festen Zustande bei steigender Temperatur ein Dichteminimum zeigt und zwar sollte es sich zunächst ausdehnen, dann sich zusammenziehen und endlich kurz vor dem Schmelzen und während desselben sich wieder ausdehnen. Ganz analoge, freilich in den numerischen Werthen verschiedene Resultate fand später H. Kopp[2]) unter Anwendung eines thermometrischen Verfahrens. Neuerdings hat endlich W. Spring[3]) sowohl für das Rose'sche (bestehend aus 48,902 Gewichtstheilen Wismuth, 23,553 Zinn und 27,545 Blei), als auch für das Darcet'sche (Bi = 49,247, Sn = 21,210, Pb = 27,553), das Wood'sche (Bi = 55,74, Sn = 13,73, Pb = 13,73, Cd = 16,80) und das Lipowitz'sche Metallgemisch (Bi = 49,98, Sn = 12,76, Pb = 26,88, Cd = 10,38) die Volumänderungen bei steigender Temperatur bestimmt.

Folgendes war der von ihm benutzte Apparat: An den oberen Theil eines kugelförmigen Glasgefässes von etwa 36 mm Durchmesser waren drei Ansätze angeschmolzen; in den einen war ein Thermometer eingeschliffen, der zweite trug einen Glashahn, der dritte bildete das zur Messung dienende getheilte Glasrohr. Nach dem Füllen des Apparates mit der Legirung und mit Oel und Entfernen aller Luft wurden bei den Messungen die jeweilig 5° Erwärmung entsprechenden Erhebungen des Oeles in dem Glasrohre bestimmt und dann der oberste Punkt des Oeles

1) Pogg. Ann. IX. p. 557. 1827.
2) Liebig Ann. XCIII. p. 129. 1855.
3) Bull. Brux. (2) XXXIX. Mai 1875.

durch Oeffnen des Glashahnes und Austretenlassen von Oel aus demselben wieder auf den Nullpunkt zurückgeführt; und dann wieder um 5° erhitzt.

Ueber das Mengenverhältniss des in dem Dilatometer enthaltenen Metalles und Oels finden sich keine Angaben, doch lässt sich aus der Zeichnung ersehen, dass das Volumen des ersteren höchstens ein Viertel so gross war als das des letzteren, die Gewichte derselben sich also, wenn wir das specifische Gewicht der Metalle im Mittel zu 9,5, das des Oels zu 0,9 annehmen, etwa wie 3:1 verhalten.

Da sowohl Kopp als auch Spring nur die Erscheinungen beim Erwärmen der Metalle verfolgt haben und zur Entscheidung der Frage, ob die unregelmässigen Ausdehnungserscheinungen nicht etwa von Uebergängen einer Modification der Legirung in eine andere herrühren, gerade die Untersuchung des Verhaltens beim Abkühlen von Interesse zu sein schien, so habe ich die Volumänderungen beim Rose'schen und Lipowitz'schen Metallgemisch von neuem bestimmt. Zu gleicher Zeit wurde das Verfahren so modificirt, dass ich möglichst grosse Mengen Metall im Verhältniss zu dem vorhandenen Oel (35:1) untersuchte, und auch kein Zersprengen der Apparate beim Erstarren der Metallgemische zu befürchten war.

Das Metall wurde zunächst in einem Reagirglas geschmolzen und nach dem Abkühlen von der durch die Ausdehnung zersprengten Glashülle befreit. Der so erhaltene Cylinder *a* (Taf. II Fig. 5) wurde in ein anderes Reagirglas *b*, das er fast ausfüllte, eingesetzt, und dieses dann in ein Glasrohr *c* eingeschoben, an dessen oberes Ende ein $1^1/_2$ m langes Capillarrohr *d* angeschmolzen war; *c* wurde unten zugeschmolzen. An das Capillarrohr war noch ein seitliches Rohr *m* mit einem Hahn *h* angesetzt. Man tauchte den ganzen Apparat in ein grosses Wasserbad und erhitzte letzteres so hoch, bis das Metall schmolz. — Das Rohr *m* war mit einem umgebogenen Glasrohr verbunden, das durch den einen Tubus einer mit Oel gefüllten

Woulff'schen Flasche bis auf den Boden derselben reichte, während in ihren zweiten Tubus ein anderes Glasrohr gesteckt war, das mit einer Luftpumpe communicirte. Die Woulff'sche Flasche stand in einem erhitzten Wasserbade und wurde ebenso wie das geschmolzene Metall durch Auspumpen möglichst von Luft befreit; dabei war das Capillarrohr am oberen Ende verschlossen. Durch Zulassen von Luft in die Pumpe trieb man das Oel in das Dilatometer.

Hierauf schloss man den Hahn und beobachtete den Rückgang des Oeles, das bis an das Ende des Capillarrohrs hinaufgetrieben worden war, bei langsamer Abkühlung; bei etwa um 5° von einander abstehenden Temperaturen wurden letztere längere Zeit constant erhalten[1]). Da es sich bei den Messungen nur um die Unregelmässigkeiten im Gang der Erscheinungen handelt und um Verschiebungen bei constanter Temperatur, so gebe ich blos die Gesammtverschiebungen des Oelfadens und nicht die auf die Ausdehnung resp. Contraction des Metalles allein reducirten an.

1. Rose'sches Metall: Von 100° an ging bei der langsamen Abkühlung der Index zunächst langsam (pro Grad um 11 mm) zurück, zwischen 95° und 90° trat dann eine starke Contraction, entsprechend etwa 720 mm, ein, das flüssige Metall erstarrte; dieser Vorgang war nach etwa 3 bis 4 Stunden vollendet. Kühlte man dann das Metall weiter ab, so zog es sich zunächst weiter zusammen, in einem Fall regelmässig bis 50°, wo eine schnelle Ausdehnung eintrat, in anderen Fällen nur bis 70°, und es fand dann bei dieser Temperatur und einer etwas niedrigeren eine langsame stetige Ausdehnung statt, die in einzelnen Fällen erst nach 24 — 36 Stunden vollendet war und 100 mm und mehr betrug. Nach vollendeter Ausdehnung

1) Dies wurde dadurch sehr erleichtert, dass durch Bedecken des Wassers im Wasserbade mit einer dünnen Oelschicht die Verdunstung und die dadurch bedingte Abkühlung verhindert wurde.

zog sich das Rose'sche Metall bei weiterem Abkühlen wieder langsam und regelmässig zusammen und zwar um etwa 10 mm pro Grad.

Beim Wiedererwärmen traten ganz entsprechende Erscheinungen ein, zunächst dehnte sich das Metall langsam regelmässig aus, bei einer Temperatur von etwa 78° trat eine Contraction ein, die wieder mehrere Stunden, ja Tage währte, der dann bei weiterem Erhitzen eine regelmässige Ausdehnung folgte. Zu beachten ist, dass die Temperatur, bei der beim Erwärmen die Contraction eintritt, höher liegt als die, bei der beim Erkalten die Ausdehnung sich zeigt. Bei anderen Versuchen wurde das Rose'sche Metall nicht bis zum Schmelzen, sondern nur bis 85° und zwar so lange erhitzt, dass die Contraction vollkommen vollendet war; es traten dann beim Abkühlen ganz dieselben Erscheinungen auf, wie nach dem ersten Schmelzen; in diesem Falle waren sie aber weit regelmässiger, es trat die anomale Ausdehnung stets bei nahe der gleichen Temperatur ein. Das End-Volumen bei niedrigen Temperaturen war stets dasselbe, sowohl nach vorherigem Schmelzen als nach blossem Erhitzen auf 85°. Diese Resultate wurden durch eine grosse Zahl von Versuchen bestätigt.

Wenn nun schon die lange Zeit, die das Rose'sche Metallgemisch braucht, um, sei es beim Erwärmen, sei es beim Abkühlen, einen Endzustand zu erreichen, deutlich zeigt, dass wir es hier nicht mit einfachen Ausdehnungserscheinungen, sondern mit molecularen Umlagerungen zu thun haben, so wird dies auch noch durch folgenden Versuch bestätigt.

Der Apparat wurde schnell von 20° auf 88° erhitzt, der Index bewegte sich von 340 bis 907 mm und seine höchste Stellung entsprach einem Volumen, das weit grösser war, als irgend eines der beim langsamen Erwärmen oder Abkühlen bei derselben Temperatur erhaltenen, dann sank aber der Index sehr schnell, in 50 Minuten um 138 mm. Kühlte man nach Vollendung der Contraction das Rose'sche Metall schnell auf 20° ab, so trat die umgekehrte

Erscheinung ein, das Metall zog sich zusammen und hatte bei 20° im ersten Moment ein weit kleineres Volumen, als es je bei langsamen Temperaturänderungen bei derselben Temperatur besessen, dann dehnte es sich schnell aus und erreichte bald sein normales Volumen.

Die eben besprochenen Erscheinungen erklären sich unmittelbar aus der Annahme, dass das Rose'sche Metall zwei Modificationen besitzt. Beim schnellen Erwärmen dehnt sich die bei niedrigerer Temperatur stabile, weniger dichte Modification (α) nahezu unverändert bis zu der Temperatur von 88° aus, indem die beim Erwärmen verstreichende Zeit nicht dazu genügt, dass die eine Modification sich in die andere, bei der höheren Temperatur stabile (β) umwandelt, eine Umwandlung, die dann bei constant erhaltener Temperatur freilich sehr schnell erfolgt. Beim schnellen Abkühlen findet die Modification β nicht Zeit, sich vollkommen in α umzulagern, die Legirung besass daher bei 20° nahezu das Volumen, das die Modification β besitzen würde, wenn sie unverändert bis auf diese Temperatur abgekühlt werden könnte.

Die Versuche zeigten ausserdem, dass, wie zu erwarten, die Umwandlung von α in β um so schneller erfolgt, je höher die Temperatur, von β in α, je niedriger dieselbe ist.

Dass bei dem langsamen Abkühlen nach vorherigem Schmelzen erst bei niedrigeren Temperaturen die Umwandlung erfolgt, als wenn das Rose'sche Metall vorher nur bis etwa 85° erhitzt wurde, dürfte sich daraus erklären, dass wahrscheinlich in dem nicht ganz bis zum Schmelzen erhitzten und umgewandelten Metall noch kleine Mengen der der niedrigeren Temperatur entsprechenden Modification α vorhanden sind, die die Umwandlung der Modification β einleiten; ganz analog, wie ein Krystall einer Modification α irgendeines Körpers die Umwandlung einer grösseren Menge einer anderen Modification β desselben in α hervorruft [1]).

1) Eine Zusammenstellung der hierher gehörigen Phänomene siehe O. Lehmann, über physikalische Isomerie. Z. S. f. Krystgr. I. p. 97—131. Beibl. I. 481. 1877.

Genauere Messungen über das einer jeden Temperatur entsprechende Volumen auszuführen, war bei der langen Dauer der Versuche nicht wohl thunlich. Auch sind dieselben in ausgezeichneter Weise von Kopp und Spring angestellt worden, die mit kleineren Mengen Metalles (Kopp mit 12 g, Spring mit höchstens 80 g, wahrscheinlich aber weit weniger; er selbst gibt keine Werthe an) als ich (350 g) arbeitend, schnell den Endzustand der Legirung erreichten, dabei aber freilich die molecularen Umlagerungen nicht erkennen konnten.

Ganz analoge Resultate ergaben sich beim Lipowitz'schen Metallgemisch. Doch sind hier die Volumänderungen nicht so gross wie beim Rose'schen und auch die bei den Umlagerungen verstreichenden Zeiten nicht so bedeutend. Meine bei dieser Legirung für die Umwandlungspunkte erhaltenen Zahlen weichen von den von Spring für die Dichteminima gefundenen beträchtlich ab, doch kann dies daran liegen, dass bei den grossen von mir benutzten Massen leichter beim Schmelzen eine Scheidung in einen schwereren und einen leichteren Theil eintreten kann. Die der niedrigeren Temperatur entsprechende Modification besitzt überdies einen höheren Schmelzpunkt als die andere. Genaue Angaben hier mitzutheilen erscheint kaum von Interesse.

Anschliessend an die obigen Versuche über die Volumänderungen der Rose'schen und Lipowitz'schen Legirung sind noch ihre Abkühlungsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Temperaturen untersucht worden. Sie wurden dazu in einem cylindrischen Messinggefäss von 40 mm Höhe und 25 mm Weite geschmolzen und in sie ein zur Isolation mit Papier umwickeltes Thermoelement aus Neusilber und Eisen eingetaucht, das selbst mit einem Spiegelgalvanometer verbunden war. Man liess dann das geschmolzene Metallgemisch sich langsam abkühlen und beobachtete von Minute zu Minute die Ausschläge des Galvanometers. (Einem Ausschlag von 660 entsprach eine Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen von 76°; bei den Versuchen hatte die kältere Löthstelle stets die Temperatur von etwa 20°.)

Die folgende Tabelle enthält die bei einem Versuche erhaltenen Resultate, und zwar gibt die erste Columne die Zeiten, die zweite die denselben entsprechenden Galvanometerausschläge nach vorherigem Schmelzen, die dritte nach blossem Erhitzen der Substanz. Die Minute 0 entspricht indess einer Zeit, in welcher das geschmolzene Metall bereits erstarrt war, indem die vorhergehenden Aenderungen für uns ohne Interesse sind.

Zeiten.	Galvanometerausschläge.		Zeiten.	Galvanometerausschläge.	
0′	320	335	12′	245	140
1′	294	314	13′	235	127
2′	267	290	14′	—	—
3′	248	276	15′	215	—
4′	235	257	16′	201	—
5′	229	239	17′	189	—
6′	232	222	18′	—	—
7′	236	206	19′	165	—
8′	245	191	20′	155	—
9′	252	178	21′	—	—
10′	—	166	22′	135	—
11′	251.5	154			

Die ausgezogene und punktirte Curve (Taf. II Fig. 6) entsprechen den Columnen 2 und 3 der Tabelle; dabei sind als Abscissen die Zeiten, als Ordinaten die Galvanometerausschläge genommen. Aehnliche Resultate wie der oben angeführte Versuch gaben im wesentlichen zahlreiche andere, nur dass bei einzelnen nicht bei einer Temperatur eine Zunahme der Ausschläge, also eine Erhöhung der Temperatur, sondern nur ein sehr verlangsamtes Sinken derselben eintrat. Die Zahlen, wie die Curven zeigen deutlich, dass bei der Abkühlung nach dem Schmelzen, nicht aber nach blossem Erhitzen eine Wärmeentwickelung auftritt, die von einer molecularen Umlagerung herrührt.

Man kann daher auch nicht aus der Abkühlungsgeschwindigkeit nach vorherigem Schmelzen bei einer Tem-

peratur irgendeinen Schluss auf die specifischen Wärmen der Legirung ziehen, denn die Umlagerung findet sowohl bei Temperaturen statt, die beträchtlich höher als auch beträchtlich tiefer sind als diejenige, bei der das Wiederansteigen der Temperatur, d. h. die schnellste Umlagerung eintritt, wie die lange Zeitdauer zeigt, die nach den Versuchen über die Volumänderungen zur Erreichung eines Endzustandes nöthig ist. Derartige Versuche des Hrn. Spring ergeben daher auch nicht die specifischen Wärmen, sondern die von ihm gefundenen Zahlen enthalten auch noch die Umwandlungswärmen.

Ganz analog wie das Rose'sche Metall verhielt sich auch hier das Lipowitz'sche; nur dass bei ihm die einzelnen Phänomene in schwächerem Maasse hervortraten.

Das Darcet'sche und das Wood'sche Metallgemisch dürften ähnliche Eigenschaften besitzen[1]).

2) Ueber die mehrfachen Schmelzpunkte der Legirungen.

Im Jahre 1830 fand Rudberg[2]), dass, wenn eine geschmolzene, stark erhitzte Legirung von Zinn und Blei, Zinn und Zink, Zinn und Wismuth sich abkühlt, ein in sie eingetauchtes Thermometer bei zwei Temperaturen längere Zeit einen constanten Stand behält; diese Tempeperaturen T und T_1 wurden „Schmelzpunkte" genannt. Eine einzige Legirung aus je zwei Metallen zeigte einen einzigen Schmelzpunkt T_1 und zwar fiel derselbe mit dem tiefstgelegenen der übrigen zusammen. Rudberg nahm zur Erklärung der Erscheinung an, dass nur eine einzige wahre chemische Verbindung A der beiden die Legirung bildenden Metalle mit dem Schmelzpunkt T bestehe, und dass bei dem höheren Schmelzpunkt T_1 zunächst das ganze nicht zur Bildung derselben nöthige, überschüssige Metall sich ausscheide und dadurch den ersten Stillstand des Ther-

1) Einige Versuche über die thermoelectromotorischen Kräfte des Rose'schen Metalles gegen Kupfer bei der ersten Abkühlung nach dem Schmelzen und bei der nach blossem Erhitzen bestätigten die früher erhaltenen Resultate.

2) Pogg. Ann. XVIII. p. 240—249. 1830.

mometers bedinge, und erst bei der Temperatur T die Legirung A erstarre, in der das ursprünglich ausgeschiedene Metall vertheilt bleibt.

Da mir die obige Erklärung nicht ganz genau däuchte und mir schon aus den Zahlen von Rudberg hervorzugehen schien, dass bei dem höheren Schmelzpunkte nicht ein wirklicher Stillstand, sondern nur ein sehr viel langsameres Sinken des Thermometers eintritt, so habe ich einige der Rudberg'schen Versuche wiederholt. Die Legirungen wurden in einem cylindrischen 40 mm hohen und 30 mm weiten Messinggefäss geschmolzen. Das in ganze Grade getheilte Thermometer[1]), an dem sich noch leicht Zehntel schätzen liessen, befand sich, um es vor dem Zerdrücken durch das erstarrende Metall zu schützen, nicht unmittelbar in dem Gemisch, sondern war von einer kleinen, unten verschlossenen Messingröhre umgeben, die mit Leinöl gefüllt war und in die Legirung eintauchte. Die Abkühlung geschah im Innern eines mit einem doppelten Deckel bedeckten doppelwandigen Gefässes; durch den Zwischenraum zwischen den Wänden desselben ging ein constanter Wasserstrom aus der Wasserleitung, dessen Temperatur etwa 15° betrug. Während der Abkühlung wurde von Minute zu Minute die Temperatur des Thermometers abgelesen.

Die umstehende Tabelle enthält die für eine Blei-Zinn- (Sn Pb), eine Zinn-Zink-Legirung ($Sn_5 Zn$) und reines Zinn erhaltenen Resultate, und zwar gibt die erste Columne die Zeiten, die zweite, dritte und vierte die ihnen entsprechenden Temperaturen.

Aus der Tabelle geht zunächst hervor, dass bei keiner der beiden Legirungen ein wirklicher Stillstand oberhalb der Temperatur von etwa 180—182°, resp. 197° stattfand, dass aber bei etwa 250° eine langsamere Abkühlung eintrat, die, noch ehe das Metall die Temperatur erreicht

1) Da es sich bei der vorliegenden Untersuchung nur um relative Zahlen handelte, so war das Thermometer nicht mit dem Luftthermometer verglichen worden.

Zeiten.	Zinn-Blei-Legirung.	Zinn-Zink-Legirung.	Zinn.	Zeiten.	Zinn-Blei-Legirung.	Zinn-Zink-Legirung.	Zinn.
0′	273	270	271	18′	180,9	196,5	206
1′	260	257	255	19′	180,5	196,2	195
2′	249	249	240	20′	180	—	—
3′	242,5	241,5	229	21′	178,5	195.5	176
4′	237	234,5	228	22′	174	194	166
5′	231	227	227.5	23′	166,2	190	157.5
6′	225	219,5	227,5	24′	158,5	183	150
7′	218	212	227,5	25′	151,5	176	142,2
8′	211,5	205	227,5	26′	146,5	168	135,2
9′	204,7	199	—	27′	143,1	159	129
10′	198	197,2	—	28′	139,5	152,2	123
11′	191	197	225,5	29′	134,5	145	—
12′	184,1	197	—	30′	129	138,5	—
13′	181	197	225	31′	124	132	—
14′	181	197	224	32′	119,2	126	—
15′	181	197	223,2	33′	114,8	120.5	—
16′	181	197	222	34′	110	115	—
17′	181	197	216	35′	106	—	—

hatte, bei der der zweite wirkliche Stillstand sich zeigte, in eine schnellere überging. Diese schnellere Abkühlung ist um so auffallender, als sie bei einem geringeren Temperaturüberschuss über die Umgebung auftritt, als die frühere langsamere. Bei 180—182°, resp. 196—198° trat ein wirklicher Stillstand des Thermometers ein, dem ein Sinken folgte, das allmählich langsamer wurde, entsprechend der Annäherung der Temperatur der Legirung an die der Umgebung.

Die Erscheinungen lassen sich vollkommen erklären, wenn man annimmt, bei der niedrigeren Temperatur schmelze die Legirung vom einfachen Schmelzpunkt und in ihr löse sich das überschüssige Metall und zwar in mit der Temperatur schnell steigender Menge. In der

That würde sich gerade ebenso wie die obige Legirung die Lösung eines Salzes verhalten, dessen Löslichkeit mit der Temperatur schnell steigt, wenn sie sich in einem Raume von einer Temperatur unter 0° abkühlte. Auch eine solche Lösung kühlt sich zunächst relativ schnell ab, bis eine Ausscheidung von Salz stattfindet und die dabei frei werdende Wärme die Abkühlung verzögert. Das Auskrystallisiren tritt bei um so höherer Temperatur ein, je concentrirter die Lösung ist. Mit sinkender Temperatur nehmen die innerhalb gleicher Temperaturintervalle abgeschiedenen Salzmengen ab, also auch die durch deren Abscheidung bedingte Wärmeentwickelung. Bei einer Temperatur unter 0° erstarrt das Lösungsmittel und es bleibt längere Zeit die Temperatur constant, um dann langsam regelmässig weiter zu sinken.

Auf die schnelle Zunahme der Löslichkeit des einen Metalls in der geschmolzenen Lösung mit der Temperaturerhöhung lassen uns aber nicht nur die Abkühlungsgeschwindigkeiten schliessen, sondern auch die Angaben früherer Beobachter über die Lage des höheren sogenannten Schmelzpunktes.

So findet z. B. Rudberg die folgenden ersten Stillstandspunkte t für eine Reihe Blei-Zinn-Legirungen. Die oberste Zeile der Tabelle gibt die jeweilig zu einem Aequivalent $PbSn_3$ zugesetzten Aequivalente von Blei und Zinn, die zweite die den einzelnen Legirungen entsprechenden Werthe von t und die dritte die dem weiteren Zusatze von einem Aequivalent Pb resp. Sn zu den einzelnen Legirungen entsprechende Erhöhung Δ von t.

$PbSn_3$	$+8Pb$	$+5Pb$	$+2Pb$	$+\frac{Pb}{2}$	$+0$	$+Sn$	$+3Sn$	$+9Sn$
t	289	270	240	200	187	192	200	210
Δ	—	6,3	10	26,5	26	5	4	2,7

Die Werthe von Δ zeigen, dass, während im Mittel bei 200° eine Temperaturerhöhung von 26,5° nöthig ist,

um ein Aequivalent Blei in Gegenwart der Legirung $PbSn_3$ zu schmelzen, resp. in letzterer zu lösen, bei 280° nur noch 6,2° dazu erforderlich sind.

Die Erscheinungen bei den anderen geschmolzenen binären und ternären Legirungen lassen sich ganz analog erklären.

Durch Umrühren mit einem Glasstabe kann man sich leicht überzeugen, dass beim langsamen Erhitzen der obigen Legirungen über 182°, resp. 197° vor dem Erreichen des sog. zweiten Schmelzpunktes sich am Boden des Gefässes ein krystallinischer Absatz befindet, herrührend von noch nicht gelöster Substanz.

Der sog. zweite Schmelzpunkt der Legirungen ist also kein wirklicher Schmelzpunkt, sondern er entspricht dem Beginn der krystallinischen Ausscheidung des einen Metalls aus einer bei niedrigeren Temperaturen schmelzenden Legirung.

3) Bemerkungen über die specifische Wärme der Quecksilberlegirungen.

Nach den Untersuchungen von Regnault über die specifischen Wärmen der Metallegirungen ist diese Constante für die grössere Zahl derselben genau das Mittel aus den specifischen Wärmen ihrer Bestandtheile. Eine Ausnahme hiervon machen gewisse Wismuth-Zinn-Blei-Legirungen, denen später Spring in der früher angeführten Arbeit noch Cadmium-Zinn-Blei-Wismuth-Legirungen anreihte, und die Legirungen des Quecksilbers mit anderen Metallen. Bei den ersteren dürften die Abweichungen wohl nicht daher rühren, dass die Versuchstemperaturen zu nahe dem Schmelzpunkte lagen, sondern daher, dass bei der Abkühlung moleculare Umlagerungen eintreten, die mit Temperaturentwickelungen verbunden sind (siehe oben). Bei den letzteren, den Amalgamen, liegen die Verhältnisse complicirter. Bei ihnen erweicht nicht, wie Regnault vermuthete, die ganze Legirung, sondern wir haben es hier, wie bei Zinn- Blei-Legirungen über 182°

mit einem Gemisch aus einem festen und einem flüssigen Bestandtheil zu thun, deren Mengenverhältniss sich mit der Temperatur ändert. Um dies nachzuweisen, wurde die Abkühlungsgeschwindigkeit zweier Zinn-Quecksilber-Legirungen, SnHg und Sn_2Hg untersucht. Dieselben wurden in einem kleinen cylindrischen Eisengefäss erhitzt und dann abkühlen gelassen, während ein Thermometer in sie eintauchte. Zur Vergleichung wurde in demselben Gefäss noch ein Versuch mit Zinn angestellt. Die folgende ebenso wie die früheren angeordnete Tabelle enthält die gefundenen Resultate.

Zeiten.	SnHg	Sn_2Hg	Zinn.	Zeiten.	SnHg	Sn_2Hg	Zinn.
0′	180	223	230	21′	95,2	106	96
1′	167	204	226	22′	94	103	91
2′	154	187	226	23′	—	100	—
3′	144	174	—	24′	—	97,5	—
4′	136	165	226	25′	89	94,5	78,5
5′	130	162	225,5	26′	—	92	—
6′	126	159	224,5	27′	—	90	71,8
7′	125,5	156,5	223	28′	—	87,2	—
8′	123,5	152	221,5	29′	81,8	—	—
9′	121	149	216,5	30′	—	—	63,2
10′	119	145	203	31′	77	79,5	—
11′	116,2	141	187,5	32′	—	—	—
12′	115	137,5	173,5	33′	72	—	—
13′	111,5	133,5	—	34′	—	—	55
14′	109	130	149	35′	67,5	67,5	—
15′	107	126	139	36′	—	—	—
16′	105	122,5	130	37′	6,3	—	—
17′	—	119	121,7	38′	—	60	—
18′	101	115,5	—	39′	5,9	—	—
19′	99	112	—	40′	—	—	—
20′	97	109	101,8				

Die Curven (Taf. II Fig. 6a) geben die Resultate graphisch wieder. Die den einzelnen Legirungen entsprechen-

den Curven sind durch die beigesetzten chemischen Formeln charakterisirt. Bei beiden Legirungen ist bei höheren Temperaturen die Abkühlung eine ziemlich schnelle und fast gleich der des Zinns. Hiernach würde die spec. Wärme gleicher Volumina des Zinns und seiner Amalgame nahezu gleich sein. Dies ist in der That der Fall, wenn man annimmt, dass im flüssigen Zustande die spec. Wärme der Legirung die mittlere der einzelnen Bestandtheile ist. Bei der ersten Legirung HgSn tritt dann bei 128°, bei der zweiten $HgSn_2$ dagegen bei 164° eine beträchtliche Abnahme der Abkühlungsgeschwindigkeit ein, und zwar in ganz ähnlicher Weise wie bei den Zinn-Blei-Legirungen in der Nähe des sogenannten zweiten Schmelzpunktes; doch bleibt bei keiner die Temperatur längere Zeit vollkommen constant (beim Zinn war dies beim Erstarren während 7 Minuten der Fall). Diese langsamere Abkühlung der Amalgame findet sich bis zu den niedrigsten beobachteten Temperaturen und erklärt sich in ganz derselben Weise wie bei den anderen binären Legirungen zwischen den beiden Schmelzpunkten in der Weise, dass Zinn und Quecksilber eine bei einer bestimmten Temperatur erstarrende wirkliche Verbindung bilden, die in Quecksilber mit steigender Temperatur mehr und mehr löslich ist. Bei der Abkühlung scheidet sich bei jeder Temperatur der Ueberschuss an Zinn-Legirung aus und die dabei frei werdende Wärmemenge macht sich bei Bestimmungen der specifischen Wärme geltend. Unter dem Mikroskop scheinen in der That bei den betreffenden Quecksilberlegirungen zwischen den festen Theilchen noch Tröpfchen einer anderen flüssigen Substanz zwischengelagert zu sein.

Leipzig, Physik.-chem. Lab., December 1877.

VII. *Theorie der Absorption und Fluorescenz; von E. Lommel.*

Die Theorie der Absorption und Fluorescenz, die in den folgenden Paragraphen entwickelt werden soll, ist in ihren wesentlichen Zügen die nämliche, welche ich in einer früheren Veröffentlichung[1]) als mehr populär gehaltene Skizze bereits mitgetheilt habe. Es handelt sich hier wie dort um die Aufgabe, die Bewegung eines Körpertheilchens (Atoms) zu bestimmen, das, während es nach einer Gleichgewichtslage hinstrebt, von einem periodischen Impulse ergriffen wird. Die gegenwärtige Behandlung dieser Aufgabe unterscheidet sich von der früheren in zwei Punkten. Nämlich erstens dadurch, dass die zu Grunde liegende Bewegungsgleichung durch Hinzufügung eines Gliedes, welches einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand ausdrückt, eine erweiterte Gestalt erhielt; die Einführung eines solchen Widerstandes involvirt offenbar keine neue Hypothese; sie muss vielmehr, da das Vorhandensein eines Widerstandes der allgemeinere in der Natur gewöhnlich vorkommende Fall ist, angesehen werden als Beseitigung der bisher üblichen Hypothese, dass dieser Widerstand ausser Acht gelassen werden dürfe. Zweitens unterscheidet sich die gegenwärtige Darstellung von der früheren dadurch, dass ein Princip, welches in der Akustik allgemein und ausdrücklich anerkannt ist und in der Optik bisher wohl ebenso allgemein, aber stillschweigend angenommen wurde, nämlich der Satz: „Homogenes Licht besteht aus einfachen pendelartigen Schwingungen", zur Interpretation der Ausdrücke herangezogen wird.

Der Hypothesen, welche unserer Theorie zu Grunde liegen, sind überhaupt nur wenige, und darunter keine, welche für diese Theorie speciell aufgestellt wäre, sondern nur solche, welche auch sonst in der Wissenschaft allgemein anerkannt sind.

1) Pogg. Ann. CXLIII. p. 26.

Vor allem wird an der Anschauung festgehalten, dass die schwingenden Bewegungen, welche die Absorption und Fluorescenz verursachen, innerhalb des Molecüls sich vollziehen, oder, nach der früher von mir gebrauchten Bezeichnung, intramoleculare sind. Unter „Molecül" wird im Sinne der Chemie eine aus Atomen von bestimmter Natur und Anzahl gesetzmässig aufgebaute Atomgruppe verstanden, in der jedem Atom eine bestimmte Gleichgewichtslage angewiesen ist, um welche es zu schwingen vermag.

Es wird endlich vorausgesetzt, dass jedes Atom nach seiner Gleichgewichtslage hingezogen werde mit einer Kraft, welche ausdrückbar sei durch eine nach steigenden Potenzen der Verschiebung entwickelbare Function der letzteren, die in der Gleichgewichtslage selbst zu Null wird. Wenn, entgegen der gewöhnlichen Behandlungsweise, welche sich unter der Annahme verschwindend kleiner Schwingungen auf die Berücksichtigung der ersten Potenz der Verschiebung beschränkt, auch noch deren zweite Potenz mit in Rechnung gezogen wird, so wird auch hiermit keine neue Hypothese aufgestellt, sondern nur eine Beschränkung, welche der vollständigen Hypothese gewöhnlich auferlegt wird, theilweise beseitigt.

---

1. Ein Körperatom von der Masse m befinde sich zur Zeit t im Abstande x von seiner Gleichgewichtslage, und werde nach dieser hingezogen mit einer Kraft, welche als Function dieses Abstandes ausgedrückt sei durch die Reihe:

$$-Ax - Bx^2 - Cx^3 - \ldots .$$

Das Körpertheilchen sei ferner einem seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand $-K\frac{\partial x}{\partial t}$ ausgesetzt, und empfange ausserdem noch einen periodischen Impuls $-F\sin qt$. Die Gleichung seiner Bewegung lautet alsdann:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -K\frac{\partial x}{\partial t} - Ax - Bx^2 - Cx^3 - \ldots - F\sin qt,$$

oder, wenn wir:

$$\frac{K}{m} = 2k, \quad \frac{F}{m} = f, \quad \frac{A}{m} = p^2, \quad \frac{B}{m} = b\varepsilon, \quad \frac{C}{m} = c\varepsilon^2 \ldots$$

setzen, wo unter ε eine kleine Grösse verstanden wird, durch deren Verschwinden die Aufgabe auf den gewöhnlich betrachteten Fall unendlich kleiner Schwingungen reducirt wird, folgendermaassen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial x}{\partial t} + p^2 x + b\varepsilon x^2 + c\varepsilon^2 x^3 + \ldots + f \sin qt = 0.$$

2. Um diese Gleichung näherungsweise zu integriren, setzen wir:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots,$$

ordnen nach Potenzen von ε, und machen die Coëfficienten dieser Potenzen einzeln der Null gleich. Wir erhalten so zur Bestimmung der Functionen x_0, $x_1 \ldots$ die linearen Differentialgleichungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial x_0}{\partial t} + p^2 x_0 + f \sin qt = 0 \\ &\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial x_1}{\partial t} + p^2 x_1 + b x_0^2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial x_2}{\partial t} + p^2 x_2 + 2b x_0 x_1 + c x_0^3 = 0 \\ &\quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Wenn wir in Gleichung (1) bei der zweiten Potenz von x stehen bleiben und sonach die zweite und die höheren Potenzen von ε vernachlässigen, brauchen wir von den Gleichungen des Systems (2) nur die beiden ersten zu berücksichtigen. Die Integration derselben ergibt:

$$(3) \quad x_0 = M \sin(qt - \alpha) + Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$$

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 = &-\frac{M^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\sin 2\beta}{4kq}\cos(2qt - 2\alpha - 2\beta)\right) \\ &- \frac{N^2 b e^{-2kt}}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{\sin 2\gamma}{4kr}\cos(2rt + 2\psi - 2\gamma)\right) \\ &+ \frac{MNbe^{-kt}}{q}\left(\frac{\cos((q-r)t - \alpha - \psi)}{q - 2r} - \frac{\cos((q+r)t - \alpha + \psi)}{q + 2r}\right) \\ &+ N_1 e^{-kt} \sin(rt + \psi_1), \end{aligned}$$

wo N, N_1, ψ, ψ_1 willkürliche Constante sind, die übrigen eingeführten Grössen aber die folgende Bedeutung haben:

$$M = -\frac{f \sin\alpha}{2kq}, \qquad r = \sqrt{p^2 - k^2},$$

(5)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{4kq}{p^2 - 4q^2}, \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{4kr}{3p^2 - 4k^2}.$$

3. Der Ausdruck für x_1 verliert seine Geltung, sobald $q = 2r$ ist; in diesem Falle hat man die Integrale:

(3a) $$x_0 = M \sin(2rt - \alpha) + Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$$

(4a)

$$x_1 = -\frac{M^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\sin 2\beta}{8kr}\cos(4rt - 2\alpha - 2\beta)\right)$$
$$-\frac{N^2 b e^{-2kt}}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\sin\alpha}{4kr}\cos(2rt + 2\psi + \alpha)\right)$$
$$-\frac{MNbe^{-kt}}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4}\cos(3rt - \alpha + \psi) + \tfrac{1}{2}\cos(rt - \alpha - \psi)\right.$$
$$\left. + rt\sin(rt - \alpha - \psi)\right) + N_1 e^{-kt}\sin(rt + \psi_1),$$

worin:

$$M = -\frac{f\sin\alpha}{4kr}, \qquad r = \sqrt{p^2 - k^2},$$

(5a)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4kr}{3p^2 - 4k^2}, \qquad \operatorname{tg} 2\beta = -\frac{8kr}{15p^2 - 16k^2}$$

zu nehmen ist.

4. Für $k = 0$ gestaltet sich die Auflösung im allgemeinen wie folgt:

(3α) $$x_0 = M\sin qt + N\sin(pt + \psi)$$

(4α)

$$x_1 = -\frac{M^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - 4q^2}\cos 2qt\right) - \frac{N^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3p^2}\cos(2pt + 2\psi)\right)$$
$$+ \frac{MNb}{q}\left(\frac{\cos((q-p)t - \psi)}{q - 2p} - \frac{\cos((q+p)t + \psi)}{q + 2p}\right) + N_1\sin(pt + \psi_1),$$

wo:

(5α) $$M = -\frac{f}{p^2 - q^2}$$

ist. Diese Auflösung wird aber unzulässig in drei Fällen, nämlich für $q = 2p$, für $q = \frac{1}{2}p$ und für $q = p$.

Wenn $q = 2p$ ist, hat man zu nehmen:

$$(3\beta) \qquad x_0 = \frac{f}{3p^2}\sin 2pt + N\sin(pt+\psi)$$

$$(4\beta)\quad x_1 = -\frac{f^2b}{18p^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{15p^2}\cos 4pt\right)-\frac{N^2b}{2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3p^2}\cos(2pt+2\psi)\right)$$
$$-\frac{Nfb}{6p^4}\left(\tfrac{1}{4}\cos(3pt+\psi)+\tfrac{1}{2}\cos(pt-\psi)+pt\sin(pt-\psi)\right)+N_1\sin(pt+\psi_1).$$

Wenn $q = \frac{1}{2}p$ ist, gelten folgende Werthe:

$$(3\gamma) \qquad x_0 = -\frac{4f}{3p^2}\sin\tfrac{1}{2}pt + N\sin(pt+\psi)$$

$$(4\gamma)\quad x_1 = -\frac{8f^2b}{9p^6}\left(1-\tfrac{1}{2}pt\sin pt\right)-\frac{N^2b}{2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3p^2}\cos(2pt+2\psi)\right)$$
$$+\frac{16Nfb}{3p^4}\left(\tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{1}{2}pt+\psi)+\tfrac{1}{5}\cos(\tfrac{3}{2}pt+\psi)\right)+N_1\sin(pt+\psi_1).$$

Für $q = p$ endlich ergeben sich die Integrale in folgender Gestalt:

$$(3\delta) \qquad x_0 = \frac{f}{2p}t\cos pt + N\sin(pt+\psi)$$

$$(4\delta)\quad x_1 = -\frac{f^2b}{8p^4}\left(t^2-\frac{2}{p^2}-\left(\frac{t^2}{3}-\frac{26}{27p^2}\right)\cos 2pt+\frac{8t}{9p}\sin 2pt\right)$$
$$-\frac{N^2b}{2p^2}\left(1+\tfrac{1}{3}\cos(2pt+2\psi)\right)$$
$$-\frac{Nfb}{2p^3}\left(-t\sin\psi+\tfrac{1}{3}t\sin(2pt+\psi)+\frac{4}{9p}\cos(2pt+\psi)\right)+N_1\sin(pt+\psi_1).$$

5. Betrachten wir zunächst den letzten Fall, wo $k = 0$ und $q = p$ ist, so sehen wir schon in dem Ausdrucke x_0 (3δ) ein Glied:

$$\frac{f}{2p}t\cos pt$$

auftreten, welches die Zeit t als Factor enthält. Dasselbe stellt eine schwingende Bewegung dar, deren Amplitude der Zeit proportional zunimmt, deren lebendige Kraft demnach ebenfalls mit der Zeit unaufhörlich wächst. Was aber das Körperatom an lebendiger Kraft gewinnt, muss die an ihm vorüberziehende Wellenbewegung, von welcher es den periodischen Impuls $f\sin pt$ empfängt, an Energie

verlieren. Diese Wellenbewegung wird daher, indem sie einen Theil ihrer Energie an die Körperatome abgibt, geschwächt, oder, wie man zu sagen pflegt, sie erleidet Absorption. Wir gelangen sonach zu dem Kirchhoff'schen Satze: Eine Wellenbewegung wird von einem Körper absorbirt, wenn ihre Periode derjenigen gleich ist, in welcher die Körperatome selbst zu schwingen vermögen.

Dieser aus dem Ausdrucke x_0 hergeleitete Satz gilt, gleichviel ob wir nur die erste oder auch noch die zweite Potenz der Verschiebung x in Rechnung ziehen, nur dass im letzteren Falle auch die Bewegung x_1 zur Absorption ihren Beitrag liefert. Das im Ausdrucke x_1 (4δ) enthaltene Glied:

$$-\frac{N^2 b}{2p^2}\left(1+\tfrac{1}{3}\cos(2pt+2\psi)\right)$$

zeigt nämlich, dass das Körperatom auch in der Octave seines Grundtones zu schwingen fähig ist, und die übrigen Glieder lehren, dass auch diese Octave auf Kosten der einfallenden mit dem Grundtone gleichgestimmten Welle an Energie gewinnt.

6. Wenn $q=2p$ ist, tritt in dem Ausdrucke x_1 (4β) das Glied:

$$-\frac{Nfb}{6p^3}\,t\sin(pt-\psi)$$

auf, welches zeigt, dass auch eine Welle, deren Schwingungszahl doppelt so gross ist als die dem Grundtone des Körpertheilchens eigenthümliche, von diesem absorbirt wird, indem sie eben diesen Grundton verstärkt.

Wir nennen diesen Vorgang, weil die Energie der Welle zur Verstärkung einer schwingenden Bewegung verwendet wird, deren Stimmung um eine Octave tiefer liegt, als diejenige der Welle: „Absorption durch die nächsttiefere Octave."

Wenn $q = \frac{1}{2}p$ ist, so folgt aus dem Gliede (Gleichung 4γ):

$$\frac{4f^2b}{9p^5}\, t \sin pt,$$

dass eine Wellenbewegung, deren Schwingungszahl halb so gross ist als diejenige des Grundtones, von dem Körperatome ebenfalls absorbirt wird, indem sie wiederum dessen Grundton verstärkt.

Diesen Vorgang bezeichnen wir als „Absorption durch die nächsthöhere Octave."

Wir stellen diese beiden Arten von Absorption als „indirecte Absorption" der im vorigen Paragraphen betrachteten „directen Absorption" gegenüber, welche letztere man auch als „Absorption durch Einklang" bezeichnen könnte. Die indirecte Absorption wird, da sie lediglich durch den Einfluss der zweiten Potenz der Verschiebung bedingt ist, von der directen begreiflicherweise an Intensität übertroffen.

7. Nachdem hiermit der Grenzfall $k = 0$ vorläufig erledigt ist, wenden wir uns zur Betrachtung des allgemeinen Falles (Gleichungen (3) und (4)), wo k irgend einen positiven Werth hat, und bestimmen zunächst den Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen die schwingende Bewegung des Atomes während der Zeit t durch die Einwirkung des periodischen Impulses gewinnt. Dieser Zuwachs wird dargestellt durch den Ausdruck:

$$\frac{m}{2}\left(\int_o^t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt - \left[\int_o^t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt\right]_{f=0}\right).$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x_o}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots,$$

folglich, wenn wir die mit höheren Potenzen von ε multiplicirten Glieder ausser Acht lassen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_o}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon \frac{\partial x_o}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial x_o}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t}.$$

Berechnen wir obigen Ausdruck zuerst nur für das Glied $\left(\frac{\partial x_o}{\partial t}\right)^2$, so ergibt sich:

$$\int_o^t \left(\frac{\partial x_o}{\partial t}\right)^2 dt - \left[\int_o^t \left(\frac{\partial x_o}{\partial t}\right)^2 dt\right]_{f=0} = \tfrac{1}{2}M^2q^2t + \tfrac{1}{4}M^2q\Big(\sin(2qt-2\alpha) + \sin 2\alpha$$

$$+ \frac{MNq(r(q-r)-k^2)}{(q-r)^2+k^2}\Big(\sin(\alpha+\psi) + e^{-kt}\sin((q-r)t-\alpha-\psi)\Big)$$

$$+ \frac{MNkq^2}{(q-r)^2+k^2}\Big(\cos(\alpha+\psi) - e^{-kt}\cos((q-r)t-\alpha-\psi)\Big)$$

$$+ \frac{MNq(r(q+r)+k^2)}{(q+r)^2+k^2}\Big(\sin(\alpha-\psi) + e^{-kt}\sin((q+r)t-\alpha+\psi)\Big)$$

$$- \frac{MNkq^2}{(q+r)^2+k^2}\Big(\cos(\alpha-\psi) - e^{-kt}\cos((q+r)t-\alpha+\psi)\Big).$$

Im Vergleich mit dem ersten Gliede, welches der Zeit proportional zunimmt, können die übrigen Glieder, falls der Zeitraum t gross genug gedacht wird, ausser Acht gelassen werden. Nehmen wir vorläufig auch auf die mit den Potenzen von ε multiplicirten Glieder keine Rücksicht, so wird in erster Annäherung die Zunahme der lebendigen Kraft während der Zeit t dargestellt durch den Ausdruck:

$$\frac{m}{4}M^2q^2t,$$

und die Zunahme während der Zeiteinheit:

$$\frac{m}{4}M^2q^2$$

kann als Maass der molecularen Absorption angesehen werden. Führen wir statt M seinen Werth aus Gl. (5) ein, soerhalten wir für die Grösse der Absorption den Ausdruck:

(6) $$\frac{mf^2\sin^2\alpha}{16k^2},$$

welcher zeigt, dass die Absorption der Intensität der einfallenden Welle und der Grösse $\sin^2\alpha$ direct, dem Quadrate des Widerstandscoëfficienten $2k$ aber umgekehrt proportional ist.

8. Die Absorption erreicht ihren grössten Werth, wenn $\sin \alpha = 1$ oder $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ist. Nun wird aber:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2}$$

unendlich, wenn $q = p$ ist, wobei zu bemerken ist, dass die Periode der Eigenschwingung des Atomes im gegenwärtigen allgemeinen Falle nicht mehr durch p, sondern durch $r = \sqrt{p^2 - k^2}$ (s. Gl. (5)) bestimmt wird. Wir gelangen daher zu folgendem Satze:

Das Maximum der (molecularen) Absorption findet statt, wenn $q = p$ ist, d. h. wenn die Schwingungszahl der einfallenden Welle gleich derjenigen ist, die dem Körperatome eigen wäre, falls dasselbe ohne Widerstand zu schwingen vermöchte.

Dieser Satz enthält den Kirchhoff'schen als speciellen Fall (für $k = 0$) in sich.

9. Die Absorption beschränkt sich jedoch nicht auf dieses Maximum, sondern erstreckt sich mit abnehmender Stärke nach Maassgabe des Ausdruckes (6) noch zu beiden Seiten des Werthes $q = p$ auf grössere und kleinere Werthe von q. Man wird daher, wenn man durch den absorbirenden Körper gegangenes weisses Licht mittelst des Prismas zerlegt, an der entsprechenden Stelle des Spectrums einen Absorptionsstreifen erblicken, der um so breiter, verwaschener und weniger intensiv erscheint, je grösser der Widerstandscoëfficient $2k$ ist, und dessen Intensitätsverhältnisse überhaupt durch den Ausdruck (6), wenn man ihn als Function von q betrachtet, dargestellt werden. Wir erhalten demnach ein Bild des Absorptionsstreifens, wenn wir den Ausdruck $\sin^2 \alpha$ als eine Curve verzeichnet denken, welche auf die Schwingungszahlen [1]) q

1) Wir denken uns überhaupt in gegenwärtiger Abhandlung das Spectrum entlang einer nach den Schwingungszahlen getheilten Abscissenlinie aufgetragen. Diese Darstellung ist ebenso naturgemäss wie die nach Wellenlängen, hat aber gegenüber dieser den Vortheil, dass sie sich dem prismatischen Spectrum enger anschliesst.

als Abscissen bezogen ist. Man überzeugt sich leicht, dass diese Absorptionscurve nach der weniger brechbaren Seite hin steiler abfällt als nach der brechbareren. Je kleiner k wird, desto schmaler und schwärzer stellt sich der Absorptionsstreif dar, bis er sich in dem Grenzfalle $k = 0$ auf eine scharfe dunkle Linie reducirt.

10. Dass schmale dunkle Absorptionslinien nur bei gasförmigen Körpern beobachtet werden, feste und flüssige Absorbentien dagegen stets mehr oder weniger breite Absorptionsstreifen darbieten, würde sich demnach aus der Annahme erklären, dass innerhalb der Molecüle eines vollkommenen Gases die Schwingungen der Atome ohne Widerstand erfolgen, während sie innerhalb der Molecüle flüssiger und fester Körper einem, vielleicht durch die Cohäsionsverhältnisse bedingten, Widerstande unterworfen sind.

Wenn ein solcher Widerstand einwirkt, so ist, wie die Gleichung:

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

zeigt, die Schwingungszahl des Eigentones des Atomes kleiner als diejenige der stärkstabsorbirten Welle. Obgleich daher diese Art der Absorption zwar nicht mehr „Absorption durch Einklang“ genannt werden kann, so behalten wir doch die Bezeichnung „directe Absorption“ für dieselbe bei, da die früher so bezeichnete (nach unserer Ansicht nur bei Gasen vorkommende) Absorptionsart sich als Grenzfall ($k = 0$) an den gegenwärtigen allgemeineren Fall unmittelbar anschliesst.

11. Wenden wir uns zur Betrachtung derjenigen Theile des Energiezuwachses, welche mit den Potenzen von ε behaftet sind, so ergibt sich zunächst, dass die Glieder, welche aus der Integration der Geschwindigkeitsproducte hervorgehen, sämmtlich von der Form derjenigen sind, welche wir oben in dem durch Integration von $\left(\frac{\partial x_0}{\partial t}\right)^2$

erhaltenen Ausdruck gegenüber dem mit t multiplicirten Gliede vernachlässigen durften; um so mehr dürfen daher die hier in Rede stehenden Theile neben diesem Gliede ausser Acht gelassen werden.

Dagegen liefert die Integration von $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2$ noch das der Zeit proportionale Glied:

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{M^4 b^2 \varepsilon^2 \sin^2 2\beta}{16 k^2} t,$$

gegen welches die übrigen Glieder, die wiederum von der oben bezeichneten Beschaffenheit sind, vernachlässigt werden können, falls nicht etwa $q = 2r$ ist oder diesem Werthe nahe kommt, ein Fall, der eine besondere weiter unten folgende Behandlung erfordert. Demnach muss, um eine zweite Annäherung zu erhalten, dem obigen Absorptionsausdruck $\frac{m}{4} M^2 q^2$ noch das Glied:

$$\frac{m}{4} b^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{M^4 \sin^2 2\beta}{16 k^2} \tag{7}$$

hinzugefügt werden. Dasselbe bleibt im Vergleich mit jener ersten Annäherung im allgemeinen sehr unbeträchtlich, und kann daher, wenn wir uns mit der Darstellung der directen Absorption in ihren Hauptzügen, wie sie oben gegeben wurde, begnügen wollen, unberücksichtigt bleiben.

12. Wenn $q = 2r$ ist, verliert die Gleichung (4) ihre Geltung, und die Gleichung (4a) tritt an ihre Stelle. In dem Ausdrucke für x_1 begegnen wir jetzt dem Gliede:

$$-\frac{MNb}{2r} e^{-kt} \cdot t \cdot \sin(rt - \alpha - \psi),$$

welches eine schwingende Bewegung darstellt, deren veränderliche Amplitude mit der Zeit bis zu einem bei $t = \frac{1}{k}$ erreichten Maximum anwächst. In dem Ausdrucke für $\frac{\partial x_1}{\partial t}$ erscheinen die entsprechenden Glieder:

$$-\frac{MNb}{2}e^{-kt}.t.\left(\cos(rt-\alpha-\psi)-\frac{k}{r}\sin(rt-\alpha-\psi)\right),$$

welche, wenn man bei Berechnung des Integrales von $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2$ alle Glieder ausser Acht lässt, welche Kreisfunctionen enthalten und daher, da sie bei wachsender Zeit bald positiv, bald negativ werden, eine dauernde Zunahme der Energie nicht bedingen können, einen Zuwachs der lebendigen Kraft während der Zeit t in folgender Form:

$$(8)\qquad \frac{m}{4}b^2\varepsilon^2.\frac{M^2N^2p^2}{4r^2}\left(\frac{1}{4k^3}(1-e^{-2kt})-\frac{e^{-2kt}}{2k}\left(t^2+\frac{t}{k}\right)\right)$$

ergeben. Da der eingeklammerte Ausdruck mit wachsender Zeit bis zu dem Grenzwerthe $\frac{1}{4k^3}$ fortwährend zunimmt, so zeigt dieses Glied die Absorption der Welle an, deren Schwingungszahl doppelt so gross ist als diejenige des wirklichen[1]) Grundtones des Körperatomes. Wir bezeichnen, im Anschluss an den bereits erwähnten Grenzfall, diesen Vorgang als „indirecte Absorption durch die nächsttiefere Octave."

13. Diese Absorption erstreckt sich jedoch nicht blos auf diejenige Welle, für welche genau $q=2r$ ist, sondern auch auf die beiderseits benachbarten, für die q dem Werthe $2r$ nahe kommt. Ist dies nämlich der Fall, so darf bei Berechnung der zweiten Annäherung aus der allgemeinen Gleichung (4) das Glied:

$$(9)\qquad \frac{m}{4}b^2\varepsilon^2.\frac{M^2N^2}{2kq^2}.\frac{(q-r)^2+k^2}{(q-2r)^2}\left(1-e^{-2kt}\right),$$

welches bei Betrachtung der directen Absorption $(q=p)$ gegenüber den mit t proportionalen Gliedern ausser Acht gelassen wurde, nicht mehr vernachlässigt werden. Dasselbe nimmt bei wachsendem t bis zu einem Grenzwerthe

1) Im Gegensatz zu dem „idealen" Grundtone p, den das Atom geben würde, wenn es ohne Widerstand schwingen könnte.

zu, der um so beträchtlicher ausfällt, je mehr sich q von der einen oder der anderen Seite her dem Werthe $2r$ nähert. Wir sehen daraus, dass auch die indirecte Absorption zu einem Absorptionsstreifen Anlass gibt, der um so breiter und verwaschener erscheint, je grösser k ist, sich für $k = 0$ dagegen zu einer schmalen Absorptionslinie zusammenzieht.

Von einer Absorption durch die nächsthöhere Octave kann, solange k einen merklichen Werth besitzt, nicht die Rede sein, da das oben bereits berechnete Glied der zweiten Annäherung (7), welchem im Grenzfalle $k = 0$ diese Art von Absorption entspricht, weder für $q = \frac{1}{2}p$ noch für $q = \frac{1}{2}r$ zu einem Maximum wird.

14. Durch die absorbirte Wellenbewegung wird das Körperatom selbst in schwingende Bewegung versetzt oder seine bereits vorhandene Bewegung wird verstärkt. Es wird dadurch selbst zum Ausgangspunkt einer Wellenbewegung, die sich in das umgebende Mittel (in den Aether, wenn es sich um Licht handelt) fortpflanzt. Die schwingende Bewegung des Atoms wird, in erster Annäherung, dargestellt durch den Ausdruck:

$$x_o = M \sin(qt - \alpha) + Ne^{-kt} \sin(rt + \psi),$$

dessen zweites Glied

$$Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$$

die Eigenschwingung des Atoms repräsentirt und nun zunächst betrachtet werden soll. Vermöge des Factors e^{-kt} wird diese Bewegung mit der Zeit immer schwächer und verklingt um so rascher, je grösser k ist. Dieser Umstand berechtigt aber keineswegs zu der Annahme, dass diese Schwingung überhaupt nicht in die Erscheinung trete und deshalb ausser Acht gelassen werden dürfe.

Halten wir nun an dem Grundsatze fest, dass homogenes Licht nur durch einfache pendelartige Schwingungen hervorgebracht werde, so kann diese Schwingung mit veränderlicher Amplitude kein homogenes

Licht darstellen. Um sie in ihre homogenen Bestandtheile zu zerlegen, entwickeln wir den Factor e^{-kt} nach dem Fourier'schen Lehrsatz, und erhalten:

$$e^{-kt} = \frac{1-e^{-ka}}{ka} + \frac{2k}{a}\left(\frac{1+e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{\pi t}{a} + \frac{1-e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{2\pi t}{a}\right.$$
$$\left. + \frac{1+e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{3\pi t}{a} + \ldots\right),$$

eine Entwickelung, welche für alle Werthe von t zwischen 0 und a sowie an diesen Grenzen selbst gültig ist. Die Zerlegung der Eigenschwingung des Atoms in ihre einfach pendelartigen (homogenen) Bestandtheile ergibt sich demnach wie folgt:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi) = \frac{1-e^{-ka}}{ka}\left\{\sin(rt+\psi) + \frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r-\frac{\pi}{a}\right)t+\psi\right)\right.$$
$$+\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r-\frac{2\pi}{a}\right)t+\psi\right)+\frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r-\frac{3\pi}{a}\right)t+\psi\right)+\ldots$$
$$+\frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r+\frac{\pi}{a}\right)t+\psi\right)+\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r+\frac{2\pi}{a}\right)t+\psi\right)$$
$$\left.+\frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\sin\left(\left(r+\frac{3\pi}{a}\right)t+\psi\right)+\ldots\right\}.$$

Der Ausdruck $e^{-kt}\sin(rt+\psi)$ gilt von $t=0$ bis $t=\infty$, die Reihenentwickelung von $t=0$ bis $t=a$. Letztere wird daher mit jenem vollkommen identisch, wenn wir a unendlich gross werden lassen. Um dieser Forderung zu genügen, setzen wir $\frac{\pi}{a}=\delta$, indem wir unter δ eine zum Verschwinden bestimmte Grösse verstehen, und berücksichtigen, dass $\lim e^{-\frac{\pi k}{\delta}}=0$ ist. Der obige Ausdruck nimmt alsdann folgende Gestalt an:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi)=\lim\frac{\delta}{\pi k}\Big\{\sin(rt+\psi)+\frac{k^2}{k^2+\delta^2}\sin\Big((r-\delta)t+\psi\Big)$$

$$+\frac{k^2}{k^2+(2\delta)^2}\sin\Big((r-2\delta)t+\psi\Big)+\frac{k^2}{k^2+(3\delta)^2}\sin\Big((r-3\delta)t+\psi\Big)+\ldots$$

(10)

$$+\frac{k^2}{k^2+\delta^2}\sin\Big((r+\delta)t+\psi\Big)+\frac{k^2}{k^2+(2\delta)^2}\sin\Big((r+2\delta)t+\psi\Big)$$

$$+\frac{k^2}{k^2+(3\delta)^2}\sin\Big((r+3\delta)t+\psi\Big)+\ldots\Big\},$$

oder, wenn man sich an die Definition des bestimmten Integrales erinnert:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi)=\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin((r+z)t+\psi)}{k^2+z^2}\,dz. \tag{10a}$$

Die Schwingung $e^{-kt}\sin(rt+\psi)$ ist demnach gleichbedeutend mit einer Reihe von unendlich vielen pendelartigen Schwingungen mit unendlich kleinen Amplituden, deren Schwingungszahlen sich in stetiger Aufeinanderfolge der Schwingungszahl[1]) r zu beiden Seiten anschliessen, während die Amplituden von dieser mittleren „Hauptschwingung" an nach beiden Seiten hin stetig abnehmen[2]).

Das von einem Körperatom, welches unter dem Einflusse eines Widerstandes schwingt, ausgestrahlte Licht ist demnach nicht homogen, sondern wird durch das Prisma in ein continuirliches Spectrum ausgebreitet, welches sich von der der Hauptschwingungszahl r entsprechenden Stelle

---

1) Die Schwingungszahl ist eigentlich nicht r sondern $\frac{r}{2\pi}$; wir erlauben uns aber der Kürze wegen, und da ein Missverständniss nicht zu besorgen ist, den Werth r selbst als Repräsentanten der Schwingungszahl zu gebrauchen.

2) Die Entwickelung (10), oder das bestimmte Integral (10a), scheint uns, als der analytische Ausdruck für ein continuirliches Spectrum, für die theoretische Optik von hervorragender Wichtigkeit zu sein. Beide Formeln sind übrigens aus der Theorie der Fourier'schen Integrale hinlänglich bekannt.

aus nach beiden Seiten hin um so weiter ausdehnt, je grösser der Widerstandscoëfficient k ist.

Die Hauptschwingungszahl r liegt vermöge der Gleichung

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

stets tiefer als die Schwingungszahl p der stärksten Absorption, welche dem Atom, im Falle es ohne Widerstand schwingen könnte, eigen wäre.

15. Wir wenden diese Sätze zunächst an auf die Lichtentwickelung glühender Gase und Dämpfe, sei es dass dieselben in einer Flamme oder durch electrische Entladungen oder auf irgend eine andere Art zum Leuchten gebracht werden. Denn auch auf diese Fälle, in welchen das Atom nicht durch einen periodischen Impuls, sondern durch andere Ursachen in Schwingung versetzt wird, gelten unsere Gleichungen, wenn man $f = 0$ setzt, und die Eigenschwingung des Atoms wird auch hier durch $e^{-kt} \sin(rt + \psi)$ dargestellt.

Im vollkommenen Gaszustand, so haben wir oben angenommen, ist $k = 0$.

Wird daher ein vollkommenes Gas zum Selbstleuchten gebracht, so enthält sein Spectrum eine schmale scharfe helle Linie von der Schwingungszahl p.

Die Grösse dieser Schwingungszahl, also die Stelle der Linie im Spectrum, ist bedingt durch die Masse des Atoms und die Kraft, mit welcher dasselbe in der Entfernungseinheit nach seiner Gleichgewichtslage gezogen wird, also durch Grössen, welche vermöge des Baues und der Zusammensetzung des Molecüls, dem das Atom angehört, ein für allemal gegeben sind; sie ist daher für das Molecül charakteristisch.

Entfernt sich das Gas von dem vollkommenen Gaszustande, indem seine Dichte oder sein Druck wächst, so wird der Widerstandscoëfficient $2k$ merklich und nimmt

mit wachsender Verdichtung immer mehr zu. Alsdann folgt aus den obigen Sätzen:

Bei Vergrösserung der Dichte oder des Drucks eines Gases erleidet die helle Spectrallinie eine Verbreiterung und gleichzeitige Verschiebung nach der weniger brechbaren Seite hin.

Diese Folgerung wird durch Beobachtungen, welche Herr J. J. Müller[1]) an den Dämpfen von Natrium, Lithium und Thallium, sowie an Wasserstoffgas durchgeführt hat, ferner durch eine Beobachtung Zöllner's[2]) an Natriumdampf bestätigt.

Wächst die Dichte oder der Druck des Gases noch mehr, so dehnt sich sein Spectrum nach beiden Seiten hin immer weiter aus und wird zu einem continuirlichen. Dieser Satz entspricht einer allgemein bekannten Thatsache.

Die Bewegungsgleichung (1), von welcher wir ausgingen, liefert nur eine einzige Hauptschwingung r oder p, und bezieht sich daher eigentlich nur auf solche Körper, welche im gasförmigen Zustande eine einzige helle Spectrallinie zeigen. Wir beschränken uns hier auf diesen einfachsten Fall, weil derselbe zur Darlegung der Theorie vollkommen ausreicht, und eine grössere Allgemeinheit nur die Darstellung compliciren, für unsere gegenwärtige Absicht aber keinen wesentlichen Nutzen bringen würde. Die bisher aus dem einfachsten Fall gezogenen Folgerungen behalten nämlich auch dann ihre Gültigkeit, wenn das Atom mehrerer Hauptschwingungen fähig ist[3]).

Lassen wir daher die obigen Sätze auch für Körper

1) Pogg. Ann. CL. p. 313.

2) Pogg. Ann. CXLII. p. 109.

3) Wenn das Molecül aus n Atomen besteht, so werden die Bewegungen dieser Atome durch $3n$ Differentialgleichungen bestimmt, und die Schwingungszahlen r, deren jedes Atom fähig ist, ergeben sich als die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom $3n$ten Grade. Wir behalten uns vor einen solchen allgemeineren Fall in einer späteren Arbeit zu behandeln.

gelten, welche im vollkommenen Gaszustande eine beliebige Anzahl heller Spectrallinien darbieten, so erkennen wir, dass das Linienspectrum eines Gases, indem sich dieses von dem Zustande der Vollkommenheit entfernt, durch Verbreiterung und Abwärtsschiebung der Linien in ein Bandenspectrum, und endlich durch Zusammenfliessen der immer breiter werdenden Banden in ein continuirliches Spectrum übergeht. —

16. Werden die Atome eines Körpers durch den periodischen Impuls einer einfallenden Lichtwelle zum Selbstleuchten gebracht, so nennen wir diesen Leuchtprocess Fluorescenz.

Dieser Vorgang, soweit er von dem Gliede $\epsilon^{-kt}\sin(rt+\psi)$ abhängt, charakterisirt sich nach den vorausgegangenen Entwickelungen wie folgt.

Die einfallende Welle erleidet directe Absorption, welche sich im Spectrum des hindurchgegangenen Lichtes durch einen Absorptionsstreifen kundgibt, dessen Maximum der Schwingungszahl p des „idealen" Grundtons entspricht.

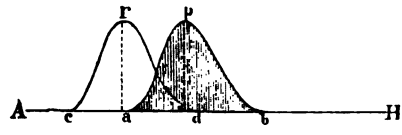
Durch die absorbirte Welle werden die Körperatome in schwingende Bewegung gesetzt, und strahlen nun Licht aus, dessen Hauptschwingungszahl r (der wirkliche Grundton) vermöge der Gleichung

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

stets tiefer liegt als diejenige des Absorptionsmaximums.

Das ausgesendete Licht (Fluorescenzlicht) ist nicht homogen, sondern breitet sich zu beiden Seiten der Hauptschwingung r nach Maassgabe der obigen Entwickelung (Gl. 10) oder (10a) zu einem mehr oder weniger breiten continuirlichen Spectralstreifen (Fluorescenzspectrum) aus.

Die nebenstehende Figur möge dieses Verhalten schematisch zur Anschauung bringen. Ueber der Abscissenlinie AH, welche die Ausdehnung des Spectrums von A bis H darstellt, erheben sich die beiden Curven apb und crd; die erstere, deren Flächeninhalt schraffirt ist, soll den Absorptionsstreifen, die letztere nichtschraffirte das Fluorescenzspectrum repräsentiren.



Da jeder absorbirte Strahl die Schwingung $e^{-kt}\sin(rt+\psi)$ hervorruft, so ergibt sich: Jeder dem Absorptionsgebiet (ab) angehörige homogene Lichtstrahl erregt das ganze zusammengesetzte Fluorescenzspectrum (von c bis d).

Greifen daher — was bei allen bisher bekannten in diese Kategorie gehörigen fluorescirenden Substanzen wirklich der Fall ist — Absorptionsgebiet und Fluorescenzspectrum eine Strecke (ad) weit übereinander, so erregt jeder in diese gemeinschaftliche Strecke fallende homogene Lichtstrahl nicht nur die Strahlen des Fluorescenzlichtes, welche eine kleinere oder gleich grosse, sondern auch diejenigen, welche eine grössere Schwingungszahl haben als er selbst.

17. Fluorescenzspectrum und Absorptionsstreif stehen unter sich im innigsten und nothwendigen Zusammenhange; jenes stellt die Lichtemission vor, zu welcher diese Absorption gehört. Der auf hellem Spectralgrunde hervortretende dunkle Absorptionsstreif kann demnach als die Umkehrung des Fluorescenzspectrums angesehen werden, wie die dunkele D-Linie die Umkehrung der hellen Natriumlinie ist; nur dass in jenem Falle mit der Umkehrung zugleich eine Verschiebung und eine Aenderung des Aussehens verknüpft ist. Die Breitenausdehnung und die Intensitätsvertheilung des Fluorescenzlichtes und des Absorptionsstreifens befolgen nämlich ganz

verschiedene von einander unabhängige Gesetze, welche resp. durch die Formeln (10a) und (6) ausgedrückt sind. Der Absorptionsstreif, obgleich als „Umkehrung“ des Fluorescenzspectrums aufzufassen, erscheint daher hinsichtlich jener Merkmale keineswegs als das blosse negative Gegenbild desselben, sondern behauptet seinen besonderen davon verschiedenen Charakter.

18. Wenn das betrachtete Atom nur einer einzigen Hauptschwingung r fähig ist, wird in dem Fluorescenzspectrum, der Schwingungszahl r entsprechend, nur ein Maximum und in dem zugehörigen Absorptionsgebiet bei der Schwingungszahl p nur ein Minimum der Intensität auftreten. Sind aber mehrere Hauptschwingungen $r, r', r'' \ldots$ vorhanden, welche dem sichtbaren Theile des Spectrums angehören, so kann das Fluorescenzspectrum, das jetzt als aus der Uebereinanderlagerung mehrerer nach dem Gesetze (10a) constituirter Spectren entstanden anzusehen ist, mehrere Maxima der Lichtstärke darbieten, welche aber im allgemeinen weder in der Anzahl noch in der Lage mit den Schwingungszahlen r, r', $r'' \ldots$ übereinstimmen werden, da ja an jeder Stelle des resultirenden Fluorescenzspectrums eine Intensität herrschen muss, die gleich der Summe der daselbst sich übereinanderlegenden Componenten ist, und sonach die Maxima der Componenten verwischt und verschoben werden. Aehnliches gilt von dem zugehörigen Absorptionsgebiet, welches in diesem Falle aus der Uebereinanderlagerung mehrerer Absorptionsstreifen resultirt, deren Maxima einzeln genommen den Schwingungszahlen p, p', $p'' \ldots$ entsprechen würden. Eine Aehnlichkeit im Aussehen des Fluorescenzspectrums und des Absorptionsgebietes wird hier noch weniger zu erwarten sein als in dem oben betrachteten einfachsten Falle. Es können z. B. in dem Fluorescenzspectrum mehrere Maxima und Minima der Helligkeit wahrnehmbar sein, während das zugehörige Absorptionsgebiet entsprechende Intensitätswechsel nicht erkennen lässt, und umgekehrt.

19. Um die Intensität des von dem schwingenden Atom ausgestrahlten Fluorescenzlichts auszudrücken, bestimmen wir die willkürlichen Constanten N und ψ aus der Bedingung, dass das Atom zur Zeit $t = 0$ sich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe befinde. Aus den beiden Bedingungsgleichungen:

$$[x_0]_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \left[\frac{dx_0}{dt}\right]_0 = 0,$$

d. i. $$M \sin\alpha - N \sin\psi = 0$$

und $$Mq \cos\alpha + N(r \cos\psi - k \sin\psi) = 0$$

ergibt sich aber:

$$N^2 r^2 = M^2 (q^2 - 2kq \sin\alpha \cos\alpha + (p^2 - q^2) \sin^2\alpha),$$

wo $N^2 r^2$ als Maass der Intensität der durch den periodischen Impuls hervorgerufenen schwingenden Bewegung zu betrachten ist. Vermöge der Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2},$$

ist aber:

$$(p^2 - q^2) \sin^2\alpha - 2kq \sin\alpha \cos\alpha = 0.$$

Wir finden demnach:

(11) $$N^2 r^2 = M^2 q^2$$

und gelangen also zu folgendem aus der Erfahrung bekannten Satz: Die Intensität des durch irgendeinen homogenen Strahl hervorgerufenen Fluorescenzlichts ist proportional der Energie, mit welcher derselbe absorbirt wird.

20. Wir wollen jetzt annehmen, dass das Körperatom ausser der Schwingung r, welche dem sichtbaren Spectrum angehört und durch directe Absorption zu dem Absorptionsstreifen Anlass gibt, von dem bisher die Rede war, noch einer oder mehrerer Schwingungen r_1, r_2, r_3 ... fähig sei, welche in die nächsttiefere Octave des Spectrums fallen. Es werden alsdann vermöge der indirecten Absorption durch die nächsttiefere

Octave entsprechende Absorptionsstreifen innerhalb des sichtbaren Spectrums auftreten.

Nun nehmen wir folgenden Satz zu Hülfe, welcher sich aus den mit (1) analogen allgemeineren Bewegungsgleichungen, die im Falle des Vorhandenseins mehrerer Schwingungen gelten, analytisch beweisen lässt[1]).

Wenn ein Atom, welches mehrerer Schwingungen ($r, r_1, r_2, r_3 \ldots$) fähig ist, durch (directe oder indirecte) Absorption in Bewegung gesetzt wird, so wird im allgemeinen nicht nur diejenige Schwingung wachgerufen, welche zu der betreffenden Absorption den nächsten Anlass gibt, sondern die übrigen Schwingungen, deren das Atom (oder das Molecül, dem es angehört) fähig ist, treten ebenfalls auf.

In dem gegenwärtig vorausgesetzten Falle ruft also der direct absorbirte Strahl p nicht nur die sichtbare Schwingung r, sondern auch die unsichtbaren (ultrarothen) $r_1, r_2, r_3 \ldots$ hervor; und der indirect absorbirte Strahl $2r_1$ weckt nicht nur die unsichtbare Schwingung r_1, sondern nebst den unsichtbaren Schwingungen $r_2, r_3 \ldots$ auch die sichtbare r.

Bei einem Körper von der vorausgesetzten Beschaffenheit erregt also jeder direct oder indirect absorbirte Strahl, nach Maassgabe seiner Absorptionsfähigkeit, das nämliche (durch die Hauptschwingung r oder die Hauptschwingungen $r, r', r'' \ldots$ charakterisirte) Fluorescenzspectrum.

Projicirt man daher ein Sonnenspectrum auf die Oberfläche eines solchen Körpers, so zeigt dasselbe überall, wo Absorption stattfindet, die nämliche Fluorescenzfarbe, und jede Stelle, auf welche ein Maximum der Absorption trifft, ist durch ein entsprechendes Maximum der Fluorescenz ausgezeichnet.

---

1) Dieser Beweis soll in einer späteren Abhandlung durchgeführt werden.

21. Werfen wir nun einen Rückblick auf das bisher Erkannte, so erhalten wir ein vollständiges und bis ins einzelne getreues Bild des Leuchtprocesses, welchen ich in mehreren vorausgegangenen experimentellen Arbeiten[1]) als Fluorescenz erster Art bezeichnet habe. Die Körper, welchen dieselbe rein und unvermischt eigen ist, bilden eine erste Klasse der fluorescirenden Substanzen. Zu ihr gehören, soweit bis jetzt bekannt ist, folgende Körper:

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichts.	Maximum des Fluorescenzlichts.	Maximum der Absorption.
1. Chlorophyll	28	26—40	30	32
2. Naphthalinroth . . .	41	27—60	48	56
3. Brasileïn mit Soda .	47	29—65	58	65
4. Purpurin mit Alaun .	47	26—68	55	65
5. Safflorcarmin . . .	48	32—69	58	70
6. Eosin	50	28—77	65	76
7. Purpurin, ätherische Lösung	55	30—75	65	74
8. Fluoresceïn	59	30—88	75	86
9. Uranglas	75	35—86	68	85

Die Substanzen sind nach dem Beginn der Fluorescenz im projicirten Spectrum oder dem Beginn des Absorptionsgebiets, welcher in der zweiten Columne angegeben ist, geordnet. Die dritte Columne enthält die Grenzen des Spectrums des Fluorescenzlichts. In der vierten Columne ist die hellste Stelle des Fluorescenzspectrums, in der fünften die dunkelste Stelle des kräftigsten Absorptionsstreifens angegeben. Sämmtliche Zahlen beziehen sich auf die Bunsen'sche Spectroskop-Scala.

Um die vollständige Uebereinstimmung der Ergebnisse der Erfahrung mit unserer Theorie zu erkennen, genügt

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 515. Wied. Ann. III. p. 113.

es, die Sätze, welche für die Körper dieser ersten Klasse empirisch gefunden wurden, der Reihe nach aufzuzählen, und dieselben nur hier und da, wenn es nöthig erscheint, mit Seitenblicken auf die Theorie zu begleiten.

1) Bei den Körpern der ersten Klasse ruft jeder absorbirte homogene Lichtstrahl das ganze (zusammengesetzte) Fluorescenzspectrum hervor.

Diejenigen homogenen Strahlen, welche in die dem Fluorescenzspectrum und dem Absorptionsgebiet gemeinschaftliche Strecke fallen, erregen sowohl die Strahlen des Fluorescenzlichts, welche eine kleinere oder gleich grosse, als auch diejenigen, welche eine grössere Schwingungszahl besitzen als der erregende Strahl.

2) Jeder dieser Körper ist durch einen sehr starken Absorptionsstreifen ausgezeichnet, welcher selbst bei sehr grosser Verdünnung, wenn die Absorption in den übrigen Theilen des Spectrums nicht mehr wahrnehmbar ist, noch sichtbar bleibt.

Nach der Theorie ist dieser Absorptionsstreifen als durch directe Absorption entstanden anzusehen und bildet in dem oben erläuterten Sinne die Umkehrung des Fluorescenzspectrums.

3) Die dunkelste Stelle dieses Absorptionsstreifens entspricht stets einer höheren Schwingungszahl als die hellste Stelle des Fluorescenzspectrums.

4) Ausser diesem Absorptionsstreifen findet noch eine schwächere Absorption statt, welche sich über den ganzen hinter ihm gelegenen brechbareren Theil des Spectrums bis ins Ultraviolett erstreckt.

Diese schwächere Absorption würde der Theorie zufolge als indirecte Absorption durch die nächsttiefere Octave zu betrachten sein.

5) Projicirt man das Sonnenspectrum auf die Oberfläche der Substanz, so erstreckt sich die Fluorescenz vom

Beginne der Absorption an über den brechbareren Theil des Spectrums bis ins Ultraviolett. In diesem „fluorescirenden“ Spectrum entspricht jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluorescenz, welches um so intensiver ist, je energischer die zugehörige Absorption ist.

Das intensivste Maximum der Fluorescenz entspricht stets dem Absorptionsstreifen, welchen wir als durch directe Absorption hervorgebracht ansehen.

6) Das fluorescirende Spectrum der Körper erster Klasse ist überall gleichfarbig, abgesehen von jenen leichten Aenderungen der Nuance, welche durch die von der Substanz auf ihr eigenes, aus dem Inneren dringendes Fluorescenzlicht ausgeübte Absorption verursacht werden, und welche in der Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichts“[1]) eingehender besprochen wurden.

22. Die Fluorescenz erster Art kann nur bei solchen Körpern vorkommen, welche eine oder mehrere in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallende Eigenschwingungen $r, r', r'' \ldots$ und infolge dessen in demselben Bereich einen oder mehrere durch directe Absorption entstandene Absorptionsstreifen $p, p', p'' \ldots$ besitzen. Sie ist ein durch absorbirtes Licht hervorgerufenes Selbstleuchten der Körpermolecüle mit den ihnen vermöge ihres inneren Baues und ihrer äusseren gegenseitigen Verkettung eigenthümlichen Farbentönen. Die Zusammensetzung des Fluorescenzlichts erster Art ist demnach nur von der Natur des fluorescirenden Körpers, nicht aber von der Schwingungszahl des erregenden Lichtes abhängig.

Nun wollen wir zeigen, dass es noch eine Fluorescenz zweiter Art gibt, deren Farbenmischung nicht allein von der Natur des fluorescirenden Körpers, sondern auch von der Schwingungszahl des erregenden

1) Pogg. Ann. CLX. p. 75.

Lichtes abhängig ist, und die nur durch indirecte Absorption hervorgerufen wird.

Wir betrachten nämlich das in dem Ausdrucke x_1 (4) enthaltene Glied:

$$\frac{MNbe^{-kt}}{q(q-2r)}\cos((q-r)t-\alpha-\psi),$$

aus welchem oben die indirecte Absorption abgeleitet wurde, und nehmen an, dass dem Körperatom zwar keine dem sichtbaren Spectrum angehörige Schwingung, dagegen ausser der Schwingung r_1, welche in die nächstfiefere Octave des sichtbaren Spectrums fällt, eine noch tiefere Schwingung r_2 eigenthümlich sei. Vermöge der Schwingung r_1 wird der Lichtstrahl $(2r_1)$ nebst seinen beiderseitigen Nachbarstrahlen indirect absorbirt, wodurch aber nicht nur die Schwingung r_1, sondern, nach dem oben (20) angeführten Satze, auch die Schwingung r_2, und ausserdem, dem obigen Gliede entsprechend, noch die Schwingungen $(q-r_1)$ und $(q-r_2)$ wachgerufen werden. Die Schwingung $(q-r_1)$ fällt, da ja q nahe an $2r_1$ liegt, in die nächsttiefere Octave des sichtbaren Spectrums und bleibt daher unsichtbar; die Schwingung $(q-r_2)$ dagegen kann in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallen und als Fluorescenzlicht wahrgenommen werden. Dasselbe ist ebenso wenig als das Fluorescenzlicht erster Art homogen, sondern besteht wie dieses aus unzählig vielen einfachen pendelartigen Schwingungen, welche zu beiden Seiten der Hauptschwingung $(q-r_2)$ nach auf- und abwärts mit abnehmender Lichtstärke sich stetig aneinanderreihen, und gibt daher, durch das Prisma zerlegt, ein continuirliches Spectrum. Es ergibt sich nämlich in ähnlicher Weise wie oben:

$$(12)\quad e^{-kt}\cos((q-r_2)t-\alpha-\psi)=\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos((q-r_2+z)t-\alpha-\psi)}{k^2+z^2}\,dz,$$

ein Ausdruck, welcher, in derselben Weise wie oben interpretirt, die vorstehende Behauptung rechtfertigt.

Da r_2. als das 2πfache der Schwingungszahl eines Atoms, jedenfalls eine sehr grosse Zahl ist, so wird die Hauptschwingung $(q - r_2)$ beträchtlich tiefer liegen als diejenige q des erregenden Strahls. Dem Integral (12) zufolge, welches die Ausbreitung der Schwingung $(q - r_2)$ zu einem continuirlichen Spectrum ausdrückt, erstreckt sich diese Ausbreitung zwar, mathematisch gesprochen, nach beiden Seiten hin ins Unendliche. Für grosse Werthe von z sind aber die Elemente des Integrals unmerklich gegenüber denjenigen, welche kleinen Werthen von z entsprechen, und jene werden daher gegen diese für die physische Wahrnehmung verschwinden, noch ehe z den grossen Werth r_2 erreicht hat. Es ist demnach, soweit es sich um wahrnehmbare Schwingungen handelt, stets $q - r_2 + z < q$, d. h. die Schwingungszahlen des Fluorescenzlichts zweiter Art sind stets kleiner als die Schwingungszahl des erregenden homogenen Lichts.

Dieser nur für die Fluorescenz zweiter Art gültige Satz, welchen wir die „Stokes'sche Regel" nennen, wurde früher, ehe die Fluorescenz erster Art entdeckt war, für ein allgemeines, alle Fluorescenzerscheinungen beherrschendes Gesetz gehalten.

Sind mehrere tiefergelegene Schwingungen r_2, r_3... vorhanden, so können im Spectrum des Fluorescenzlichts zweiter Art mehrere Maxima der Lichtstärke auftreten, welche jedoch mit den Absorptionsverhältnissen, die ja von ganz anderen Schwingungen r_1, r_1'... abhängen, in keiner Beziehung stehen.

23. Diejenigen Körper, welche die Fluorescenz zweiter Art rein und unvermischt darbieten, bilden eine zweite Klasse fluorescirender Substanzen; zu ihr gehört die Mehrzahl der bis jetzt untersuchten fluorescirenden Stoffe, und eben darum erscheint es angemessen, den obigen für diese Klasse charakteristischen Satz als „Regel" zu bezeichnen. Die bekanntesten, hierher gehörigen Körper finden sich in der bereits citirten Abhandlung[1]) aufgezählt.

1) Wied. Ann. III. p. 113.

Dass auch hier die Forderungen der Theorie mit der Erfahrung im Einklange stehen, wird am besten erkannt, wenn wir die für die Körper zweiter Klasse empirisch gefundenen Sätze anführen und, wo es nöthig erscheint, einen Hinweis auf die Theorie hinzufügen.

1) Das Fluorescenzlicht zweiter Art ist stets von geringerer Brechbarkeit als das erregende homogene Licht. Lässt man daher das erregende homogene Licht von höherer zu niedrigerer Brechbarkeit übergehen, so wird auch das Fluorescenzspectrum nach der weniger brechbaren Seite zurückgeschoben.

Demgemäss ändert sich bei diesem Uebergange auch der Farbenton des mit blossem Auge wahrgenommenen Fluorescenzlichts: die Fluorescenzfarbe ist von der Schwingungszahl des erregenden Lichts abhängig.

Diese Abhängigkeit gibt sich namentlich auch dadurch zu erkennen, dass bei Erregung mit violettem und blauem Licht die brechbareren Theile des Fluorescenzspectrums verhältnissmässig stärker hervortreten als bei Erregung mit weissem Licht.

2) Zur zweiten Klasse gehören alle fluorescirende Substanzen, die nur eine einseitige Absorption des brechbareren Endes des Spectrums zeigen.

Sind Absorptionsstreifen vorhanden, so erscheinen dieselben als breite verwaschene Bänder, sogenannte Schatten, welche bei wachsender Verdünnung sehr bald verschwinden, noch ehe die Absorption des Violett aufhört, wahrnehmbar sind.

So starke Absorptionsstreifen wie bei den Körpern der ersten Klasse kommen bei den Körpern der zweiten Klasse nicht vor. Diese erscheinen im durchgehenden Lichte gewöhnlich gelb, braun oder farblos, letzteres nämlich dann, wenn nur das äusserste Violett und das Ultraviolett der Absorption unterliegen, während jene lebhaft gefärbt und stark tingirend sind.

Die Absorption der Körper der zweiten Klasse ist demnach entschieden anders geartet als diejenige der Körper erster Klasse. Dieses Verhalten stimmt augenscheinlich zu der Forderung der Theorie, dass die Fluorescenz zweiter Art nur durch indirecte Absorption hervorgerufen werde.

3) Auch hier entspricht im fluorescirenden Spectrum jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluorescenz.

4) Das fluorescirende Spectrum der Körper zweiter Klasse ist ungleichfarbig mit allmählicher Aenderung des Farbentons; geht man nämlich im fluorescirenden Spectrum vom Beginne desselben gegen das brechbarere Ende hin, so wird das Fluorescenzlicht reicher an brechbareren Strahlen.

24. Die beiden Arten von Fluorescenz, welche wir bis jetzt kennen lernten, sind, so ähnlich sie dem Beobachter auf den ersten Blick auch erscheinen mögen, dennoch ihrem Wesen nach von einander sehr verschieden. Nimmt man die Analogie der Akustik zu Hülfe, so kann man, wie ich dies schon früher[1]) vorgeschlagen habe, die erste Art als „Fluorescenz durch Resonanz", die zweite Art als „Fluorescenz durch Differenztöne" (Combinationstöne) bezeichnen. Bei jener werden durch directe und indirecte Absorption die unmittelbar vernehmbaren Eigentöne des Körpers geweckt, deren Schwingungszahlen derjenigen der direct absorbirten Welle nahe liegen; bei dieser werden durch indirecte Absorption tiefer liegende, für sich nicht vernehmbare Schwingungen hervorgerufen, welche mit denjenigen der absorbirten Welle combinirt vernehmbare Differenztöne liefern.

25. Es kann ferner noch der Fall eintreten, dass das Körperatom 1) einer oder mehrerer Schwingungen, die in das sichtbare Spectrum fallen, 2) einer oder mehrerer der nächsttieferen Octave angehöriger Schwingungen,

1) Pogg. Ann. CXLIII. p. 45.

und 3) einer oder mehrerer noch tiefer gelegener Schwingungen fähig ist. Das Fluorescenzspectrum eines so beschaffenen Körpers muss aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine die Fluorescenz erster Art besitzt und demnach der Stokes'schen Regel nicht gehorcht, während der andere mit Fluorescenz zweiter Art begabte der Stokes'schen Regel unterworfen ist. Die Substanzen, welchen diese „zusammengesetzte Fluorescenz" eigen ist, bilden eine dritte Klasse der fluorescirenden Körper, zu welcher, soweit bis jetzt bekannt, die folgenden Körper gehören:

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum.	Spectrum des Fluorescenzlichts.	Maximum des Fluorescenzlichts.	Maximum der Absorption.
1. Chamaeleïngrün	28	**28—42**; 49—165	37	39
2. Chamaeleïnblau	35	23—45; **45— 60**; 60—150	54	58
3. Orseille . . .	38	**30—54**; 54— 83	44	52
4. Chamaeleïnroth	40	**30—58**; 63—120	54	57
5. Lacmus . . .	44	**32—55**; 55— 79	47	50
6. Fluoranilin . .	46	**30—64**; 64—110	56	60

Die fettgedruckten Zahlen geben die Grenzen desjenigen Theils des Fluorescenzspectrums an, welcher der Stokes'schen Regel nicht gehorcht.

Auch hinsichtlich der Körper der dritten Klasse stimmen die Thatsachen mit den Forderungen der Theorie vollständig überein. Namentlich bemerken wir:

1) Alle Körper der dritten Klasse besitzen, wie diejenigen der ersten Klasse, einen sehr starken Absorptionsstreifen, und sind daher wie diese stets lebhaft gefärbt.

Dieser Absorptionsstreif ist der Theorie zufolge als durch directe Absorption entstanden zu betrachten und gehört als Umkehrung zu dem nach erster Art fluorescirenden Theil des Fluorescenzspectrums.

2) Das fluorescirende Spectrum, in welchem ebenfalls jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluorescenz entspricht, besteht aus zwei Theilen, aus einem in seiner ganzen Ausdehnung gleichfarbigen und aus einem anders gefärbten mit allmählicher Farbenänderung. An der Grenze beider Theile findet gewöhnlich ein nahezu plötzlicher Farbenwechsel statt.

Ueberhaupt verhalten sich die Körper der dritten Klasse wie Mischungen aus einer Substanz erster und einer solchen zweiter Klasse. Man kann auch in der That Erscheinungen dieser Art nach Belieben hervorrufen, wenn man zwei solche Substanzen, welche nicht chemisch auf einander wirken, mit einander mischt.

Die Orseille- und Lackmusauszüge sind sicherlich, das Fluoranilin wahrscheinlich, die Chamaeleïnfarbstoffe möglicherweise solche Mischungen aus zwei verschiedenen fluorescirenden Stoffen. Aber auch wenn für alle diese Körper nachgewiesen wäre, dass sie Mischungen sind und sonach vom Standpunkte der Erfahrung aus die dritte Klasse entbehrlich würde, so müsste dieselbe vom Standpunkte der Theorie aus dennoch offen gehalten werden, da theoretisch die Möglichkeit bestehen bliebe, dass ein chemisch einheitliches Molecül von der oben vorausgesetzten Beschaffenheit beide Arten von Fluorescenz zugleich besässe.

26. Wir kommen nun zur Betrachtung des Gliedes:

$$M \sin (qt - \alpha)$$

der Gleichung (3). Dasselbe stellt eine mit der einfallenden Welle isochrone pendelartige Schwingung dar und zeigt uns, dass das Körperatom auch noch homogenes mit dem einfallenden homogenen Lichte gleichfarbiges Licht ausstrahlt, dessen Intensität der Absorptionsgrösse proportional ist.

Da dieses Glied den Factor e^{-kt} nicht enthält und demnach das entsprechende Licht nicht zu einem conti-

nuirlichen Spectrum ausgebreitet und dadurch geschwächt wird, so kann dieses Licht, selbst wenn die erregenden Strahlen nur schwach absorbirt werden, noch wahrgenommen werden. In der That hat Lallemand[1]) diese von ihm sogenannte „isochromatische Fluorescenz" bei allen von ihm untersuchten Körpern, mit Ausnahme des Steinsalzes und des Bergkrystalls, nachgewiesen. Da das isochromatische Fluorescenzlicht bei Erregung mit homogenem Licht selbst homogen ist und daher im Spectroskop eine schmale Linie gibt, so kann es bei Beobachtung der gewöhnlichen (eigentlichen) Fluorescenz, wenn dieselbe durch homogenes Licht hervorgerufen wird, nicht störend wirken. Bei Erregung mit weissem Sonnenlicht dagegen liefert das isochromatische Fluorescenzlicht ein continuirliches Spectrum mit den Fraunhofer'schen Linien.

27. Ausser dem bereits besprochenen Gliede, welches $(q - 2r)$ im Nenner enthält, umfasst der Ausdruck x_1 (Gl. 4) noch mehrere Glieder, welche jetzt noch kurz zu betrachten sind.

Das Glied:

$$\frac{M^2 b \sin 2\beta}{8kq} \cos(2qt - 2\alpha - 2\beta)$$

stellt eine homogene Schwingung dar, welche eine Octave höher liegt als diejenige der einfallenden Welle, und daher, wenn diese dem sichtbaren Spectrum angehört, in das ultraviolette Gebiet fällt.

Das Glied:

$$-\frac{N^2 b \sin 2\gamma}{8kr} e^{-2kt} \cos(2rt + 2\psi - 2\gamma)$$

gehört als Octave des Grundtons zur Eigenbewegung des Atoms, welche auch ohne Anregung durch einen periodischen Impuls auftritt; diese Schwingung kann in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallen, wenn der Grundton r dessen nächsttieferer Octave angehört. Bedenkt man jedoch, dass der Factor $\sin 2\gamma$, wie ein Blick auf den

1) „De l'illumination des corps transparents et opaques." J. d. Phys. V. p. 329. Beibl. I. p. 129.

Ausdruck für $\operatorname{tg} 2\gamma$ (5) zeigt, für grosse Schwingungszahlen, wie sie hier allein in Betracht kommen, stets sehr klein bleibt, so wird man auch in diesem Falle nicht erwarten dürfen, eine entsprechende Lichterscheinung wahrzunehmen.

Das Glied:

$$-\frac{MNb}{q(q+2r)}e^{-kt}\cos((q+r)t-\alpha+\psi)$$

endlich stellt den Summationston aus der Schwingung der anregenden Welle und dem Eigenton des Atoms dar, welcher, wenn jene dem sichtbaren Spectrum angehört, für kleine Werthe von r ebenfalls in diesen Bereich fallen könnte. Gegenüber dem Gliede jedoch, welches dem Differenzton entspricht und $(q-2r)$ im Nenner enthält, kann dieses sowohl wie die beiden vorigen Glieder als verschwindend angesehen werden.

28. Jeder fluorescirende Körper ist nothwendig auch ein absorbirender. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, wenn wir unter Fluorescenz in der bisher üblichen Weise eine sichtbare und nichtisochromatische Strahlung verstehen. Ein absorbirender Körper wird nämlich keine Fluorescenz in diesem Sinne zeigen, 1) bei directer Absorption, wenn das Fluorescenzspectrum in das ultrarothe Gebiet fällt, und 2) bei indirecter Absorption, wenn keine Schwingungen vorhanden sind, welche tief genug wären, um mit den erregenden Strahlen sichtbare Differenztöne zu geben. In beiden Fällen ruft nämlich das absorbirte Licht nur eine unsichtbare ultrarothe Strahlung hervor, welche allerdings mit der Fluorescenz ihrem Wesen nach identisch ist.

Die sogenannte „isochromatische Fluorescenz" freilich kommt, wie bereits bemerkt, allen absorbirenden Körpern ohne Ausnahme zu.

Erlangen, im October 1877.

Berichtigung. In der Abhandlung „über Fluorescenz" lies p. 122 Zeile 8 v. o. anomale statt normale Dispersion.

VIII. *Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressibeln Aether; von E. Ketteler.*

(Fortsetzung von p. 113.)

IV. Die innere Spiegelung und Brechung.

Eine durch die Vorderfläche eines absorbirenden Mittels eingetretene Welle falle im Inneren desselben unter irgendwelchem Einfallswinkel auf eine irgendwie gelegene zweite Fläche und werde an derselben zum Theil gespiegelt und gebrochen. Da die Lage der ersten Fläche dem einfallenden Lichte insofern als bleibendes Merkmal aufgedrückt bleibt, als parallel ihr die Amplituden gleich sind, so werden die Vorgänge wieder verwickelt. Der allgemeinste Fall wäre der, wenn man den Schwingungscomponenten die Form gäbe:

$$A\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q(\mathfrak{w}z + \mathfrak{v}y + \mathfrak{u}x)} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v} - \psi\right),$$

so dass folglich nicht blos in der Einfallsebene, sondern auch in der auf ihr senkrechten Ebene und zwar sowohl bezüglich der refractiven als der absorptiven Richtung jede Symmetrie fehlte.

Wir werden uns der Einfachheit wegen, zumal da zur Zeit wenigstens der allgemeineren Behandlung ein praktisches Interesse abgeht, von vornherein auf den Fall beschränken, dass die Einfallsebene das Mittel in gleiche Hälften zerschneidet, werden also in vorstehendem Ausdruck $\mathfrak{v} = 0$ setzen und überdies nur isotrope Mittel in Betracht ziehen. Wenn dann zwar die obigen Elasticitätsgleichungen (1) und (2) nach wie vor in Geltung bleiben, so werden wir doch andererseits genöthigt, unser Princip der Gleichheit der Kraft senkrecht zur Trennungsfläche und nicht minder das anscheinend so correcte Continuitätsprincip selbst für den I. Hauptfall

als mit den Consequenzen jener in Widerspruch stehend, folglich als zu enge aufzugeben.

Ich gebe zuerst die ganze Entwickelung und werde dann die erhaltenen Formeln auf den Specialfall einer planparallelen Platte und auf den normal in das Innere eingetretener Strahlen in Anwendung bringen. Das dabei benutzte Coordinatensystem habe eine solche Lage, dass wieder die Y-Axe auf der Einfallsebene senkrecht steht und die Z-Axe mit dem Lothe zusammenfällt. Nur bleibe vorläufig die positive Richtung dieser letzten unbestimmt.

A. Für Schwingungen, die der Einfallsebene parallel sind, hat man die vermöge unserer Voraussetzung der Incompressibilität des Aethers mit einander identischen Bedingungen:

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_2, \qquad \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2.$$

In dieselben führen wir nunmehr wegen der allseitigen elliptischen Schwingungen die Ausdrücke ein:

$$\zeta = \mathfrak{A}_z \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q(\mathfrak{w} z + \mathfrak{u} x)} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x \sin e}{v}\right) - \psi_z\right]$$

$$\xi = \mathfrak{A}_x \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q(\mathfrak{w} z + \mathfrak{u} x)} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x \sin e}{v}\right) - \psi_x\right]$$

und fügen wie früher zu ψ_z^R und ψ_x^R noch π. So erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q \delta} [p \sin(\varphi - \psi_z) - q\,\mathfrak{w} \cos(\varphi - \psi_z)] \\
&+ \mathfrak{R}_z \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_R \delta_R} [p_R \sin(\varphi - \psi_z^R) - q_R \mathfrak{w}_R \cos(\varphi - \psi_z^R)] \\
&= D_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_D \delta_D} [p_D \sin(\varphi - \psi^D) - q_D \mathfrak{w}_D \cos(\varphi - \psi^D)], \\
&\mathfrak{E}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q \delta} [\sin e \sin(\varphi - \psi_x) - q\,\mathfrak{u} \cos(\varphi - \psi_x)] \\
&+ \mathfrak{R}_x \, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_R \delta_R} [\sin e \sin(\varphi - \psi_x^R) - q_R \mathfrak{u}_R \cos(\varphi - \psi_x^R)] \\
&= D_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q_D \delta_D} [\sin e \sin(\varphi - \psi^D) - q_D \mathfrak{u}_D \cos(\varphi - \psi^D)],
\end{aligned}$$

worin nach dem bisherigen Verfahren nur noch in den Exponentialgrössen $z = 0$ oder auch $z = z'$ zu setzen wäre. Beide Gleichungen verlangten dann zuvörderst bezüglich des Restes derselben die Beziehung:

$$q\mathfrak{u} = q_R \mathfrak{u}_R = q_D \mathfrak{u}_D.$$

Wäre also das zweite Mittel der Weltäther, für den $q_D = 0$, und wäre nicht auch zugleich: $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_R = 0$, so wäre hiernach der Lichtübergang, wofern überhaupt noch möglich, an eine gänzlich verschiedene Behandlung gebunden. Gibt man das aber nicht zu, so bleibt nichts übrig, als die Grenzgleichungen nunmehr von den beiden simultanen Bedingungen:

$$z = z', \qquad x = x',$$

die sich zusammenfassen in:

$$\delta = \mathfrak{w} z + \mathfrak{u} x = \delta', \tag{46}$$

abhängig zu machen. In der That ist ja bei der Allgemeinheit der gemachten Voraussetzungen jedes einzelne elastische Aetherparallelepipedum der Grenzfläche in je verschiedenem Zustande.

Verzichten wir denn hiermit auf die Aufrechterhaltung der obenstehenden Beziehung, so haben wir andererseits wegen des in Wirksamkeit verbleibenden Huyghens'schen Princips:

$$p_R = -p, \tag{47}$$

und sofern die Extinction auf der reflectirten Welle sich mit Zunahme des Abstandes vom Coordinatenanfangspunkte entgegengesetzt verhält wie auf der einfallenden:

$$q_R \mathfrak{w}_R = -q\mathfrak{w}, \qquad q_R \mathfrak{u}_R = q\mathfrak{u}. \tag{47 b}$$

Aus beiden folgt:

$$\frac{\mathfrak{u}_R}{\mathfrak{w}_R} = -\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{w}}, \qquad q_R = \pm\sqrt{q^2}\ ^{1}).$$

Damit nun beide Grenzgleichungen identisch werden,

1) Bezüglich des gleichzeitigen Verhaltens der Körpertheilchen auf der reflectirten und durchgehenden Welle vgl. unten unter VI.

hat man beispielsweise für die einfallende Welle die neue Bedingung:

$$\sin \mathfrak{r}\,[p \sin(\varphi - \psi_z) - q\mathfrak{w} \cos(\varphi - \psi_z)]$$
$$= \cos \mathfrak{r}\,[\sin e \sin(\varphi - \psi_x) - q\mathfrak{u} \cos(\varphi - \psi_x)].$$

Aus derselben lässt sich φ eliminiren, und man erhält erstens:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}},$$

(48)
$$\sin \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}{\nu^2 + q^2}}, \qquad \cos \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}{\nu^2 + q^2}},$$

sowie bei Einführung der durch folgende Ausdrücke definirten Coëfficienten β' und γ':

$$\sin \beta' = \frac{q\mathfrak{w}}{\sqrt{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}}, \qquad \cos \beta' = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}},$$

(49)
$$\sin \gamma' = \frac{q\mathfrak{u}}{\sqrt{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}}, \qquad \cos \gamma' = \frac{\sin e}{\sqrt{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}}$$

zweitens die Gleichheit: $\operatorname{tg}(\psi_z + \beta') = \operatorname{tg}(\psi_x + \gamma')$, also auch:

(50) $$\psi_z + \beta' = \psi_x + \gamma'.$$

Behandelt man ebenso auch die übrigen Glieder der obigen Uebergangsbedingungen und denkt sich im Folgenden der Einfachheit wegen als zweites Mittel den Weltäther, so ziehen sich dieselben auf die eine kürzere Form zusammen:

$$\frac{\sqrt{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}}{\sin e \cos e} \sqrt{\frac{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}{\nu^2 + q^2}}\,[\mathfrak{E} \sin(\varphi - \psi_z - \beta') + \mathfrak{R} \sin(\varphi - \psi_z^R - \beta']$$
$$= \mathfrak{D} \sin(\varphi - \psi^D).$$

Was ferner das Princip der Gleichheit der Drehungscomponenten betrifft, so ist dessen Ausdruck:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)_2 \Bigg\} \delta = \delta'.$$

Diese Winkelverschiebung ist beispielsweise für das einfallende Licht:

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\{\mathfrak{E}_z[\sin e\sin(\varphi-\psi_z)-q\mathfrak{u}\cos(\varphi-\psi_z)]$$
$$+\mathfrak{E}_x[p\sin(\varphi-\psi_x)-q\mathfrak{w}\cos(\varphi-\psi_x)]\}$$
$$=-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\nu^2+q^2}}\{\sqrt{\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2}[\sin e\sin(\varphi-\psi_z)-q\mathfrak{u}\cos(\varphi-\psi_z)]$$
$$+\sqrt{p^2+q^2\mathfrak{w}^2}[p\sin((\varphi-\psi_z)-(\beta'-\gamma'))-q\mathfrak{w}\cos((\varphi-\psi_z)-(\beta'-\gamma'))]\},$$

sofern darin wieder von den Gleichungen (48), (49) und (50) Gebrauch gemacht wird. Durch weitere Entwickelung lässt sich ihr schliesslich die Gestalt geben:

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\nu^2+q^2}}\alpha\sin(\varphi-\psi_z-2\varepsilon'),$$

und darin bedeutet:

$$(51)\quad \begin{aligned}\alpha\cos 2\varepsilon' &= (\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)\cos\gamma'+(p^2+q^2\mathfrak{w}^2)\cos(2\beta'-\gamma')\\ \alpha\sin 2\varepsilon' &= (\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)\sin\gamma'+(p^2+q^2\mathfrak{w}^2)\sin(2\beta'-\gamma').\end{aligned}$$

Beachtet man jetzt, dass für die reflectirte Welle die vorstehenden Beziehungen die nämlichen bleiben, dass also $\alpha_R=\alpha$, $\varepsilon'_R=\varepsilon'$, so erlangt die zweite nöthige Grenzgleichung die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2+q^2}}\sqrt{(\nu^2+q^2)^2-4\nu^2q^2\sin^2(r-r')}\{\mathfrak{E}\sin(\varphi-\psi_z-2\varepsilon')-\mathfrak{R}\sin(\varphi-\psi_z^R-2\varepsilon')]$$
$$=\mathfrak{D}\sin(\varphi-\psi^D).$$

Werden nämlich die Ausdrücke (51) quadrirt und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}\alpha^2&=(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)^2+(p^2+q^2\mathfrak{w}^2)^2+2(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)(p^2+q^2\mathfrak{w}^2)\cos 2(\beta'-\gamma')\\ &=(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2+p^2+q^2\mathfrak{w}^2)^2-4(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)(p^2+q^2\mathfrak{w}^2)\sin^2(\beta'-\gamma')\\ &=(\nu^2+q^2)^2-4(q\mathfrak{w}\sin e-pq\mathfrak{u})^2.\end{aligned}$$

Und wenn man schliesslich setzt: $\mathfrak{w}=\cos r'$, $\mathfrak{u}=\sin r'$, und analog auch aus dem Ausdruck für $\operatorname{tg}2\varepsilon'$ den Winkel $(2\beta'-\gamma')$ eliminirt:

$$(52)\quad \begin{aligned}\alpha&=\sqrt{(\nu^2+q^2)^2-4\nu^2q^2\sin^2(r-r')}\\ \operatorname{tg}2\varepsilon'&=\frac{[(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)-(p^2-q^2\mathfrak{w}^2)]q\mathfrak{u}+2pq\mathfrak{w}\sin e}{[(\sin^2 e+q^2\mathfrak{u}^2)+(p^2-q^2\mathfrak{w}^2)]\sin e+2pq^2\mathfrak{u}\mathfrak{w}}.\end{aligned}$$

Sonach sind die beiden Grenzgleichungen, wenn man darin die Anomalien auf die einfallende Welle bezieht und abkürzungsweise $\varphi - \psi_x = \varphi'$ schreibt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\sin^2 e + q^2 \mathfrak{u}^2}}{\sin e \cos e} \frac{\sqrt{p^2 + q^2 \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} [\mathfrak{E} \sin(\varphi' - \beta') + \mathfrak{R} \sin(\varphi' - \chi_R - \beta') \\
&\qquad = \mathfrak{D} \sin(\varphi' - \chi_{D_x}), \\
&\frac{\sqrt{(\nu^2+q^2)^2 - 4q^2 \sin^2(r-r')}}{\sqrt{\nu^2+q^2}} [\mathfrak{E} \sin(\varphi' - 2\varepsilon') - \mathfrak{R} \sin(\varphi' - \chi_R - 2\varepsilon')] \\
&\qquad = \mathfrak{D} \sin(\varphi' - \chi_{D_x}).
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

B. Stehen die Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so hat man die Uebergangsbedingungen:

$$\left.\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_2, \qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_2 \right\} \delta = \delta'$$

und für die Schwingungen Ausdrücke von der Form:

$$\eta = \mathfrak{A}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}(q\mathfrak{w}z + \mathfrak{u}x)} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{zp + x\sin e}{v}\right) - \psi_y\right].$$

Führt man dieselben ein und setzt: $\varphi - \psi_y = \varphi'$, so kommt:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}[\sin e \sin\varphi' - q\mathfrak{u}\cos\varphi'] + \mathfrak{R}[\sin e \sin(\varphi' - \chi_R) - q\mathfrak{u}\cos(\varphi' - \chi_R)] \\
&\qquad = \mathfrak{D} \sin e \sin(\varphi' - \chi_D), \\
&\mathfrak{E}[p \sin\varphi' - q\mathfrak{w}\cos\varphi'] - \mathfrak{R}[p \sin(\varphi' - \chi_R) - q\mathfrak{w}\cos(\varphi' - \chi_R)] \\
&\qquad = \mathfrak{D} \cos e \sin(\varphi' - \chi_D),
\end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\sin^2 e + q^2\mathfrak{u}^2}}{\sin e} [\mathfrak{E} \sin(\varphi' - \gamma') + \mathfrak{R} \sin(\varphi' - \chi_R - \gamma')] = \mathfrak{D} \sin(\varphi' - \chi_D), \\
&\frac{\sqrt{p^2 + q^2\mathfrak{w}^2}}{\cos e} [\mathfrak{E} \sin(\varphi' - \beta') - \mathfrak{R} \sin(\varphi' - \chi_R - \beta')] = \mathfrak{D} \sin(\varphi' - \chi_D).
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Dabei ist bemerkenswerth, dass die je erste dieser Gleichungen, so lange γ' von Null verschieden ist, den Charakter einer reinen Continuitätsgleichung verloren hat.

Wir wollen hiermit unsere allgemeine Entwickelung

abbrechen und die erhaltenen Grenzgleichungen unmittelbar auf die beiden wichtigsten darin enthaltenen Specialfälle anwenden.

1) Das betrachtete Mittel sei eine planparallele Platte, durch deren Vorderfläche das Licht eingetreten sei. Sofern dann die Normale der Extinction mit der Richtung des Lothes in Coincidenz verbleibt, hat man:

$$u = 0, \qquad w = 1.$$

A. Für Schwingungen parallel zur Einfallsebene wird:

$$\alpha = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon' = \operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad \beta' = \varepsilon + u, \quad \gamma' = 0,$$

und da auch das in Gl. (53) vorkommende φ' mit dem in Gl. (20b) stehenden $(\varphi - \chi_z)$ identisch ist, so erkennt man die Gleichheit des bezüglichen ersten und letzten Gliedes derselben. Wir führen auch in Gl. (53) in Uebereinstimmung mit Beziehung (26) die Hülfsgrössen E_0 und R_0 ein, setzen also:

$$\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\nu^2 + q^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und schreiben zugleich:

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon, \qquad \chi_z^D - \varepsilon = X^i.$$

Alsdann erhalten unsere Grenzbedingungen die an Gl. (20) sich anschliessende Form:

$$E_0[a\sin\varphi - b\cos\varphi] - R_0[a\sin(\varphi - \chi_R) - b\cos(\varphi - \chi_R)] = \mathfrak{D}\sin(\varphi - X^i),$$

$$E_0[c\sin\varphi - d\cos\varphi] + R_0[c\sin(\varphi - \chi_R) - d\cos(\varphi - \chi_R)] = \mathfrak{D}\cos e\sin(\varphi - X^i),$$

oder nach Eliminirung der Phase φ, wenn man zugleich die complexen Werthe:

$$R = R_0(\cos\chi_R + \sqrt{-1}\,\sin\chi_R),$$
$$D = \mathfrak{D}(\cos X^i + \sqrt{-1}\,\sin X^i)$$

einführt:

$$(E_0 - R)(a + b\sqrt{-1}) = D,$$
$$(E_0 + R)\frac{p + q\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = D\cos e. \tag{55}$$

Aus diesen Gleichungen, die ganz den von Cauchy und Eisenlohr für die Vorderfläche aufgestellten entsprechen, leitet sich dann ab[1]):

$$R = -\frac{p-(a^2-b^2)\cos e+\sqrt{-1}\,(q-2ab\cos e)}{p+(a^2-b^2)\cos e+\sqrt{-1}\,(q+2ab\cos e)}E_0,$$

$$D = \frac{2[(ap-bq)+\sqrt{-1}\,(bp+aq)]}{p+(a^2-b^2)\cos e+\sqrt{-1}\,(q+2ab\cos e)}E_0.$$

Daraus folgt bezüglich der reflectirten Welle, wenn zugleich R_0, E_0 durch die ihnen proportionalen Werthe $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}$ ersetzt und die Vorgänge im Innern (an der Hinterfläche) durch ein angehängtes i von den äusseren (an der Vorderfläche) unterschieden werden:

$$\frac{\mathfrak{R}_i^2}{\mathfrak{E}_i^2}=\frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{E}^2}, \qquad \left(\frac{J_R}{J_E}\right)_i=\frac{J_R}{J_E}, \tag{56}$$

d. h. die Aetherenergie der reflectirten Welle steht zu der der einfallenden bei innerer und äusserer Reflexion im gleichen Verhältniss.

Sowie für die Phase:

$$\operatorname{tg}\chi_R^i=\operatorname{tg}\chi_R,$$

oder da:

$$\psi_x^R=\psi_z^R+\beta', \qquad \psi_x^E=\psi_z^E+\beta',$$

so hat man:

$$\psi_z^R-\psi_z^E=\psi_x^R-\psi_x^E=\chi_R^i=\chi_R, \tag{57}$$

so dass die beiderlei Componenten der reflectirten Welle an Vorder- und Hinterfläche eine identische und auch unter sich gleiche Verzögerung erleiden.

Was ebenso die durchgehende Welle betrifft, so findet sich für deren Energie:

$$J_D=\mathfrak{D}^2=\frac{p^2+q^2}{\nu^2+q^2}\,\frac{4(a^2+b^2)^2}{p^2+q^2+2p\cos e(\nu^2+q^2)+(a^2+b^2)^2\cos^2 e}\,\mathfrak{E}^2. \tag{58}$$

Stellen wir ferner die Werthe X^i, X für Hinter- und Vorderfläche zusammen, so ergab sich:

1) Vgl. Wied. Ann. I. p. 238 u. 239.

$$X^i = (\chi_z^D)^i - \varepsilon,$$
$$X = \chi_z^D + \varepsilon,$$

so dass: $X + X^i = \chi_z^D + (\chi_z^D)^i$ wird. Um aber von der Phase der auf die Vorderfläche einfallenden Welle zur Phase der aus der Hinterfläche austretenden zu gelangen, kann man ebenso gut um die χ_x wie um die χ_z fortschreiten.

Man wird also allgemeiner haben:

$$\psi_D = X + X^i = \chi_z^D + (\chi_z^D)^i = \chi_x^D + (\chi_x^D)^i. \tag{59}$$

Und da schliesslich:

$$\chi_z^D + \beta' = \chi_x^D,$$

so wird auch sein:

$$(\chi_z^D)^i - \beta' = (\chi_x^D)^i.$$

Hiernach lassen sich die Werthe $(\chi_z^D)^i$, $(\chi_x^D)^i$ mittelst des Werthes X^i berechnen. Man erhält in ε und u:

$$\operatorname{tg} X^i = \frac{\cos e\,(a^2+b^2)\sin u + \sqrt{p^2+q^2}\sin \varepsilon}{\cos e\,(a^2+b^2)\cos u + \sqrt{p^2+q^2}\cos \varepsilon},$$

$$\operatorname{tg} \chi_z^i = \frac{\cos e\,(a^2+b^2)\sin(\varepsilon+u) + \sqrt{p^2+q^2}\sin 2\varepsilon}{\cos e\,(a^2+b^2)\cos(\varepsilon+u) + \sqrt{p^2+q^2}\cos 2\varepsilon}, \tag{60}$$

$$\operatorname{tg} \chi_x^i = \frac{\sqrt{p^2+q^2}\sin(\varepsilon-u)}{\cos e\,(a^2+b^2) + \sqrt{p^2+q^2}\cos(\varepsilon-u)}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke für die Phasenverschiebungen an der Hinterfläche mit den Ausdrücken (31) für die an der Vorderfläche, so sind dieselben der Form nach gleich; sie haben aber entgegengesetztes Vorzeichen, und in ihnen haben $\sqrt{p^2+q^2}$ und $\cos e\,(a^2+b^2)$ die Stellen gewechselt.

B. Stehen die Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so lassen sich die Grenzgleichungen (54), sofern auch in ihnen $\gamma' = 0$, $\beta' = \varepsilon + u$ ist, auf die complexe Form bringen:

$$(61)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{E} + R = D, \\ &(\mathfrak{E} - R)(p + q\sqrt{-1}) = D\cos e, \end{aligned}$$

Gleichungen, die sich von den entsprechenden des II. Hauptfalles dadurch unterscheiden, dass in ihnen $\mathfrak{E}$, in jenen dagegen E_0 erscheint.

Man leitet daraus ab (vgl. l. c. p. 237 und 238):

$$R = -\frac{(\cos e - p) - \sqrt{-1}\,q}{(\cos e + p) + \sqrt{-1}\,q}\mathfrak{E},$$

$$D = \frac{2(p + q\sqrt{-1})}{(\cos e + p) + \sqrt{-1}\,q}\mathfrak{E}.$$

Für die reflectirte Welle gilt wieder der Satz, dass das Verhältniss ihrer Energie zu der der einfallenden und dass ebenso ihre Verzögerung gleich ist, mag die Reflexion eine innere oder eine äussere sein.

Dagegen erhält man für das durchgehende Licht:

$$(62)\qquad \begin{aligned} J_D &= \frac{4(p^2 + q^2)}{(\cos e + p)^2 + q^2} = \frac{4(\cos^2 r \sin^2 e + q^2 \sin^2 r)}{\sin^2(e + r) + q^2 \sin^2 r}, \\ \operatorname{tg} X^i &= \frac{q\cos e}{p^2 + q^2 + p\cos e} = \frac{\cos e \sin(\varepsilon + u)}{\sqrt{p^2 + q^2} + \cos e \cos(\varepsilon + u)}. \end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck unterscheidet sich von dem entsprechenden (Gleichung (34)) bei äusserer Brechung dadurch, dass beide das entgegengesetzte Vorzeichen haben und cos e und $\sqrt{p^2 + q^2}$ vertauscht sind.

C. Das Schwingungsazimuth des auf die Vorderfläche der Platte auffallenden Lichtes sei 45°. Da die an der Hinterfläche reflectirte Welle bis jetzt wenigstens der experimentellen Untersuchung nicht zugänglich ist, so wollen wir auf die bezügliche Behandlung verzichten und uns auf das nach zweimaliger Brechung aus der Platte [1]) austretende Licht beschränken.

---

1) Man vergl. z. B. die Messungen Quincke's an dünnen Metallblättchen; Pogg. Ann. CXIX. p. 373.

Die Intensität seiner beiden Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene erhält man, wenn man die beiden Ausdrücke (28) und (58), resp. Gl. (62) dieser und Gl. (36b) der früheren Abhandlung mit einander multiplicirt. So kommt:

$$(63)\qquad \begin{aligned}(J_D J_D^i)^p &= \frac{16(p^2+q^2)(a^2+b^2)^2\cos^2 e}{[p^2+q^2+2p\cos e(\nu^2+q^2)+(a^2+b^2)^2\cos^2 e]^2},\\ (J_D J_D^i)^s &= \frac{16(p^2+q^2)\cos^2 e}{[(\cos e+p)^2+q^2]^2}.\end{aligned}$$

Folglich für das Amplitudenverhältniss als die Quadratwurzel jener:

$$(64)\qquad \begin{aligned}\operatorname{tg} h'_D &= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(p\cos e+\sin^2 e)^2+q^2\cos^2 e}}\\ &= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{\nu^2\cos^2(e-r)+q^2\cos^2 e}}.\end{aligned}$$

Die zugehörigen totalen Phasenverschiebungen ergeben sich mittelst Summirung der respectiven partiellen, nämlich:

$$(65)\qquad \begin{aligned}\operatorname{tg}(X+X^i)^p &= \frac{[(p^2+q^2)-\cos^2 e(a^2+b^2)^2]\sin(\varepsilon-u)}{2\cos e(a^2+b^2)\sqrt{p^2+q^2}+[(p^2+q^2)+\cos^2 e(a^2+b^2)^2]\cos(\varepsilon-u)},\\ \operatorname{tg}(X+X^i)^s &= \frac{[\cos^2 e-(p^2+q^2)]\sin(\varepsilon+u)}{2\cos e\sqrt{p^2+q^2}+[\cos^2 e+p^2+q^2]\cos(\varepsilon+u)}.\end{aligned}$$

Ihre Differenz d'_D gibt die Anomalie der resultirenden elliptischen Welle; sie ist, sofern $X_i^p - X_i^s = X^p - X^s$ gefunden wird, gleich dem doppelten Werthe der einfachen Brechung. Man hat demnach zufolge Gleichung (36):

$$d'_D = 2d_D,$$

$$(66)\qquad \begin{aligned}\operatorname{tg} d_D &= -\frac{\sqrt{p^2+q^2}\cos e\sin u-\sin^2 e\sin\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2}\cos e\cos u+\sin^2 e\cos\varepsilon}\\ &= \frac{b\nu\cos(e-r)-aq\cos e}{a\nu\cos(e-r)+bq\cos e}.\end{aligned}$$

Zu bemerken ist, dass sich die vorstehenden Ausdrücke (64) und (66), die sich wieder beide auf Vorgänge im reinen Aether beziehen, auch vollkommen richtig hätten erhalten

lassen mittelst Complexsetzung des Fresnel'schen Amplitudenverhältnisses: $\frac{1}{\cos^2(e-r')}$.

Und gehen wir jetzt auf die im zweiten Hauptfalle gebrochene innere Welle zurück, so haben wir die Verzögerungen χ_x, χ_z ihrer longitudinal-elliptischen Schwingungsbewegung unterscheiden lernen von der Verzögerung X einer äquivalenten restaurirten Welle. Wenn wir daher X definiren können als die Anomalie der Aetherenergie der inneren Welle, so sind natürlich auch die Beziehungen (36c) und (40c) der früheren Abhandlung (p. 238 u. 239) nur unter dieser Restriction zu deuten.

2) Das Licht sei durch irgendwelche erste Fläche normal in das Innere des absorbirenden Mittels eingetreten und falle nun auf eine zweite, zur ersten beliebig geneigte Fläche.

Unter dieser Annahme fallen die Normalen der Extinction und Fortpflanzung zusammen, und ist sonach:

$$r = r', \qquad \mathfrak{u} = \sin r, \qquad \mathfrak{w} = \cos r.$$

Die einfallende Welle hat den Refractionsindex $\nu_0 = a$ und den Extinctionsindex $q_0 = b$. Diese beiden Attribute kommen dann der Symmetrie wegen auch der gespiegelten Welle zu, für welche bereits ohnehin die Beziehungen gelten:

$$q_R \mathfrak{u}_R = q\mathfrak{u}, \qquad q_R \mathfrak{w}_R = -q\mathfrak{w}.$$

Setzt man ferner die vorstehenden Werthe von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$ in die Ausdrücke (49) ein, so werden dieselben:

$$\sin\beta' = \sin\gamma' = \frac{q}{\sqrt{\nu^2+q^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varepsilon,$$

$$\cos\beta' = \cos\gamma' = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varepsilon.$$

Daraus folgt dann:

$$\psi_z = \psi_x,$$

d. h. die Schwingungen der beiden inneren Wellen

bleiben linear polarisirt. Endlich erhält man mittelst des Ausdruckes (52):

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon' = \frac{q}{\nu} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Unterscheiden wir jetzt die beiden Hauptfälle.

A. Für Schwingungen parallel zur Einfallsebene schreiben sich nunmehr die beiden Uebergangsbedingungen (53):

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\cos r}{a\cos e}\,[\mathfrak{E}\sin(\varphi'-\varepsilon)+\mathfrak{R}\sin(\varphi'-\chi_R-\varepsilon)] &= \mathfrak{D}\sin(\varphi'-\chi_D), \\ \sqrt{a^2+b^2}\,[\mathfrak{E}\sin(\varphi'-\varepsilon)-\mathfrak{R}\sin(\varphi'-\chi_R-\varepsilon)] &= \mathfrak{D}\sin(\varphi'-\chi_D). \end{aligned} \tag{67}$$

Man kann dieselben in doppelter Weise vereinfachen. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} R &= \mathfrak{R}(\cos\chi_R + \sqrt{-1}\sin\chi_R) \\ D' &= \mathfrak{D}(\cos\chi_D + \sqrt{-1}\sin\chi_D), \end{aligned}$$

so gewinnt man die complexe Form:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}+R)(1+\varkappa\sqrt{-1}) &= D'\frac{\cos e}{\cos r}, \\ (\mathfrak{E}-R)(1+\varkappa\sqrt{-1}) &= D'\frac{1}{a}, \end{aligned} \tag{68a}$$

worin zur Abkürzung $\frac{b}{a} = \varkappa$ geschrieben ist. Ersetzt man dagegen φ' durch $(\varphi+\varepsilon)$ und führt die Werthe ein:

$$\begin{aligned} R &= \mathfrak{R}(\cos\chi_R + \sqrt{-1}\sin\chi_R), \\ D'' &= \mathfrak{D}(\cos(\chi_D-\varepsilon) + \sqrt{-1}\sin(\chi_D-\varepsilon)), \end{aligned}$$

so kommt in reeller Form:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}+R)\sqrt{1+\varkappa^2} &= D''\frac{\cos e}{\cos r} \\ (\mathfrak{E}-R)\sqrt{1+\varkappa^2} &= D''\frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{68b}$$

Aus beiden folgt übereinstimmend:

$$\begin{aligned} J_R &= \frac{\operatorname{tg}^2(e-r)}{\operatorname{tg}^2(e+r)}J_E, \qquad \chi_R = 0, \\ J_D &= \frac{4\cos^2 r\sin^2 e}{\sin^2(e+r)\cos^2(e-r)}(1+\varkappa^2)J_E, \qquad \chi_D = \varepsilon. \end{aligned} \tag{69}$$

B. Stehen die Schwingungen senkrecht auf der Einfallsebene, so erhält man entsprechend:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}[\mathfrak{E}\sin(\varphi'-\varepsilon)+\mathfrak{R}\sin(\varphi'-\chi_R-\varepsilon)]=\mathfrak{D}\sin(\varphi'-\chi_D),$$

$$\frac{\cos r}{\cos e}\sqrt{a^2+b^2}\,[\mathfrak{E}\sin(\varphi'-\varepsilon)-\mathfrak{R}\sin(\varphi'-\chi_R-\varepsilon)]=\mathfrak{D}\sin(\varphi'-\chi_D)$$

und weiter entweder:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}+R)(1+\varkappa\sqrt{-1})&=D',\\ (\mathfrak{E}-R)(1+\varkappa\sqrt{-1})&=D'\frac{\cos e}{a\cos r}\end{aligned}\tag{70a}$$

oder:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}+R)\sqrt{1+\varkappa^2}&=D'',\\ (\mathfrak{E}-R)\sqrt{1+\varkappa^2}&=D''\frac{\cos e}{a\cos r}.\end{aligned}\tag{70b}$$

Man zieht daraus:

$$\begin{aligned}J_R&=\frac{\sin^2(e-r)}{\sin^2(e+r)}J_E, \qquad \chi_R=0,\\ J_D&=\frac{4\cos^2 r\sin^2 e}{\sin^2(e+r)}(1+\varkappa^2)J_E, \qquad \chi_D=\varepsilon.\end{aligned}\tag{71}$$

Es ist also die Verzögerung der reflectirten Welle für beide Hauptfälle = 0, die der durchgehenden Welle für beide = ε. Welches daher auch das Azimuth des einfallenden Lichtes sein möge, eine Ellipticität wird sich weder im gespiegelten noch im gebrochenen Lichte entwickeln können. Die Amplitudenverhältnisse $\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_s}$, $\frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_s}$ endlich entsprechen ganz den Fresnel'schen Gesetzen der durchsichtigen Mittel.

V. Das bewegte absorbirende Mittel.

Es hat nun auch keine Schwierigkeit mehr, wenigstens die für die Vorderfläche eines absorbirenden Mittels erhaltenen Ausdrücke auf den Fall zu erweitern, dass dasselbe mit einer gewissen Translationsgeschwindigkeit im

Raume bewegt wird. Ohne mich hier in specielle Entwickelungen einzulassen, will ich mich mit der Andeutung begnügen, dass sich die sämmtlichen Beziehungen, welche in der bezüglichen Abhandlung [1]) für bewegte durchsichtige Mittel mit Zuziehung des Continuitätsprincipes abgeleitet worden sind, ebenso einfach mittelst der Grenzgleichungen (1) und (2) erhalten lassen.

Zu dem Ende erinnere ich daran, dass dort zwei Coordinatensysteme unterschieden wurden. Das eine ging durch das wirkliche Einfallsloth und die wirkliche Trennungsfläche, das andere durch das fictive Loth und die fictive Trennungsfläche. Wenn man nun das vollständige Deformationsprincip successive auf die drei Coordinatenebenen des ersten und des zweiten Systems bezieht, dagegen das Princip der Gleichheit der Dilatation nur auf die Axen des letzteren, so gelangt man zu den dortigen Ausdrücken zurück.

In der That erhält man so bei doppelter Anwendung der Gleichung:

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_2$$

des ersten Hauptfalles, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} + R\frac{\sin\alpha_R}{\lambda_R} = D\frac{\sin\alpha_D}{\lambda_D},$$

$$\frac{\sin\mathfrak{a}}{\lambda} + R\frac{\sin\mathfrak{a}_R}{\lambda_R} = D\frac{\sin\mathfrak{a}_D}{\lambda_D},$$

oder kürzer, sofern wieder die R, D die Ausschlags-, die $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$ die Geschwindigkeits-Amplituden bedeuten:

$$1 + R = D,$$
$$1 + \mathfrak{R} = \mathfrak{D}. \tag{72}$$

Ebenso ergibt für den zweiten Hauptfall die Beziehung der Gleichungen:

---

1) Wied. Ann. I. p. 556.

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_2, \qquad \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2$$

auf die Axen des zweitgenannten Systems:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda} + R\frac{\sin\alpha_R\cos\alpha_R}{\lambda_R} = D\frac{\sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\lambda_D},$$

$$(1-\Re)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{v} = \mathfrak{D}\frac{\sin\alpha_D\cos\alpha_D}{\omega}.$$

(73) $$(1-\Re)\cos\alpha = \mathfrak{D}\cos\alpha_D.$$

Dies sind aber diejenigen Grenzgleichungen, welche bisher aus dem Continuitätsprincip gefolgert waren.

Dass übrigens für absorbirende Mittel die fictive Trennungsfläche, sowie bezüglich des Wechsels der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so auch bezüglich des Beginnes der Absorption zugleich auch die wirksame ist, leuchtet ohne weiteres ein.

Fassen wir nunmehr das Gesammtresultat der letzten Arbeiten zusammen, so ist wenigstens für isotrope Mittel und bei Voraussetzung, dass die Einfallsebene zugleich eine Symmetrieebene sei, die Theorie des Uebergangs des Lichtes von einem Mittel in ein anderes im wesentlichen auf die Anwendung der Gleichungen (1) und (2a) zurückgeführt. Nichts spricht nun dagegen, dass dieselben auch dann gültig bleiben, wenn die Absorptions- und Wellenebene beliebig gegen einander geneigt sind, wenn also in der Entwickelung auf p. 284—290 $\mathfrak{v}$ als von Null verschieden angenommen, dann aber dem Grundsatz der Incompressibilität des Aethers durch Hinzufügung der Gleichung:

(74) $$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

Rechnung getragen wird. Damit wäre denn, abgesehen freilich von der Unentbehrlichkeit des durch die Gleichungen I—XI ausgesprochenen dioptrischen Grundgesetzes, das behandelte Problem in seiner ganzen Ausdehnung der Elasticitätslehre überwiesen.

Ist zwar für vorstehende Abhandlung der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kraft entbehrlich geworden, so wäre wohl nichtsdestoweniger ohne denselben sowohl die Theorie der krystallinischen als der bewegten Mittel unausführbar geblieben. Wenn endlich der Grundsatz der Continuität fortan nur mehr beschränkt gültig bleibt, so gilt dasselbe von der von Cauchy eingeführten Deduction der Descartes'schen Gesetze aus den Grenzgleichungen. Im allgemeinsten Sinne stellt sich eben das Huyghens'sche Princip als völlig coordinirt zu den Principien der Elasticität.

VI. Die Constitution der Grenzschichten. Der verschwindende Strahl Green's.

Vielleicht darf ich hoffen, dass es mir nach mannichfachen vergeblichen Bemühungen endlich noch gelungen ist, das Verhältniss der sogenannten Glasreflexion zur Metallreflexion klarzustellen und die physikalische Ursache der ersteren in etwas aufzudecken. Während bekanntlich Green und Cauchy die elliptisch polarisirende Wirkung der durchsichtigen Mittel auf den Einfluss von Longitudinalstrahlen zurückführen, unterscheiden sich nach Helmholtz und Wernicke diese sogenannten durchsichtigen Mittel von den absorbirenden nur quantitativ durch den verhältnissmässig geringen Betrag ihres Extinctionscoëfficienten. Die erwähnte Ansicht wird daher leicht dazu führen, nun auch bezüglich der beiderlei Reflexionen die bisher behauptete qualitative Artverschiedenheit derselben fallen zu lassen.

Wenn man indess bedenkt, dass bei der Reflexion in Luft sämmtliche Metalle, Halbmetalle und sonstige absorbirende Mittel, und dass ebenso die verwandten total reflectirenden Combinationen sich ausnahmslos als positiv verhalten, d. h. als mit demjenigen Zeichen behaftet, welches ihnen die vorstehenden Rechnungen zuweisen, während dagegen die durchsichtigen Flüssigkeiten und Minerale bald positiv, bald negativ, bald selbst neutral sind, so wird man

sich doch eines gewissen Unterschiedes bewusst bleiben. Nun glaube ich aber auch durch die Entwickelung auf p. 291 bis 293 sowie auf p. 297 geradezu bewiesen zu haben, dass ein aus einer schwach absorbirenden Substanz hergestelltes Reflexionsprisma dem von ihm reflectirten Lichte eine Ellipticität (und zwar eine positive) nur bei äusserer, nicht aber bei innerer Reflexion zu ertheilen vermag. Es steht aber dieser Satz im Widerspruch mit den Versuchen Quincke's an Glasprismen, denen zufolge bei innerer Reflexion Ellipticität von entgegengesetztem Vorzeichen entsteht wie bei äusserer. Ebenso habe ich gezeigt, dass das nach zweimaliger Brechung aus einer absorbirenden Planplatte austretende Licht elliptisch polarisirt ist, während Quincke zwar wohl an dünnen Metallblättchen, niemals aber an vollkommenen Plangläsern eine solche Polarisationsart wahrnahm. Aus allem diesem ziehe ich den Schluss, dass Glasreflexion und Metallreflexion qualitativ verschieden sind.

Wir werden so dahin gedrängt, die Ursache der ersteren in irgendwelcher Einwirkung der Grenzschichten des Mittels zu suchen. Was denn zunächst die Annahmen Cauchy's und Green's betrifft, so lässt sich gegen deren Zerschneidung unserer auf die ZX-Ebene bezüglichen Deformationsgleichung in zwei getrennte Gleichungen und Herbeiziehung geeigneter Hülfsstrahlen a priori nicht viel einwenden. Die so entstehenden vier sogenannten Continuitätsgleichungen des II. Hauptfalles sind eben identisch mit den folgenden:

$$\Sigma \frac{d\zeta_1}{dx} = \Sigma \frac{d\zeta_2}{dx}, \qquad \Sigma \frac{d\xi_1}{dz} = \Sigma \frac{d\xi_2}{dz},$$

$$\Sigma \frac{d\zeta_1}{dz} = \Sigma \frac{d\zeta_2}{dz}, \qquad \Sigma \frac{d\xi_1}{dx} = \Sigma \frac{d\xi_2}{dx}.$$

Die zu Hülfe gezogenen Strahlen sind longitudinale, d. h. solche, welche im allgemeinen mit der Incompressibilität des Aethers in Widerspruch stehen. Sie sollen zwar absorbirt werden, müssen aber nichtsdestoweniger doch als anfänglich zu Stande gekommen gedacht werden.

Machen wir nun die Unterstellung, dass für den Aether Dichtigkeitsänderungen nicht blos schwer erreichbar, sondern geradezu unmöglich sind, so wird damit die Hypothese Cauchy's schlechtweg abgewiesen.

Anders stellt sich die Annahme Green's, der seinem Longitudinalstrahl eine unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit zuweist, hierdurch aber zugleich den Charakter der Longitudinalität wieder aufhebt. Da überdies die Erfahrung den Green'schen Reflexionsformeln günstiger ist als den Cauchy'schen, so möge der verschwindende Strahl Green's etwas ausführlicher behandelt werden.

Schreibt man, ausgehend von reellen Verhältnissen, das Schwingungsgesetz der gebrochenen Welle:

$$\varrho = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z n\cos r' + x\sin e}{\lambda}\right)$$

$$= A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z\sqrt{n^2-\sin^2 e} + x\sin e}{\lambda}\right),$$

so erhält man für $n = 0$:

$$\varrho = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z\sin e\sqrt{-1} + x\sin e}{\lambda}\right),$$

oder auch im Anschluss an die absorbirenden Mittel:

$$\varrho = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z(p+q\sqrt{-1}) + x\sin e}{\lambda}\right)$$

$$p = 0, \quad q = \sin e, \quad p^2 + \sin^2 e = \nu^2 = \sin^2 e,$$

$$\sin r = \frac{\sin e}{\nu} = 1,$$

$$\nu^2 - q^2 = a^2 - b^2 = 0, \quad pq = ab = 0.$$

Folglich:

$$a = 0,\ b = 0.$$

Nun ist aber:

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2\cos \Delta}{m A^2}, \quad 2ab = \frac{\Sigma m' A'^2 \sin \Delta}{m A^2}.$$

Man genügt diesen Gleichungen durch die Annahme:

$$\Sigma m' A'^2 = m A^2, \qquad \Delta = 180^0.$$

Und so zerfällt nach unserer Theorie das obige complexe Schwingungsgesetz in die folgenden reellen für Aether- und Körpertheilchen [1]):

$$\zeta = A_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi_z\right],$$

$$\zeta' = A'_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi_z - \Delta_z\right],$$

$$\xi = A_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi_x\right],$$

$$\xi' = A'_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi_x - \Delta_x\right].$$

Was insbesondere die Aethertheilchen betrifft, so findet man die Verhältnisse $A_z : A_x$, $\chi_z : \chi_x$, wenn man die betreffenden Ausschläge in die hydrodynamische Dilatationsgleichung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit einführt. So ergibt sich:

$$A_z^2 = A_x^2, \quad \operatorname{tg}\chi_z = -\operatorname{ctg}\chi_x.$$

Und setzt man dem entsprechend:

$$\zeta = A_o\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi\right],$$

$$\xi = -A_o\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sin e} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + x\frac{\sin e}{\lambda}\right) - \chi\right],$$

so ersieht man sofort, dass diese Ausdrücke in Uebereinstimmung mit dem in der Einleitung Gesagten gleichzeitig die beiden Gleichungen befriedigen:

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\xi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} = 0\ ^{2}),$$

so dass folglich der Green'sche verschwindende Strahl sozusagen zugleich als Transversalstrahl und als Longitudinalstrahl zu betrachten ist.

---

1) Wied. Ann. I. p. 228.

2) Vergl. die Anmerkung auf p. 86.

Green bedarf zweier solcher Strahlen, eines reflectirten und eines gebrochenen. Wenn man nun auch für den Fall, dass zwei verschiedene ponderable Mittel an einander angrenzen, die Existenz derselben zugeben wollte, so erheben sich doch wieder Schwierigkeiten, wenn das eine der beiden Mittel der Weltäther ist. Nach der oben gegebenen Interpretation erscheinen eben die Green'schen Strahlen an das Vorhandensein von Körpermaterie gebunden. Man müsste dann die XY-Ebene als fictive Trennungsebene etwas innerhalb der wirklichen legen, die äussere Schicht vom einfallenden Strahle mit irgendwelchem Brechungsverhältniss und unbekümmert um die an deren Vorderfläche erfolgende Spiegelung durchlaufen lassen und zudem noch annehmen, dass die so construirte Trennungsfläche, zu deren beiden Seiten doch alle vorausgesetzten Dichtigkeitsänderungen continuirlich vor sich gehen, nichtsdestoweniger das Zustandekommen der verlangten vier Wellen ermögliche. Etwas angemessener erscheint vielleicht der Ausweg, die XY-Ebene zwar mit der wirklichen Grenzfläche des festen oder flüssigen Mittels zusammenfallen zu lassen, aber sich dieselbe mit einer genügend dichten Schicht condensirter Gase überzogen zu denken. Doch wie dem auch sein möge, von dem Standpunkte wenigstens, der in diesem Aufsatze eingehalten ist, erscheint auch die Theorie Green's möglichst unwahrscheinlich.

Versuchen wir es nunmehr, etwas Anderes, der Annahme des Zusammenschwingens der Körper- und Aethertheilchen mehr Entsprechendes an die Stelle zu setzen. Wenn Green und Cauchy die im Sinne Beer's genommenen verschwindenden Strahlen einseitig zu Hülfsstrahlen für den zweiten Hauptfall verkümmern lassen, so soll im Folgenden eine allgemeinere Grenzwirkung als hervorgehend aus der eigenthümlichen Constitution der Grenzschichten des Mittels erörtert werden. Man vergegenwärtige sich nämlich, dass die Körpertheilchen derselben einerseits von reinem Aether umgeben sind. Schreitet

man also von aussen nach innen fort, so wird nicht blos die Beweglichkeit der ponderabeln Massen von der Trennungsfläche ab, für welche sie ein Maximum erreicht, continuirlich bis zu dem anderen Extrem der allseitig gleichen Gebundenheit abnehmen, sondern es werden auch die auf die schwingenden Theilchen einwirkenden Kräfte vermöge der Dissymmetrie der Anordnung in der Nähe der Grenzfläche andere sein als im Innern. Insbesondere wird die Extinction der Schwingungen nicht gleich anfangs diejenige Grösse erhalten, die ihr im Inneren des Mittels zukommt; es werden eben die Körpertheilchen der Oberfläche gegen die Aethertheilchen Phasenverschiebungen erleiden, die dann in grösserer Tiefe, wenn wenigstens das Mittel durchsichtig ist, verschwinden. Dabei wird es vorkommen können, dass in einigen Mitteln die Anfangsextinction zu klein, in anderen zu gross ausfällt; und dass die Körpertheilchen bald anfangs gegen die Aethertheilchen zurückbleiben, bald ihnen voraneilen, und alle diese Aenderungen werden je nach der Wellenlänge des einfallenden Lichtes verschieden sein.

Ohne nun gerade das genaue Gesetz dieses Uebergangszustandes mechanisch deduciren zu können, werde ich zeigen, dass sich ein allgemeiner Ausdruck aufstellen lässt, der allen bisherigen experimentellen Anforderungen genügt. Für die Vorderfläche eines metallisch undurchsichtigen Mittels sind beispielsweise die der Y-Axe parallelen Schwingungen der gebrochenen Welle darstellbar durch die Form:

$$\eta = \mathfrak{D}\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}(q \pm \varkappa)z} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{zp + x\sin e}{\lambda}\right)\right]$$

(75)

$$\eta' = \mathfrak{D}'\, e^{\frac{2\pi}{\lambda}(q \pm \varkappa)z} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{zp + x\sin e}{\lambda}\right) - \left(\Delta \pm \delta e^{kz}\right)\right].$$

Darin bedeuten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$; Δ, δ und k gegebene Constanten. Wie die Phasendifferenz Δ, zu der jetzt der Zuwachs δe^{kz} hinzutritt, so haben auch der Extinctions-

coëfficient q, dem sich der Zuwachs $\varkappa$ zuordnet, sowie die Hülfsgrösse p und das Brechungsverhältniss $v = \sqrt{p^2 + \sin^2 e}$ die frühere Bedeutung; sie bleiben also nach wie vor Functionen der ersteren.

Um die Vorstellungen zu vereinfachen, wollen wir das vorausgesetzte Metall durch ein Stück Glas ersetzen und zu dem Ende $\Delta = q = 0$ nehmen. Alsdann schreibt sich:

$$\eta_i = \mathfrak{D}\, e^{\pm\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\varphi\,,$$
$$\eta' = \mathfrak{D}'\, e^{\pm\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\left(\varphi \mp \delta e^{kz}\right). \tag{76}$$

Was nun den Zusammenhang der hier vorkommenden Coëfficienten betrifft, so findet man ihn durch Einführung der Ausschläge in das dioptrische Grundgesesetz (Gl. V). Für kleine k erhält man näherungsweise:

$$v_0^2 - \varkappa_0^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{D}'^2 \cos(\delta e^{kz})}{m \mathfrak{D}^2}, \quad 2 v_0 \varkappa_0 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{D}^2 \sin(\delta e^{kz})}{m \mathfrak{D}^2},$$

und so würde wie bei den metallischen Mitteln:

$$2v^2 = v_0^2 - \varkappa_0^2 + \sin^2 e + \sqrt{(v_0^2 - \varkappa_0^2 - \sin^2 e)^2 + 4 v_0^2 \varkappa_0^2},$$
$$\varkappa = \frac{v_0 \varkappa_0}{\sqrt{v^2 - \sin^2 e}},$$

u. s. w. $\varkappa$ und v erscheinen aber jetzt nicht blos mehr abhängig von der Incidenz, sondern auch von dem Abstand z von der Trennungsfläche.

Doch kehren wir zu den Ausdrücken (76) zurück. Die Mittel mit positivem $\varkappa$ und negativem δ sind die sogenannten positiven, die mit negativem $\varkappa$ und positivem δ die sogenannten negativen. Zwischen beiden stehen die sogenannten neutralen mit $\varkappa = \delta = 0$. Charakteristisch für die Ausschläge ist, dass dieselben in negativen nicht minder als in positiven Mitteln für $z = -\infty$ niemals unendlich gross werden, sondern einen schliesslichen unbestimmten, aber endlichen Werth erreichen.

Es hat ferner besonders Quincke hervorgehoben, dass die vorgenannte, von Jamin herrührende Bezeich-

nung stets auf Reflexion in Luft zu beziehen ist, und dass das Vorzeichen der Reflexion sich umkehrt, wenn das Licht in umgekehrter Richtung vom Mittel in Luft übergeht. Diese Forderung wird begreiflich, da, wenn die an der Vorderfläche einer planparallelen Glasplatte eingetretene Welle, nachdem sie eine unendlich grosse Dicke durchlaufen, sich der Hinterfläche nähert, alle Vorgänge sich umkehren müssen. Denkt man sich durch diese Hinterfläche ein zweites Coordinatensystem gelegt, diesmal aber mit gegen das Innere gerichteter positiver Z-Axe, so wird man folglich zu schreiben haben:

$$\text{(77a)} \qquad \begin{aligned} \eta &= \mathfrak{E}\, e^{\mp\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\varphi, \\ \eta' &= \mathfrak{E}'\, e^{\mp\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\left(\varphi \pm \delta\, e^{-kz}\right). \end{aligned}$$

Dieser im Inneren eines activen Mittels einfallenden Welle gesellen wir eine reflectirte zu, die charakterisirt sei durch die entsprechenden Gleichungen:

$$\text{(77b)} \qquad \begin{aligned} \eta &= \mathfrak{R}\, e^{\pm\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\varphi, \\ \eta' &= \mathfrak{R}' e^{\pm\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z} \cos\left(\varphi - \chi_R \mp \delta\, e^{-kz}\right), \end{aligned}$$

in welchen, ebenso wie bei den Metallen, die $\varkappa$, δ das entgegengesetzte Zeichen haben wie in denen der einfallenden Welle.

In der That lässt sich nunmehr erweisen, dass die so formulirten Ausdrücke (76) und (77) allen Eigenschaften der positiven und negativen Mittel entsprechen. Benutzt man zunächst für die Vorgänge an der Vorderfläche und zwar für den I. Hauptfall die Grenzgleichungen (1) und entwickelt zu dem Ende den Differentialquotienten $\frac{d\eta}{dz}$, so erhält man, sofern p und $\varkappa$ von z nicht mehr unabhängig sind:

$$\frac{d\eta}{dz} = -\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{D}\, e^{\pm\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa z}\left[\left(p + z\frac{dp}{dz}\right)\sin\varphi - \left(\varkappa + z\frac{d\varkappa}{dz}\right)\cos\varphi\right].$$

Für $z = 0$ werden indess die beiden Uebergangsbedingungen mit denen der metallischen Mittel identisch, und so lassen sich dieselben schreiben:

$$\begin{aligned} 1 + R &= D, \\ 1 - R &= D\frac{p \pm \varkappa\sqrt{-1}}{\cos e}. \end{aligned} \tag{78a}$$

Analog wird sich für den II. Hauptfall entwickeln lassen:

$$\begin{aligned} 1 + R &= \frac{D}{\cos e}\frac{p \pm \varkappa\sqrt{-1}}{\nu_0 \pm \varkappa_0\sqrt{-1}}, \\ 1 - R &= D(\nu_0 \pm \varkappa_0\sqrt{-1}). \end{aligned} \tag{78b}$$

Was ebenso die innere Reflexion, resp. Brechung nach aussen betrifft, so werden sich die bezüglichen Gleichungen von denen der Metalle nur durch das Vorzeichen von $\varkappa$ und $\varkappa_0$ unterscheiden. Dementsprechend hätte man für die Vorgänge an der Hinterfläche und zwar für den I. Hauptfall:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} + R &= D, \\ (\mathfrak{E} - R)(p \mp \varkappa\sqrt{-1}) &= D\cos e. \end{aligned} \tag{79a}$$

und für den II. Hauptfall:

$$\begin{aligned} (E_0 + R)\frac{p \mp \varkappa\sqrt{-1}}{\nu_0 \mp \varkappa_0\sqrt{-1}} &= D\cos e, \\ (E_0 - R)(\nu_0 \mp \varkappa_0\sqrt{-1}) &= D. \end{aligned} \tag{79b}$$

Demgemäss erhalten wir bei correspondirenden Einfallswinkeln für $\frac{J_R^p}{J_R^s}$ und $\left(\frac{J_R^p}{J_R^s}\right)^i$ absolut gleiche, für $\frac{J_D^p}{J_D^s}$ und $\left(\frac{J_D^p}{J_D^s}\right)^i$ wenigstens bei kleinem $\varkappa$ nahezu gleiche Werthe und ausserdem die Beziehungen:

$$\chi_R^i = -\chi_R, \qquad X + X^i = 0. \tag{80}$$

Dies sind aber diejenigen Sätze, die Quincke direct aus der Erfahrung abgeleitet hat. Er sowohl wie Lundquist haben überdies gezeigt, dass sich auch die Azimuthe h_R der wiederhergestellten linearen

Polarisation und die Gangunterschiede d_R als Functionen des Einfallswinkels e für metallische und active durchsichtige Mittel durch die gleichen Formeln darstellen lassen.

Zum Schlusse erübrigt nur noch die Feststellung des sogenannten Ellipticitätscoëfficienten in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge. Ist zwar hierüber vorläufig nur eine Hypothese möglich, so erscheint doch vielleicht der folgende Ideengang nicht ganz unwahrscheinlich. Wir knüpfen an die Gleichungen (2) in Pogg. Ann. Ergbd. VIII. p. 449 an und schreiben dieselben mit Beschränkung auf den ersten Hauptfall:

$$m\,\mathfrak{A}\,\frac{d^2\eta}{dt^2} = (e)\mathfrak{A}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right) - \Sigma\alpha\,\mathfrak{A}\left\{\varepsilon\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right) + \varkappa\,\eta\right\},$$

$$m'\mathfrak{A}'\frac{d^2\eta'}{dt^2} = \alpha\,\mathfrak{A}'\left\{\varepsilon'\left(\frac{d^2\eta'}{dx^2} + \frac{d^2\eta'}{dz^2}\right) + \varkappa'\,\eta'\right\} \quad \ldots\ldots\ ^{1})$$

Die erste dieser Gleichungen bezieht sich ausschliesslich auf die Schwingungen der Aethertheilchen, die zweite und folgenden auf die der Körpertheilchen; e ist die Deformationsconstante des Weltäthers, ε, $\varkappa$; ε', $\varkappa'$ sind Constanten, die α endlich Proportionalitätsfactoren der aus der Wechselwirkung zwischen den beiden Arten von Molecülen hervorgehenden weiteren bewegenden Kräfte. Wurden nun in den bisherigen Abhandlungen sämmtliche hier vorkommende η, η' als gleich genommen, so hatte das die stillschweigende Voraussetzung, dass alle beschleunigenden und bewegenden Kräfte den gleichen periodischen Ver-

1) Um übrigens der Erfahrung vollständig zu entsprechen, hat man in dieselben noch Kräfte einzuführen, die von den Verschiebungsgeschwindigkeiten der Aether- und Körpertheilchen abhängen. Dadurch erweitert sich Gl. (3a) in Pogg. Ann. CLX. p. 469) auf die Form:

$$n^2 - 1 = \Sigma\frac{m'}{m}\,\frac{\varkappa(\lambda^2 + \sqrt{-1}\,\delta\lambda) - \varepsilon n^2}{\varkappa'(\lambda^2 + \sqrt{-1}\,\delta\lambda) - \varepsilon' n^2},$$

wo δ eine neue, der Körperdichte proportionale Constante ist. Die früheren Spitzen der Refractionscurve werden dann endliche Krümmungen, und die Absorption erstreckt sich von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$.

lauf haben, also im nämlichen Augenblicke ihre Extremwerthe erreichen und ebenso gleichzeitig durch Null hindurchgehen. Wir wollen jetzt diese Beschränkung fallen lassen.

Die Bewegungsgleichungen werden in der That allgemeiner, die entsprechende Bewegungsform wird mannichfaltiger, wenn man die innerhalb der grossen Klammern stehenden η, η' etwa als $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ von den übrigen unterscheidet und unter $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$; $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{y}_2'$ Functionen versteht, die zwar gleichfalls nach T und λ' periodisch, aber gegen η, η' beschleunigt oder verzögert sind. So fallen denn die Maxima und Minima der wirklichen Ausschläge nicht mehr mit den Maximis und Minimis der Summe der einwirkenden Kräfte zusammen, und das Resultat dieser grösseren Unregelmässigkeit ist Steigerung der „Extinction", resp. Erweiterung ihres Gebietes.

Bringt man jetzt durch Addition der so abgeänderten Gleichungen dieselben auf bekanntere Form, so gelangt man zu folgendem System von Beziehungen:

$$m\,\mathfrak{A}\,\frac{d^2\eta}{dt^2} + \Sigma m'\,\mathfrak{A}'\,\frac{d^2\eta'}{dt^2} = (e)\,\mathfrak{A}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right),$$

$$\eta = \mathfrak{A}\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos\varphi\,, \qquad \eta' = \mathfrak{A}'\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos(\varphi - \Delta),$$

XII.
$$\mathfrak{A}\left\{\varepsilon\left(\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dz^2}\right) + \varkappa\,\mathfrak{y}_2\right\} = \mathfrak{A}'\left\{\varepsilon'\left(\frac{d^2\mathfrak{y}_1'}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{y}_1'}{dz^2}\right) + \varkappa'\mathfrak{y}_2'\right\}$$

$$\mathfrak{y}_1 = A_1\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos(\varphi - \vartheta_1), \qquad \mathfrak{y}_2 = A_2\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos(\varphi - \vartheta_2),$$

$$\mathfrak{y}_1' = A_1'\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos(\varphi - \Delta - \vartheta_1'), \quad \mathfrak{y}_2' = A_2'\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos(\varphi - \Delta - \vartheta_2'),$$

unter q jetzt den totalen Extinctionscoëfficienten und unter Δ die totale Phasendifferenz zwischen Aether- und Körpertheilchen verstanden.

Man führe nun diese Integralausdrücke in die respectiven Differentialgleichungen ein und setze noch zur Abkürzung:

$$2\pi A_1 \varepsilon \cos\vartheta_1 = \mathfrak{A}\,\varepsilon_1\,, \qquad 2\pi A_1 \varepsilon \sin\vartheta_1 = \mathfrak{A}\varepsilon_2,$$
$$A_2 \varkappa \cos\vartheta_2 = \mathfrak{A}\,\varkappa_1\,, \qquad A_2 \varkappa \sin\vartheta_2 = \mathfrak{A}\varkappa_2 \ldots\ldots$$

Alsdann erhält man nach Eliminirung von φ die vier Gleichungen:

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos\Delta}{m\mathfrak{A}^2}, \qquad 2ab = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \sin\Delta}{m\mathfrak{A}^2},$$

XIII.
$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}^2\{[\varepsilon_1(a^2-b^2) - \varepsilon_2 2ab] - \varkappa_1\lambda^2\} = \\
&\mathfrak{A}'^2\cos\Delta\{[\varepsilon_1'(a^2-b^2) - \varepsilon_2' 2ab] - \varkappa_1'\lambda^2\} \\
&-\mathfrak{A}'^2\sin\Delta\{[\varepsilon_2'(a^2-b^2) + \varepsilon_1' 2ab] - \varkappa_2'\lambda^2\}, \\
&\mathfrak{A}^2\{[\varepsilon_2(a^2-b^2) + \varepsilon_1 2ab] - \varkappa_2\lambda^2\} = \\
&\mathfrak{A}'^2\sin\Delta\{[\varepsilon_1'(a^2-b^2) - \varepsilon_2' 2ab] - \varkappa_1'\lambda^2\} \\
&+\mathfrak{A}'^2\cos\Delta\{\varepsilon_2'(a^2-b^2) + \varepsilon_1' 2ab] - \varkappa_2'\lambda^2\}.
\end{aligned}$$

Bestimmt man aus den beiden letzteren $\mathfrak{A}'^2\cos\Delta$, $\mathfrak{A}'^2\sin\Delta$ und setzt dieselben in die ersteren ein, so lässt sich alles in die eine symbolische Form:

$$a^2 - b^2 - 1 + 2ab\sqrt{-1} =$$
$$\Sigma \frac{m'(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1})(a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}) - (\varkappa_1 + \varkappa_2\sqrt{-1})\lambda^2}{m(\varepsilon_1' + \varepsilon_2'\sqrt{-1})(a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}) - (\varkappa_1' + \varkappa_2'\sqrt{-1})\lambda^2}.$$

zusammenziehen. Wir schreiben dafür kürzer $\left(l = \frac{\lambda}{n}\right)$:

$$(81) \qquad n^2 - 1 = \Sigma \frac{m'}{m} \frac{(\varkappa_1 + \varkappa_2\sqrt{-1})\,l^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1})}{(\varkappa_1' + \varkappa_2'\sqrt{-1})\,l^2 - (\varepsilon_1' + \varepsilon_2'\sqrt{-1})}.$$

Wenn wir in diesen Ausdrücken die ε, $\varkappa$ mit $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ zu den neuen Coëfficienten ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ verschmolzen haben, so machen wir dabei die gewiss nicht unwahrscheinliche Annahme, dass sowohl die Amplitudenverhältnisse $\frac{A}{\mathfrak{A}}$ als die Verzögerungen ϑ von der Schwingungsdauer T des durchgehenden Lichtes unabhängig sind.

Unter dieser Voraussetzung erscheint der Ausdruck (81) als eine Erweiterung des früher erhaltenen, in welchem die imaginären Glieder fehlten.

Was seine Berechtigung betrifft, so lehrt eine einfache Ueberlegung, dass derselbe auf das Innere eines unendlich ausgedehnten Mittels nicht bezogen werden kann. Rings um einen im Inneren liegenden schwingenden Punkt ist die Umgebung in Bezug auf positive und negative Coordinaten symmetrisch angeordnet, und daher müssen auch die auf ihn einwirkenden Kräfte jedesmal für die Verschiebung $\eta = 0$ verschwinden; die angenommenen ϑ wären also nicht blos mit gleichem Rechte positiv wie negativ zu nehmen, sondern es müssten auch gleich viele Glieder mit positivem wie mit negativem ϑ eingeführt werden, so dass sie sich gegenseitig aufheben würden.

Anders verhält es sich für die oberflächlichen Schichten, für welche ja im ruhenden Mittel oberhalb und unterhalb jedes Punktes einer senkrecht zur Grenzfläche gezogenen Geraden die symmetrische Gruppirung fehlt. Und ebenso begreift sich, dass die ϑ für die Eintrittsfläche des einen Mittels positiv und für die eines anderen negativ ausfallen können.

Diese Erwägung zwingt dann behufs Ueberführung des Schwingungsgesetzes der Grenzschichten in das des Inneren, dass man annimmt:

$$\mathfrak{A} = A\left(1 \pm \alpha\, e^{\beta z}\right), \qquad \vartheta = \pm\, \vartheta_0\, e^{\gamma z}$$

und entsprechend für kleine ϑ:

$$(82) \qquad \begin{aligned} A &= \mathfrak{A}, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_2 = \pm\, \varepsilon_0\, e^{\gamma' z}, \\ \varkappa_1 &= \varkappa_i, \qquad \varkappa_2 = \pm\, \varkappa_0\, e^{\gamma'' z}. \end{aligned}$$

Darin sind jedoch auch die Coëfficienten γ als so klein zu denken, dass bei den vorerwähnten Differentiationen noch die Quotienten $\frac{dp}{dz}$ und $\frac{dq}{dz}$ vernachlässigt werden dürfen.

Aehnlich wie die Eintrittsschichten des Mittels wirken die Austrittsschichten desselben. Für den austretenden Strahl ist indess die Dissymmetrie der Anordnung von ent-

gegengesetzter Lage wie für den eintretenden, und daher werden sich für beide in Ausdruck (81) die Vorzeichen von ε_2, $\varkappa_2$ umkehren. Damit wird dann die Vergrösserung des Extinctionscoëfficienten zur Verkleinerung oder umgekehrt, und die entsprechende elliptische Polarisation wechselt eventuell das Zeichen.

Entwickelt man schliesslich für dioptrisch einfache Mittel aus Gl. (81) das Brechungsverhältniss n als Function der Wellenlänge λ, so erhält man statt der früheren Beziehung [1]):

$$n = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(n_\infty + \frac{\lambda}{L}\right)^2 - D'} \pm \sqrt{\left(n_\infty - \frac{\lambda}{L}\right)^2 - D'}\right\}$$

nunmehr die folgende:

$$(83)\quad n = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(a_\infty + b_\infty\sqrt{-1} + \frac{\lambda}{L_1 + L_2\sqrt{-1}}\right)^2 - \left(D_1' + D_2'\sqrt{-1}\right)}\right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(a_\infty + b_\infty\sqrt{-1} - \frac{\lambda}{L_1 + L_2\sqrt{-1}}\right)^2 - \left(D_1' + D_2'\sqrt{-1}\right)}\right\}.$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(84)\quad \begin{gathered} (a_\infty + b_\infty\sqrt{-1})^2 - 1 = \frac{m'}{m}\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2\sqrt{-1}}{\varkappa_1' + \varkappa_2'\sqrt{-1}} \\ (a_0 + b_0\sqrt{-1})^2 - 1 = \frac{m'}{m}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1}}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'\sqrt{-1}} \\ (a_\infty + b_\infty\sqrt{-1})^2 - (a_0 + b_0\sqrt{-1})^2 = (D_1' + D_2'\sqrt{-1}) \\ (L_1 + L_2\sqrt{-1}) = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'\sqrt{-1}}{\varkappa_1' + \varkappa_2'\sqrt{-1}}, \end{gathered}$$

und beziehen sich die Werthe a_∞, b_∞ auf $\lambda = \infty$, a_0, b_0 auf $\lambda = 0$.

Aus dieser Gleichung lässt sich dann mittelst bekannter algebraischer Operationen auch das einem beliebigen λ entsprechende a und b ableiten. Wie man die

1) l. c. p. 472.

sechs Constanten derselben aus drei gegebenen complexen Brechungsverhältnissen, also aus drei Paaren einander entsprechender gegebener Werthe a', b'; a'', b''; a''', b''' vermöge Gl. (81) ermittelt, ist ohne weiteres einleuchtend. Lägen blos die direct bei irgendwelchem Einfallswinkel e beobachteten Werthe v', q'; v'', q''; v''', q''' vor, so wären dieselben erst mittelst bekannter Formeln auf senkrechte Incidenz zu reduciren.

* * *

Ziehen wir jetzt aus vorstehender Untersuchung das allgemeine Facit, so lässt sich dasselbe dahin aussprechen, dass die Annahme einer hydrodynamischen Dilatation des Aethers nicht blos unnöthig ist, sondern sogar mit allen experimentell festgestellten Eigenschaften der total reflectirenden und absorbirenden Mittel in Widerspruch steht.

Bei Verwerfung derselben sind dann die Grundsätze der Gleichheit der drei Drehungscomponenten und der linearen Dilatation parallel der Trennungsfläche die einzigen von unbeschränkter Gültigkeit.

Bonn, Ende August 1877.

IX. *Ein neuer Quecksilbercommutator; von J. W. Giltay in Dordrecht.*

Unter den Commutatoren ist die Pohl'sche Wippe infolge ihrer einfachen Handhabung sowie des sicheren und nie fehlenden Quecksilberschlusses jedenfalls der bequemste und verbreitetste.

Dennoch hat dieser Commutator zwei Nachtheile. Einmal befindet sich das Quecksilber frei an der Luft in

offenen Näpfchen, weshalb es bald schmutzig wird und beim raschen Commutiren und Transport verspritzt. Ferner hat die Pohl'sche Wippe keine Mittelstellung. Um den Strom gänzlich zu unterbrechen, muss man den Bügel ganz herausnehmen oder eine der Klemmschrauben lösen.

Zur Beseitigung dieser Fehler habe ich das Princip der Pohl'schen Wippe ganz umgekehrt, indem ich das Quecksilber durch seine eigene Schwere sich nach den Contactstiften begeben lasse, wobei es von der äusseren Luft ganz abgeschlossen ist.

In Taf. II Fig. 7a sind *A* und *B* zwei cylindrische, an beiden Seiten verschlossene Hohlräume. Jeder von diesen ist auf ungefähr ein Drittel mit Quecksilber gefüllt. Ausserdem enthält jeder Cylinder drei Metalldrähte; *ll* und *l'l'* liegen an der unteren Seite, *a'*, *b'*, *a* und *b* dagegen an der oberen Seite. Die Drähte *b'* und *a* sind mit der Batterie, *ll* und *l'l'* dagegen mit dem Galvanometer *G* verbunden. Ausserdem ist *a* mit *a'* und *b* mit *b'* permanent verbunden. In dieser Lage der Hohlräume kann die Batterie offenbar keinen Strom in das Galvanometer schicken.

Das ganze System werde nun um 45° in der Richtung des Pfeiles *P* gedreht (Taf. II Fig. 7b).

Das Quecksilber wird sich nach der unteren (linken) Seite der Cylinder begeben, wodurch die Drähte *a* und *b'* sowohl wie *ll* und *l'l'* mit demselben in Contact gerathen. Der Strom wird jetzt von der Batterie aus den folgenden Weg nehmen: + *a*, Quecksilber, *l'l'*, *G*, *ll*, Quecksilber, *b'* —. Wird das System in der Richtung des Pfeiles *Q* um 45° gedreht (Taf. II Fig. 7c), so ist der Stromweg jetzt: + *a*, punktirte Linie, *a'*, Quecksilber, *l*, *G*, *l'*, Quecksilber, *b*, punktirte Linie, *b'* —.

Die praktische Ausführung dieses schematischen Commutators ist Taf. II Fig. 7 perspectivisch dargestellt. *A* ist ein viereckiger Klotz von irgendeinem harten Holze und ruht mittelst 4 horizontaler Stifte, wovon in der Figur nur zwei sichtbar sind, (*D* und *E*), auf zwei verticalen

Latten *BB*, die mit je vier Einschnitten versehen sind. Ausser den beiden Stiften *D* und *E* hat der Klotz an jeder Seite noch zwei solche Stifte *F* und *G*. Je nachdem sich der Klotz in der Richtung des Pfeiles *P* oder des Pfeiles *Q* um 45° dreht, ruht er auf den Stiften *D* und *F* oder *E* und *G*.

In diesen Klotz sind zwei cylindrische Löcher von ungefähr 1 cm Durchmesser gebohrt, welche mit den schematischen Hohlräumen der Fig. 7a übereinstimmen. Hat der Commutator die Lage von Fig. 7, so liegen diese Löcher mit ihren Axen *XX* und *YY* in einer Horizontalebene einander parallel. An der einen Seite sind sie durch eine Lederflansche und ein übergeschraubtes Brettchen verschlossen; an der anderen im Holze nicht ganz durchgebohrt. Jedes derselben ist ungefähr auf ein Drittel mit Quecksilber gefüllt und enthält ausserdem 3 Platin- oder platinirte Kupferdrähte. Der Fig. 7a analog liegt ein langer Platindraht an der unteren Seite der Löcher und zwei kurze Drähte an der oberen Seite.

Nach Taf. II Fig. 7a müssen die langen Platindrähte mit dem Galvanometer verbunden werden können. Dazu sind sie mit zwei Kupferdrähten *zz* verbunden, welche an der unteren Seite des Klotzes mit zwei leicht zu biegenden, mit Klemmschrauben *J* versehenen (in Fig. 7 unsichtbaren) Kupferdrähten verlöthet sind. Die beiden kurzen Platindrähte *a* und *b'* (Fig. 7a) sind nach dem Schema mit der Batterie verbunden, was ganz auf dieselbe Weise wie oben geschieht, so dass also *a* und *b'* mit zwei Klemmen *H* (wovon nur eine sichtbar ist) permanent verbunden sind.

Zur ferneren Verbindung von *a* mit *a'* und *b* mit *b'* (Fig. 7a) dienen zwei sich kreuzende von einander isolirte und durch ein aufgeschraubtes Brettchen verdeckte Kupferdrähte *KL* und *NM* (Fig. 7).

Das Instrument lässt also ganz entsprechend dem Schema 7a in seiner Mittelstellung keinen Strom durch und führt in den beiden anderen Stellungen dem Galvanometer entgegengesetzt gerichtete Ströme zu.

X. *Ueber Radiometererscheinungen in Flüssigkeiten; von A. Bergner in Ribnitz (Mecklenburg-Schwerin).*

Aehnliche Bewegungen wie in den Radiometern treten auch in Flüssigkeiten auf. Hängt man eine durch einen kleinen Magneten gerichtete Drehwage mit einer an einer Seite geschwärzten, an der andern vergoldeten, vertical schwebenden Glimmerscheibe in Schwefelkohlenstoff, welcher sich durch seine grosse Diathermansie und Beweglichkeit auszeichnet, und exponirt die geschwärzte Seite den Strahlen einer schwachen Wärmequelle, etwa eines Stearinlichtes, so wird die Scheibe zunächst bedeutend angezogen, nach kurzer Zeit jedoch wieder abgestossen. Ein Gleiches tritt ein, wenn man die Gefässwand mit der Hand erwärmt. Sobald man aber auf die Scheibe kräftige Sonnenstrahlen fallen lässt, wird sie sogleich oder doch nur nach sehr kurzer Anziehung stark zurückgestossen. Hängt man dagegen die Drehwage in durch Kochen von Luft befreites und dann rasch auf Zimmertemperatur abgekühltes Wasser, also in eine sehr adiathermane Flüssigkeit, so erfolgt bei schwacher Bestrahlung eine äusserst geringfügige Anziehung; exponirt man die Scheibe aber kräftigen Sonnenstrahlen, so wird dieselbe zunächst sehr merklich angezogen und erst nach längerer Zeit wieder zurückgestossen.

In Flüssigkeiten zeigt sich also ganz dieselbe Erscheinung wie in der Luft unter Atmosphärendruck, nur dass zur Zurückstossung der Scheibe in jenen eine erheblich geringere Intensität der Bestrahlung erforderlich ist, als in dieser. Auch ein Radiometer lässt sich in Schwefelkohlenstoff herstellen, wenn man die Flügel des Drehkreuzes aus verticalen Scheiben vorbezeichneter Art fertigt, und die Drehung desselben ist im Sonnenlichte ziemlich rasch. Ueberhaupt ist die Empfindlichkeit eines beweglichen Körpers in Schwefelkohlenstoff so gross, dass es äusserst

schwierig wird, eine Drehwage in demselben auch nur einigermaassen in die Ruhelage zu bringen. — Ebenso, wie in der Luft, lässt sich auch dadurch in Flüssigkeiten eine drehende Bewegung herstellen, dass man den Drehkörper an den entgegengesetzten verticalen Flächen und Enden von innen erwärmt. Man verfertigt aus dünnem Messingblech eine längliche Dose mit parallelen rechtwinkligen Flächen (normales Parallelepipedum), welche überall bis auf die entgegengesetzten Hälften der einander gegenüberliegenden Langseitenflächen doppelte Wände hat, deren Abstände von den Aussenwänden mit Asche gefüllt sind, welche ferner durch einen über der Mitte angebrachten Trichter, mittelst dessen sie schwimmt, gefüllt werden kann, welche endlich durch ein unter demselben in der Mitte an einem Drahte angebrachtes Gewicht in horizontaler Lage mit verticalen Seitenflächen in gewünschter Tiefe unter der Wasseroberfläche gehalten wird. Füllt man die Dose, nachdem sie in ein Gefäss voll kalten Wassers gebracht worden, durch eine feine Röhre mit heissem Wasser, so beginnt sie sofort sich um ihren Mittelpunkt in der Richtung zu drehen, dass die einfachen, nicht durch Asche isolirten, also die erwärmten Wandflächen angezogen werden.

Wenn sonach die Anziehung und Abstossung durch Wärme in allen Arten nicht fester Materien stattfindet, so liegt der Gedanke nahe, dass auch die Ursache derselben überall die gleiche sei, und es könnte daher vorstehende Mittheilung vielleicht mit dazu dienen, den Grund jener Erscheinung mit grösserer Sicherheit, als bisher möglich war, festzustellen.

Ribnitz, den 27. Juli 1877.

XI. *Bemerkung über die Mittheilung des Herrn Prof. H. Herwig „über die sogenannte Unipolarität etc.“; von Dr. Meyerstein.*

Die Beschreibung des zu den Untersuchungen des Herrn Herwig über Unipolarität[1]) angewandten Instrumentes machte mir den Eindruck, als sei die Anwendung „langer, kräftiger Magnete“ zu einem astatischen Nadelpaare etwas ganz neues, indem Hr. Herwig die bereits bekannten Vorzüge der „gestreckten“ Magnete gegen die gedrungenen von gleicher Masse besonders hervorhebt.

Ich fühle mich zu der Erklärung veranlasst, dass mir die Construction eines astatischen Nadelpaares mit langen, kräftigen Magneten von Hrn. Wilhelm Weber schon vor fast 25 Jahren zur Anfertigung eines solchen Systems für ihn selbst angegeben ist und dass ich nach diesem Principe[2]) die empfindlichsten Multiplicatoren seit jener Zeit ausgeführt habe.

Eine Zeichnung des von W. Weber im Jahre 1862 für die absolute Widerstandsmessung angewendeten Galvanometers mit astatischem Nadelpaare hat Hr. F. Kohlrausch[3]) gegeben. Diese Abbildung zeigt auch die Drehung des Spiegels um eine Verticalaxe. Die feine Verticalbewegung des Spiegels mittelst einer Schraube, wie sie Hr. Herwig angebracht hat, ist jedenfalls sehr zu empfehlen.

Aus welchem Grunde aber Hr. Herwig seinen Multiplicator in zwei Hälften theilt, ist mir nicht klar, da doch die mittleren Drahtwindungen, zum Nachtheile des

1) Wied. Ann. I. p. 516.

2) Vgl. Wilhelm Weber. Zur Galvanometrie. Gött. Nachr. X. 1862, insbesondere die Abschnitte 10, 11—14.

3) Pogg. Ann. Ergbd. VI.

Multiplicators, verloren gehen, wie dieses besonders in Abschnitt 12 zur Galvanometrie von W. Weber hervorgehoben ist. — Um einen Differentialmultiplicator zu erhalten, erreicht man die beste Wirkung, ohne einen jeden anderen Nachtheil, wenn man auf den Rahmen des Multiplicators gleichzeitig zwei zusammengelegte gleich lange und gleich starke Drähte wickelt. In der That ist der von Hrn. F. Kohlrausch angewandte Differentialmultiplicator so eingerichtet.

Dass man durch Aufwickeln so zusammengelegter Drähte von verschiedenen Dicken auf ein und denselben Rahmen dieselben Combinationen erzielen kann wie durch die beiden halben Multiplicatoren des Hrn. Herwig, versteht sich von selbst.

Göttingen, den 21. Sept. 1877.

XII. *Ueber die altägyptische Wage; von Alfred Wiedemann.*

Nach Rodwell (Nature IX. p. 8) kannten die alten Ägypter das Princip des Reiters an der Wage. Ich habe indess über 100 Abbildungen ägyptischer Wagen verglichen und gefunden, dass dies auf einem Irrthum beruht. Die ägyptische Wage ist eine einfache, gleicharmige; ein Haken oben am Ständer trägt an einem Faden ein Gewicht, also ein Senkloth. Bei der Abbildung wurde Haken und Gewicht, da Perspective den Ägyptern unbekannt war, als von der Seite gesehen, in die Ebene der Wage gezeichnet, so dass das Gewicht bei schadhaften Darstellungen nicht am Haken, sondern am Wagebalken zu hängen scheint.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1878. ANNALEN № 3.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE BAND III.

I. *Mittheilung einiger Versuche aus dem Gebiet der Capillarität; von W. C. Röntgen.*

Von Wilhelmy wurde in den Jahren 1863 und 1864[1]) eine experimentelle Untersuchung über die Verdichtung der Flüssigkeiten an der Oberfläche von festen Körpern veröffentlicht. Die dort unter dem Namen „Verdichtungscoëfficienten" mitgetheilten Zahlen geben an, um wie viel Milligramm das Gewicht eines in einer Flüssigkeit untergetauchten festen Körpers zunimmt, wenn die Berührungsfläche des festen und flüssigen Körpers um 1 qmm wächst und sonst nichts geändert wird.

Es erschien mir von besonderem Interesse, diese Frage, welche von Wilhelmy nicht in erschöpfender Weise behandelt werden konnte, nochmals zu stellen und mit möglichst geeigneten Mitteln die Versuche zu wiederholen, und das Gebiet derselben zu erweitern.

Ich versuchte vor allem die Richtigkeit der Wilhelmy'schen Resultate zu constatiren und verfuhr dabei nach einer etwas anderen und in einem speciellen Fall ohne Zweifel besseren Methode als jener Forscher. Anstatt nämlich, wie Wilhelmy, Cylinder oder Platten bis zu verschiedenen, möglichst genau bestimmten Tiefen in eine Flüssigkeit einzutauchen und das jeder Tiefe entsprechende Gewicht derselben zu bestimmen, stellte ich Versuche nach dem folgenden Schema an. Die linke Schale einer feinen chemischen Wage wurde abgenommen und anstatt ihrer ein kleines Becherglas mittelst eines

1) Pogg. Ann. CXIX. CXXI. CXXII.

dünnen Platindrahtes aufgehängt. Dieses Becherglas enthielt ein Stück des leicht spaltbaren krystallisirten Gypses und war mit diesem Gypsstück vollständig in der zu prüfenden Flüssigkeit untergetaucht. Als Flüssigkeit wurde absoluter Alkohol oder Terpentinöl angewandt. Nachdem alle adhärirenden Luftblasen vertrieben waren und der ganze Apparat eine möglichst gleichmässige Temperatur angenommen hatte, wurde die Wage tarirt, wobei Gewichtsdifferenzen im Betrage von 1 mg mit Sicherheit erkennbar waren. Darauf nahm ich das Gypsstück vorsichtig aus dem Becherglas heraus, spaltete dasselbe in möglichst viele Stücke, welche wieder in das Becherglas zurückgebracht wurden, und tarirte die Wage abermals.

Wenn nun eine Verdichtung auf der durch Spaltung neugebildeten Oberfläche stattgefunden hat, so müsste sich diese, nach Wilhelmy, durch eine Vermehrung des Gewichtes bemerkbar machen, und zwar in Anbetracht der von Wilhelmy gefundenen Zahlen, durch eine ziemlich beträchtliche Vermehrung, wie die folgende Rechnung zeigt. Die Gypsplatte hatte anfänglich eine Oberfläche von nahezu $2 \times 1800 = 3600$ qmm; dieselbe wurde in 11 gleich grosse Stücke gespalten, wodurch die Oberfläche um $20 \times 1800 = 36000$ qmm zunahm. Die Wilhelmy'schen Zahlen für den Verdichtungscoëfficienten von Aethylalkohol auf Platten schwanken zwischen 0,0064 und 0,0233; allerdings wurde kein Gyps, sondern Glas, Platin und einige andere Metalle untersucht; legt man aber versuchsweise den kleinsten Werth 0,006 einer Berechnung zu Grunde, so ergibt dieselbe, dass eine Gewichtszunahme von 216 mg hätte auftreten müssen. Allein, wie oft ich auch den Versuch wiederholte, niemals habe ich die geringste Vermehrung des Gewichts bemerken können.

Durch dieses negative Resultat schien mir die Richtigkeit der Wilhelmy'schen Versuche und die Brauchbarkeit seiner Methode zur Bestimmung der „Verdichtungscoëfficienten“ sehr in Frage gestellt zu sein; da jedoch Wilhelmy nicht mit Gyps experimentirte und es somit

möglich, wenn auch nicht wahrscheinlich wäre, dass sich derselbe abweichend verhielte, so fehlte noch ein Versuch, der unzweifelhaft die Unrichtigkeit der Wilhelmy'schen Resultate nachweist.

Ich verschaffte mir zu diesem Zwecke eine ziemliche Menge von äusserst dünnen (circa 0,005 mm dicken) Glashäutchen, die man leicht durch Aufblasen einer einerseits geschlossenen, vor der Gebläselampe weich gemachten Glasröhre erhält. Das Gewicht einer Partie dieser Blättchen war in Luft zu 730 mg bestimmt worden; die Oberfläche betrug nach einer Schätzung, die jedenfalls zu kleine Werthe liefert, ungefähr 80000 qmm. Nach Wilhelmy ist der Verdichtungscoëfficient von Glas-Alkohol 0,015; es wäre somit nach vollständigem Eintauchen dieser Blättchen in Alkohol infolge der Verdichtung eine Gewichtszunahme zu $80000 \times 0{,}015 = 1200$ mg zu erwarten. Veranschlagt man das specifische Gewicht des Glases auf 2,5 und zieht das specifische Gewicht des benutzten Alkohols = 0,800 in Rechnung, so beträgt das Gewicht der vom Glas verdrängten Flüssigkeit ungefähr 250 mg. Folglich müsste, wenn Wilhelmy's Versuche richtig wären, bei der Wägung der Blättchen in Alkohol das Gewicht derselben ungefähr $1200 - 250 = 950$ mg mehr betragen, als bei einer Wägung in Luft; eine Erscheinung, welche selbstredend eine Bestimmung des specifischen Gewichtes solcher Blättchen auf dem gebräuchlichen Wege unmöglich machen würde. Als nun die Wägung in Alkohol vorgenommen wurde, war von einer solchen Gewichtszunahme nichts zu bemerken, im Gegentheil erhielt ich eine Gewichtsabnahme von 231 mg, woraus sich das specifische Gewicht des Glases zu 2,53 berechnet, was in befriedigender Uebereinstimmung ist mit dem Werth 2,51, den ich für das specifische Gewicht desselben Glases bei Anwendung grösserer Stücke erhielt.

Ohne Zweifel sind somit die Wilhelmy'schen Resultate fehlerhaft und es kommt den von ihm mitgetheilten Zahlen die Bedeutung von „Verdichtungscoëfficienten" in

keiner Weise zu. Die beschriebenen Versuche beweisen überdies, dass eine Untersuchung über „Verdichtungscoëfficienten" nach der Wilhelmy'schen oder einer ähnlichen Methode nicht durchführbar ist; und dadurch war ich genöthigt, die beabsichtigte Untersuchung fallen zu lassen und mich mit dem mitgetheilten negativen Resultate zu begnügen.

Es sei mir noch gestattet, das Folgende über eine mit dem obigen Gegenstand verwandte Frage mitzutheilen.

In der Capillaritätstheorie wird man bekanntermaassen zu dem folgenden Resultate geführt. Bezeichnet man mit α_{12}, α_{23}, α_{31} die Capillaritätsconstanten an den Trennungsflächen von drei Körpern 1, 2, 3, von denen 1 und 2 Flüssigkeiten sind, 3 dagegen ein fester Körper ist; weiter mit θ den spitzen Randwinkel der Flüssigkeit 1, so besteht die Beziehung: $\alpha_{23} - \alpha_{31} = \alpha_{12} \cos\theta$; vorausgesetzt, dass der feste Körper an der gemeinschaftlichen Berührungslinie der drei Körper keine scharfe Kante besitzt. Wir wollen nun als Flüssigkeit 2 atmosphärische Luft wählen; es sind dann, wie bekannt, α_{12}, θ sowie $\alpha_{12} \cos\theta$ der directen Messung zugänglich, folglich lässt sich in einem speciellen Falle der Werth der linken Seite obiger Gleichung angeben. Meines Wissens hat man aber bisher niemals versucht, die Differenz $(\alpha_{23} - \alpha_{31})$ auf directem Wege, d. h. ohne vorherige Bestimmung von α_{12} und θ zu bestimmen. Ich habe nun eine Methode gefunden, welche eine solche Bestimmung ermöglicht. Diese Methode und die Ergebnisse einiger Versuche möchte ich im Folgenden mittheilen.

Taf. III Fig. 1 stellt in natürlicher Grösse den wesentlichsten Theil des benutzten Apparates dar. *a b c* ist eine T-förmige Glasröhre; das untere Ende derselben besteht aus einem Stücke einer dickwandigen Glasröhre, deren lichte Oeffnung 2,10 mm im Durchmesser hat. Die Fläche bei *a* ist sorgfältig senkrecht zur Längsrichtung der Röhre abgeschliffen und mit einem Stückchen vom dünnsten

Kautschuk (Dicke 0,02 mm) überzogen; die Befestigung dieser Kautschukmembran geschah mittelst einer Spur Canadabalsam. Durch die zweite Oeffnung *b* des T-Stückes lässt sich die Luft in der Röhre verdünnen und der dritte Arm *c* steht mittelst eines Kautschukschlauches in Verbindung mit einem offenen Wassermanometer, welches zur Bestimmung des Ueberdruckes der äusseren Atmosphäre über den Druck in der theilweise evacuirten Röhre dient.

Verdünnt man die Luft in der Glasröhre, so wird der äussere Ueberdruck die Kautschukmembran in die Röhre hineinpressen und zwar erhält die Membran bei einem gewissen Ueberdruck die Gestalt eines kurzen, von einer Halbkugel gedeckten Cylinders, welcher sich gegen die innere Röhrenwand bei *a* anlegt. Eine Ablesung am Manometer gibt ein Maass für die Spannung der Membran. Das untere Ende *a* des T-Stückes ist in verticaler Stellung mittelst eines durchsichtigen Kittes zwischen den planparallelen Seitenwänden eines Glastroges *G* befestigt. Vor demselben ist ein Mikroskop *M* mit Ocularmikrometer aufgestellt, welches jede Ausbauchung der Membran genau messbar zu verfolgen gestattet.

Jede Bestimmung, welche mit diesem Apparat ausgeführt wurde, besteht aus zwei Versuchen I und II.

Versuch I. In dem Glastrog befindet sich atmosphärische Luft; die Luft in dem T-Stück wird verdünnt, bis die Membran eine durch das Ocularmikrometer beobachtete, für sämmtliche Versuche gleichbleibende Ausbauchung erhalten hat. (Der Abstand der Kuppe vom unteren Rande war etwas grösser als der Radius der Röhrenöffnung.) Darauf wird der Ueberdruck der äusseren über den Druck der inneren Luft am Manometer abgelesen.

Versuch II. Nachdem der Glastrog genau bis zur Höhe der Membran mit einer Flüssigkeit (Wasser) gefüllt ist, wird die Luft über der Membran wieder so weit verdünnt, bis diese genau dieselbe Stellung wie bei I einnimmt. Der jetzt benöthigte Ueberdruck wird abermals am Manometer abgelesen.

Es ist einleuchtend, dass man aus der Differenz des Ueberdruckes beim ersten Versuche, wo die untere Seite der Membran mit Luft in Berührung war, und des Ueberdrucks beim zweiten Versuche, wo die untere Seite von einer Flüssigkeit (Wasser) benetzt war, die Grösse $(\alpha_{23} - \alpha_{31})$ berechnen kann, wenn überdies die Dimensionen der ausgebauchten Membran bekannt sind. Bezeichnet man die beiden Ueberdrucke in Millimetern Wasser mit p_1 und p_2, den Durchmesser der lichten Oeffnung der Röhre, weniger der doppelten Dicke der Membran mit d, so ist einfach:

$$\alpha_{23} - \alpha_{31} = \frac{d}{4} \cdot (p_1 - p_2).$$

Bei der Ausführung dieser Versuche waren verschiedene Fehlerquellen zu berücksichtigen, von denen die wichtigsten besprochen werden sollen. Es war erstens der Einfluss der elastischen Nachwirkung der Membran zu eliminiren. Zu diesem Zwecke wurde in folgender Weise verfahren. Die oben mit I bezeichnete Bestimmung besteht in Wirklichkeit aus einer Gruppe von 15 — 20 Versuchen, die alle nach dem folgenden Schema ausgeführt wurden. Nach Verdünnung der Luft im T-Rohr steht die Membran während einer Zeit von 30 Secunden unter einem Ueberdruck, welcher die besprochene Wölbung der Membran erzeugt. Nach Verlauf dieser Zeit wird am Manometer der Ueberdruck abgelesen, und sodann während weiterer 30 Secunden die Membran ohne Ueberdruck sich selbst überlassen. Darauf folgt ein zweiter Versuch, der in genau derselben Weise wie der erste angestellt wird, darauf ein dritter, vierter u. s. w. Infolge der elastischen Nachwirkung werden die abgelesenen, derselben Wölbung der Membran entsprechenden Ueberdrucke bei den aufeinanderfolgenden Versuchen immer kleiner, anfänglich rasch, später langsamer, bis nach einer genügenden Anzahl von Versuchen eine solche Abnahme bei zwei aufeinanderfolgenden Versuchen nicht mehr merklich ist. Nachdem nun diese Constanz der Ueberdrucke eingetreten ist, wird

der oben mit II bezeichnete Versuch sofort nach Beendigung des letzten der Gruppe I angestellt. Auch dieser Versuch II bildet in Wirklichkeit eine Gruppe von mehreren, durch gleiche Zeitintervalle getrennten Versuchen; es stellte sich nämlich heraus, dass, trotzdem die elastische Nachwirkung ausser Spiel ist, der abgelesene Ueberdruck bei einem zweiten Versuche verschieden ist von dem beim ersten und dass erst von diesem zweiten Versuche an diese Ueberdrucke constant bleiben. Ich schliesse aus dieser ausnahmslos eintretenden Erscheinung, dass, wenn Kautschuk und Wasser mit einander in Berührung gebracht werden, die Oberflächenspannung an der Trennungsfläche dieser Körper eine gewisse Zeit braucht, um ihren normalen Werth zu erreichen.

Ein weiterer Fehler könnte möglicherweise aus dem Umstande erwachsen, dass bei Versuch I eine trockene und bei Versuch II eine feuchte Kautschukmembran gedehnt wird; es wäre ja möglich, dass die Elasticität der einen verschieden wäre von der der andern. Um auch diesen Fehler zu eliminiren, wurde das T-Stück zum Theil mit Wasser gefüllt, welches die obere Seite der Membran fortwährend benetzte.

Ich will zum Schluss das Resultat der Untersuchung geben. Legt man die Differenz der Ueberdrucke, welche beim letzten Versuche aus der Gruppe I und beim ersten Versuche aus der Gruppe II gefunden wurden, einer Berechnung zu Grunde, so resultirt für $(\alpha_{23} - \alpha_{31})$ (Wasser, Luft, Kautschuk) als Mittel aus oft wiederholten Bestimmungen der Werth 5,5 mg pro Millimeter. Dieser Werth ist jedoch nur für den ersten Augenblick der Berührung gültig, da die Oberflächenspannung α_{31} ihren normalen Werth noch nicht erreicht hat. Wählt man deshalb für unsere Berechnung den Werth des Ueberdruckes, welchen der letzte Versuch der Gruppe I liefert, und den nach dem zweiten Versuche constant bleibenden Werth des Ueberdruckes der Gruppe II, so erhält man für $(\alpha_{23} - \alpha_{31})$ im Mittel 8,0 mg pro Millimeter. Diese Zahl stellt somit

den Werth der Differenz der beiden Oberflächenspannungen, Kautschuk-Luft und Kautschuk-Wasser dar, wenn beide ihre normale Grösse erreicht haben. Diesen normalen Werth besitzt die Oberflächenspannung an der Trennungsfläche zweier Körper nicht sofort nach der Berührung, sondern erst einige Zeit, bei Wasser und Kautschuk 30—60 Secunden nachher.

Strassburg. Juli 1877.

II. *Ueber die akustische Abstossung; von V. Dvořák.*

I. Akustische Abstossung von Resonatoren, die nur an einer Seite offen sind. In einer früheren Mittheilung „Ueber die akustische Anziehung und Abstossung“ [1]) habe ich ausführlich durch theoretische Betrachtungen sowie durch Versuche nachgewiesen, dass im Schwingungsknoten einer Luftsäule, die stehende Schwingungen ausführt, die mittlere Druckänderung nicht gleich Null sein kann, sobald die Amplitude der Schwingungen nicht unendlich klein ist.

In einem einseitig offenen Resonator, etwa einem Cylinder, befindet sich an dem geschlossenen Ende ein Schwingungsknoten. Im Innern des Cylinders, nahe an der Schliessungswand desselben, herrscht daher ein grösserer Druck als ausserhalb jenseits der Schliessungswand in der ruhenden Luft, wie man sich durch ein empfindliches Manometer leicht überzeugen kann. Setzen wir voraus, dass zur Erzielung der Resonanz die Oeffnung

1) Pogg. Ann. CLVII. p. 42. In der angeführten Mittheilung ist auch die Abstossung von cylindrischen an beiden Enden offenen Resonatoren besprochen. Die Erklärung dieser Abstossung, welche auf einer ganz anderen Grundlage beruht, ist mir bis jetzt noch nicht vollständig gelungen.

des Cylinders der Schallquelle zugekehrt ist, so wird derselbe durch diesen inneren Ueberdruck von der Schallquelle abgestossen. Auf ähnliche Art können auch einseitig offene Resonatoren, welche nicht die Cylinderform besitzen, von der Schallquelle abgestossen werden.

Ich habe schon in der früher erwähnten Mittheilung die Mittel zur Beobachtung der akustischen Abstossung von Resonatoren angegeben. Da das dort beschriebene Verfahren nur eine geringe Empfindlichkeit bietet, habe ich es durch das folgende ersetzt.

Die dabei benutzten Resonatoren kann man sich leicht aus steifem, mit Gummi arabicum überzogenem Zeichenpapier herstellen. Die Papierresonatoren haben die Form eines Cylinders mit aufgesetzter kleiner Papierröhre *hf* (Taf. III Fig. 2 Form *A*), welche zum Stimmen dient. Dieses Röhrchen kann auch fehlen (Taf. III Fig. 2, Form B); dann ermöglicht eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Oeffnung *fg* das Stimmen. Ja, selbst eine cylindrische, an einem Ende offene Röhre (Taf. III Fig. 2 Form C) kann für unseren Zweck als Resonator dienen. Sehr gut eignen sich die kugelförmigen Resonatoren von Glas (Taf. III Fig. 2, Form D), die indess nur ein geübter Glasbläser so dünn herstellen kann, dass ihr Gewicht nicht grösser wäre als das von Papierresonatoren. Der Ton der Resonatoren wird durch schwaches Darüberblasen über die Oeffnung oder durch Beklopfen bestimmt.

Der Resonator wird mit Siegellack an dem Ende eines Holzleistchens befestigt, dessen anderes Ende als Gegengewicht ein durchbohrtes Stück Blei *O* (Taf. III Fig. 3) trägt, und das mittelst eines Glashütchens *H* auf eine scharfe Nadelspitze aufgesetzt ist.

Als Schallquelle nimmt man am besten das Resonanzkästchen einer Stimmgabel (Taf. III Fig. 3). Die Abstossung ist so stark, dass sie sich sogar bei einem gewöhnlichen Helmholtz'schen Messingresonator zeigte, welcher zusammen mit dem bleiernen Gegengewicht 142 g

wog[1]). Nur muss man sich zuerst bei jeder Stimmgabel überzeugen, ob die Luft des Resonanzkastens stark genug mitschwingt, was selbst bei einem genau abgestimmten Kasten nicht immer der Fall ist. Da nämlich die Elasticität der einzelnen, zu einem elastischen System vereinten Brettchen des Kastens nicht gleich ist, so können die Schwingungen dieser Wände dem Zustandekommen eines Schwingungsknotens an der hinteren Kästchenwand hinderlich sein. Dann wird die Luft im Kästchen nur sehr schwach mitschwingen. Von letzterem Umstande kann man sich jedoch sehr leicht überzeugen. Man stimmt zuerst den Kasten genau auf den Ton der Stimmgabel und beobachtet dann, ob durch theilweises Bedecken der Kastenöffnung der Ton auffallend geschwächt wird. Ist dieses nicht der Fall, so schwingt die Luft im Kasten nur sehr wenig mit, wenn auch der Ton der Stimmgabel sonst sehr kräftig wäre. Ich hatte z. B. zwei Kasten mit trefflich ausgeführten Stimmgabeln von Koenig (Schwingungszahl $n=256$ ganze Schwingungen), in welchen die Luft auf keine Art in starke Schwingungen gerathen wollte. Bei denselben hatte auf das Mitschwingen der Luft auch der Umstand einen grossen Einfluss, ob man die Schraubenmutter, welche die Stimmgabel auf dem Bretchen festhält, mehr oder weniger anzog.

Die Stimmgabel wird stets mit einem starken Bogen möglichst kräftig angestrichen, wobei das Kästchen mit zwei weichen Kautschukröhren unterlegt sein muss. Ich benutzte gewöhnlich eine a-Stimmgabel („La_3 officiel" von Koenig, $n=435$). Die Abstossung zeigte sich mit einem Glasresonator noch deutlich auf 10 cm Entfernung von der Kästchenöffnung; mit einer grossen C-Gabel (von Koenig, $n=128$), die über 10 Minuten lang tönte, auch

1) Man kann mit dem in Taf. III Fig. 3 dargestellten Apparate auch die akustische Anziehung zeigen, indem man den Resonator so aufstellt, dass er sein geschlossenes Ende der Kästchenöffnung zuwendet.

noch auf 20 cm Entfernung. Ueber die Maasse der verwendeten Resonatoren s. w. u.

Die Güte der Resonatoren kann man entweder durch die Verstärkung des Tones einer vorgehaltenen Stimmgabel oder danach beurtheilen, ob sie mit ihrer Mündung nahe vor die Kastenöffnung gebracht, den Ton auffallend schwächen [1]).

Von den Stimmgabelzinken allein eine Abstossung des Resonators zu erhalten, gelingt nicht, da dazu die Luftschwingungen ihrer Zinken zu schwach sind [2]). Ich bemühte mich schon früher vergeblich, von dem schwingenden Körper selbst ohne Zuhülfenahme der Resonanz die akustische Abstossung zu erhalten. Ich hängte nämlich einen kleinen Resonator an Fäden vor das Ende einer longitudinal schwingenden Glasröhre, welche zur Vergrösserung der schwingenden Fläche mit einem aufgesteckten Korkpfropf versehen war. Wahrscheinlich war das offene Ende des Resonators allzu nahe an dem Korkpfropfe, was eine Tonvertiefung desselben bewirken musste. Infolge dieser Verstimmung trat nicht mehr die akustische Abstossung, sondern akustische Anziehung ein [3]), welche wahrscheinlich unter allen Umständen wirksam ist, und welche nur dann nicht zur Geltung kommen kann, wenn ihr eine noch stärkere akustische Abstossung entgegenwirkt. Später erhielt ich jedoch die Abstossung ganz leicht mit einer grossen longitudinal schwingenden Glasröhre von 127 cm Länge und 27 mm Dicke, welche an einem Ende

1) Damit hängt vielleicht die Umwandlung der Luftschwingung im Kasten in Abstossungsarbeit zusammen. Die lebendige Kraft der Schallschwingungen verschwindet, um als Arbeit zum Vorschein zu kommen.

2) Vgl. die bereits angeführte Mittheilung in Pogg. Ann. CLVII. S. 42.

3) Die betreffenden Versuche sind ebenfalls in der schon mehrfach erwähnten Mittheilung beschrieben. An dem in Fig. 3 dargestellten Apparate kann man leicht die Abstossung in Anziehung verwandeln, wenn man die Oeffnung des Resonators mit Wachs verkleinert und so den Resonator verstimmt.

einen 46 mm breiten Korkpfropf trug. Einer von den benutzten Resonatoren war kugelförmig (Taf. III Fig. 3, Form D), ein anderer war einfach cylindrisch (Taf. III Fig. 3, Form C).

Aber auch mit einer kreisförmigen Chladni'schen Klangplatte (von Koenig, Durchmesser = 30 cm, Dicke = 2 mm) erhielt ich eine starke Abstossung. Ich liess die in verticaler Lage in ihrer Mitte befestigte Platte in sechs Abtheilungen schwingen, wobei sie einen Ton von 208 Schwingungen gab. Der Resonator war aus steifem Papier und hatte die Form *B* (Taf. III Fig. 1), $ab = 80$ mm, $cd = 140$ mm, $fg = 17$ mm, und befand sich mit seiner Oeffnung vor der Mitte eines Schwingungsbauches der Platte.

II. Das akustische Reactionsrad. Auf Grundlage der akustischen Abstossung von Resonatoren kann man leicht eine continuirliche Rotation erhalten, indem man vier möglichst leichte Papier- oder Glasresonatoren auf zwei sich unter einem rechten Winkel kreuzende Holzleistchen *op* und *rq* (Taf. III Fig. 4) befestigt, welche auf einem gläsernen Hütchen balancirt sind, so dass die Oeffnungen der Resonatoren alle nach einer Seite in tangentialer Richtung gekehrt sind. Das ganze kommt auf die in Taf. III Fig. 4 angedeutete Art vor die Oeffnung eines Stimmgabelkastens *K*. Das offene Ende *a* des Resonators 1 wird von *K* abgestossen, das geschlossene Ende *b* des Resonators 2 wird angezogen; jedoch trägt im allgemeinen die Anziehung nichts zur Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit bei, weil sie der Rotation entgegenwirkt, sobald der Resonator 2 um einen Bogen von etwa 45° von der Stelle gerückt ist. Man kann daher auch nicht mittelst der akustischen Anziehung eine continuirliche Rotation erzeugen, wovon ich mich selbst nach mehrfachen Versuchen überzeugt habe[1]). Der Resonator 1 geht durch

1) Ich setzte an die Stelle der Resonatoren in Taf. III Fig. 4 verticale Papierschaufeln, denen ich versuchsweise verschiedene Krümmungen ertheilte, ohne dass ich zu einem Resultate kam, trotzdem die akustische Anziehung auf eine einzelne Papierschaufel ziemlich stark war.

die Trägheit weiter und an seine Stelle kommt der Resonator 2, welcher wiederum abgestossen wird, u. s. f.

Eine ungemein schnelle Rotation erzielt man, wenn man als Schallquelle eine grosse Kundt'sche Röhre benutzt, vor deren eines geöffnetes Ende man ein kleines akustisches Reactionsrad stellt.

Der Ton erregende, longitudinal schwingende Glasstab der Röhre (Länge = 127 cm, Dicke = 27 mm, die halbe Wellenlänge seines Tones $\frac{\lambda}{2} = 10{,}5$ cm) ist an einem schweren Tische befestigt und ragt mit dem an seinem Ende angebrachten Korke nur auf eine gewisse Strecke in die Glasröhre *ln* hinein, welche auf einem eigenen Tischchen liegt, so dass ihr offenes Ende etwas über den Rand desselben hervorragt. Die Länge dieser Glasröhre war = 45 cm, die Länge der schwingenden Luftsäule mit Rücksicht auf die Correction am offenen Ende *m* war $= 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$, der innere Röhrendurchmesser war = 5 cm.

III. Die akustische Drehwage. Hängt man einen mit einem Resonator versehenen Holzstab an einem Drahte, ähnlich wie den Balken der Coulomb'schen Drehwage in einem Gehäuse (von Pappe u. dgl. m.) auf, welches auf der dem Resonator zugekehrten Seite eine Oeffnung hat, so kann man mittelst der Abstossung des Resonators durch eine Schallquelle die Stärke von Tönen gleicher Schwingungszahl unter einander vergleichen, indess müssen erst weitere Versuche die praktische Verwendbarkeit dieses Verfahrens zeigen. Als Schallquelle diente eine offene Pfeife, die den Ton *a* mit 435 Schwingungen gab. Damit der Luftstrom, welcher durch die Pfeife geht, nicht auf den am Balken der Wage angebrachten Resonator trifft, muss man die Pfeife genau im Schwingungsknoten in ihrer Mitte durchschneiden, und dort eine gut mit Glycerin durchweichte schlaffe Membran anbringen. Aber auch der Luftstrom, welcher aus

dem Mundloche der Pfeife herauskommt, könnte den Resonator treffen; dies verhindert man durch ein ziemlich weites Kästchen *s*, welches die Pfeife an ihrem Mundloch winddicht umgibt. Das Kästchen ist auf der vom Resonator abgewendeten Seite offen, um nicht dem Tone der Pfeife zu schaden. Die Pfeife wurde mit einem Koenig'schen, sehr gleichmässig wirkenden Blasbalge angeblasen.

Der Resonator muss von der Pfeifenöffnung *o* wenigstens 2—3 cm entfernt sein, um nicht die Tonhöhe der Pfeife zu verändern.

IV. Entstehung von Luftströmen durch Schall. Es lässt sich, wie ich schon einmal erwähnte, durch sehr einfache theoretische Betrachtungen beweisen, dass der mittlere Druck im Schwingungsknoten einer Luftsäule grösser ist als im Schwingungsbauche, und dass er vom Schwingungsknoten gegen den Bauch stetig abnimmt, vorausgesetzt, dass die Schwingungsweite nicht unendlich klein ist.

Es scheint nun, dass sich diese Ungleichheit des Druckes sofort ausgleichen müsste, dadurch, dass die Luft vom Knoten zum Bauche strömt. Es würde dann in der ganzen Luftsäule ein mittlerer Druck eintreten, der aber jedenfalls grösser wäre, als der Druck in der ruhenden Luft. Infolge dessen müsste die Luft aus einer Oeffnung des Gefässes, in welchem sie die stehenden Schwingungen ausführt, ausströmen. Mir ist es bis jetzt nicht gelungen, den ganzen Vorgang vollkommen klar zu stellen, denn es tritt die vollständige Ausgleichung des Druckes in Wirklichkeit nicht ein. Es zeigt nämlich ein Manometer selbst im Schwingungsbauche stets einen kleinen Ueberdruck an, aber dieser Ueberdruck wächst stetig bis zum Knoten. Ausserdem zeigen alle meine bisherigen Versuche (l. c.), dass wenigstens in der Kundt'schen Röhre, wo die Luftschwingungen sehr heftig sind, eine Strömung der Luft von den Knoten zu den Bäuchen eintritt. Diese „Hauptströmung" dauert ebenso lange, als die Luft noch schwingt.

Daneben zeigen dieselben Versuche noch eine continuirliche secundäre Strömung, die ganz knapp an den Röhrenwänden fortgeht, und deren Richtung mit der Richtung der Hauptströmung entgegengesetzt ist. So befindet sich also die ganze Luft in der Röhre in einem Kreislaufe von den Knoten zu den Bäuchen und knapp an den Röhrenwänden wieder zurück zu den Knoten. Der Querschnitt der Hauptströmung ist beinahe ebenso gross, wie der Röhrenquerschnitt selbst, während der Querschnitt der secundären Strömung ein äusserst schmaler Ring ist.

Der im Knoten durch ein Manometer angezeigte Ueberdruck ist jedenfalls kleiner als der theoretisch berechnete Druck; denn bei der theoretischen Herleitung ist vorausgesetzt, dass die Luft nicht von dem Knoten wegströmt und dadurch theilweise den Druck wieder ausgleicht. Natürlich ist dann der Ueberdruck im Bauche ebenfalls nicht Null, wie es diese Theorie fordert[1]). Jedenfalls spielt bei diesen Erscheinungen die Reibung an den Wänden eine grosse Rolle.

Es lässt sich nach dem Gesagten erwarten, dass die Luft aus dem Behälter, in welchem sie stehende Schwingungen ausführt, ausströmen wird. Vorerst zeigt das Manometer, dass in der Ebene der Oeffnung eines Resonators der Ueberdruck nicht gleich Null ist (l. c.), und zwar deshalb, weil noch ein Theil der Luft nahe vor der Oeffnung des Resonators an der stehenden Schwingung theilnimmt, und überdies, weil selbst im Bauche der stehenden Schwingung sich ein kleiner Ueberdruck zeigen muss. Es ist nicht zu bezweifeln, dass eine theilweise Ausgleichung des Druckes bei der Oeffnung eintreten wird; die Versuche

1) Ich machte in meiner mehrfach erwähnten Mittheilung die Bemerkung, dass man aus dem durch das Manometer gemessenen Ueberdrucke im Knoten die Grösse der Excursionen berechnen könnte. Diese Bemerkung stützte sich auf die Voraussetzung, dass der theoretische Druck gleich sei dem durch das Manometer gemessenen, was nach obiger Auseinandersetzung offenbar nicht der Fall ist.

zeigen ausserdem, dass ein fortdauerndes Ausströmen der Luft eintritt, welches dann wahrscheinlich wie bei der Kundt'schen Röhre wieder durch eine secundäre, entgegengesetzt gerichtete Strömung ausgeglichen wird.

Das Ausströmen der Luft kann man leicht auf folgende Art nachweisen. Man stelle einen kugelförmigen, gläsernen Resonator vor den Resonanzkasten einer Stimmgabel. Füllt man den Resonator mit Tabaksrauch und streicht die Gabel kräftig an, so strömt der Rauch mit Heftigkeit aus dem Resonator. Deshalb nannte ich auch die ad II erwähnte Vorrichtung akustisches Reactionsrad.

Sehr gut lässt sich auch der aus einem Resonator herausdringende Luftstrom mit der obenerwähnten Chladni'schen Klangplatte zeigen. Auf die Platte wird Lycopodium gestreut, welches sich beim Tönen der Platte auf jedem Schwingungsbauche in einem kleinen Häufchen ansammelt. Hält man die Oeffnung einer Kochflasche oder besser eines Resonators von der Form *B* Taf. III Fig. 2 über ein solches Häufchen, so wird das Lycopodium augenblicklich im Kreise herum weggeblasen, und man kann dasselbe nach jeder Richtung hin wegfegen, wenn man dem Resonator nach Bedarf eine verschiedene Neigung ertheilt. Gerade die entgegengesetzte Wirkung hat eine Glasplatte, die man nahe über einem Häufchen Lycopodium hält; das Häufchen zieht sich nämlich zusammen und wird kleiner.

Es ist mir gelungen, noch auf eine andere Art durch Schall verhältnissmässig starke Luftströme zu erzeugen. Eine Erklärung dieser wahrscheinlich ziemlich verwickelten Erscheinungen habe ich bis jetzt noch nicht gefunden.

Ich setzte an die Oeffnung der schon beschriebenen grossen Kundt'schen Röhre einen Trichter aus steifem Papier mit seiner weiteren Oeffnung. Die Grösse dieses Trichters kann beliebig sein; jedoch ist die Wirkung am stärksten, wenn der Trichter als beiderseits offener Resonator denselben Ton gibt, wie die Kundt'sche Röhre; seine

Kantenlänge ist dann 90 mm, der Durchmesser seiner Oeffnungen resp. 37 und 7 mm.

Fängt die Kundt'sche Röhre kräftig zu tönen an, so dringt aus dem engen Ende des Trichters ein Luftstrom von solcher Stärke, dass er auf 20 cm Entfernung ganz leicht eine Kerzenflamme auslöscht. Man spürt den Luftstrom ganz gut mit dem Finger, und derselbe dringt mit einem eigenthümlichen Geräusche aus der Trichteröffnung.

Auch ein Cylinder von der Weite der Kundt'schen Röhre, der an der ihr zugekehrten Seite offen, auf der abgekehrten bis auf eine kleine Oeffnung geschlossen ist, kann die Stelle des Trichters vertreten, nur ist der herausdringende Luftstrom natürlich viel schwächer. Trotzdem kann er ein kleines Rad mit verticalen Papierflügeln (Taf. III Fig. 5) bewegen.

Bei den Versuchen mit der Stimmgabel ist es jedoch unumgänglich nothwendig, dass der Trichter genau denselben Ton gibt, wie die Stimmgabel, sonst ist der Luftstrom zu schwach. Die Dimensionen des Trichters sind für die a-Stimmgabel ($n = 435$): Kantenlänge 373 mm Durchmesser der Oeffnungen 82 und 3 mm. Die enge Oeffnung muss hinreichend klein sein, wenn der Luftstrom merklich sein soll.

Nach Beendigung dieser Abhandlung erhielt ich von Hrn. Dr. R. Koenig die freundliche Mittheilung, dass schon Hr. Alfred Mayer in New-York durch Schall eine continuirliche Rotation bewerkstelligt habe. Die Mittheilung lautet wie folgt: „Prof. A. Mayer zeigte mir im Sommer des vorigen Jahres ein ganz ähnliches Experiment. Er hängte zwei an einem Stabe befestigte, grössere, gut gestimmte Flaschen an einem Faden auf und brachte das ganze durch eine Stimmgabel zum Drehen. Ich theilte ihm infolge dessen mit, dass Sie schon Repulsionserscheinungen an Resonatoren nachgewiesen hätten, denn er kannte Ihren Aufsatz „Ueber akustische Anziehung und Abstossung“ nicht.“

Maasse der verwendeten Resonatoren und Reactionsräder (in Millimetern).

Nr. 1. Stimmgabel C, $n = 128$. Der Glasresonator hatte die Form E (Fig. 2) $ab = 90$; $hi = 25$; $hk = 20$; $hf = 33$; $fg = 8$. Sein Gewicht sammt dem bleiernen Gegengewichte betrug 70 g.

Nr. 2. Stimmgabel a, $n = 435$. a) Der Glasresonator, welcher zu dem in Fig. 3 dargestellten Versuche verwendet wurde, sowie zur Nachweisung des Luftstromes vermittelst Rauch, hatte die Form D (Fig. 2): $ab = 58$; $hf = 22$; $fg = 10$.

b) Die Glasresonatoren des akustischen Reactionsrades hatten die Form D: $ab = 34$; $hf = 12$; $fg = 3$. Die Länge der Querarme, von der Mitte des Glashütchens bis zur Mitte des Resonators war $= 52$; das Gewicht des ganzen Rades war $= 23$ g.

c) Die Papierresonatoren des akustischen Rades in Fig. 4 hatten die Form A (Fig. 2): $ab = 34$; $cd = 50$; $hf = 6$; $fg = 9$. Die Länge der Querarme war $= 65$, das Gewicht des ganzen Rades war $= 9$ g.

Nr. 3. Die Kundt'sche Röhre, $\frac{\lambda}{2} = 105$. Die Glasresonatoren des akustischen Rades hatten die Form D (Fig. 2) $ab = 24$; $hf = 2$; $fg = 7$. Die Länge der Querarme war $= 30$.

Auffallend ist, dass auch ungemein kleine Resonatoren einen tiefen Ton geben können. So verwendete ich bei der a-Stimmgabel einen Glasresonator von der Form D (Fig. 2), bei welchem $ab = 24$; $hf = 14$; $fg = 1$ war. Sein Rauminhalt war etwa 90mal kleiner als der Rauminhalt des Stimmgabelkastens, auf dessen Ton der Resonator gestimmt war. Trotzdem der Resonator so klein war, so zeigte er doch die akustische Abstossung.

Agram, den 19. November 1877.

III. *Theorie der normalen und anomalen Dispersion; von E. Lommel.*

In einer vorausgegangenen Abhandlung[1]) habe ich eine Theorie der Absorption und Fluorescenz entwickelt, welche sich auf den einfachen Gedanken gründet, dass die Körpertheilchen durch einen periodischen Impuls, welchen sie von der in dem umgebenden Mittel fortgepflanzten Welle empfangen, in Bewegung gesetzt werden. Durch weitere Ausführung dieses Gedankens gelingt es, die Modificationen zu bestimmen, welche die Welle durch die Rückwirkung der Körpertheilchen erfährt, und hiermit Absorption, Fluorescenz, Brechung, normale und anomale Dispersion, Oberflächenfarbe und Dichroismus[2]) in ihrem Zusammenhange durch eine einheitliche Theorie zu umfassen.

In einem ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem seien x_0 und y die Coordinaten der gemeinsamen Gleichgewichtslage eines Körpertheilchens von der Masse m und der Aethermasse μ, welche mit demselben in Wechselwirkung tritt. Die Schwingungen der Körper- und Aethertheilchen denken wir uns parallel der x-Axe, die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Aetherwelle parallel der y-Axe.

Wir machen nun die Annahme, dass die gemeinsame Gleichgewichtslage, nach welcher Körper- und Aethertheilchen durch die elastischen Kräfte hingezogen werden, — man kann sich als Gleichgewichtslage etwa den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Massen m und μ vorstellen — ihren Ort im Raume unverrückt bewahre[3]). Bezeichnen wir alsdann mit x und ξ die Ab-

1) Wied. Ann. III. p. 251.

2) Die Theorie des Dichroismus werde ich in einer späteren Abhandlung mittheilen.

3) Im Gegensatz zu Sellmeier, welcher annimmt, dass sich der Gleichgewichtsort der Körpertheilchen selbst in Schwingungen befinde (Pogg. Ann. CXLV. p. 399).

scissen der Massen m und μ (resp. ihrer Schwerpunkte), so sind $(x-x_0)$ und $(x_0-\xi)$ ihre respectiven Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t.

Ertheilt nun das bewegte Mittel dem Körpertheilchen den periodischen Impuls:

$$-mf\sin(qt-\varphi)\,^{1}),$$

so muss nach dem Principe der Gleichheit von Action und Reaction auf die mit der Körpermasse m in Wechselwirkung befindliche Aethermasse μ die gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung einwirken. Wir erhalten daher neben der in der vorhergehenden Abhandlung bereits behandelten Bewegungsgleichung des Körpertheilchens:

$$(1)\qquad m\frac{\partial^2(x-x_0)}{\partial t^2}=-2km\frac{\partial(x-x_0)}{\partial t}-mp^2(x-x_0)-mf\sin(qt-\varphi)$$

für die Bewegung des Aethers die Gleichung:

$$(2)\qquad \mu\frac{\partial^2(x_0-\xi)}{\partial t^2}=\omega^2.\frac{\partial^2(x_0-\xi)}{\partial y^2}+mf\sin(qt-\varphi).$$

Ueber die Art der Wechselwirkung machen wir die Annahme, dass sie nach dem von Newton aufgestellten Reibungsgesetz [2]) erfolge, nämlich dem Unterschiede der Geschwindigkeiten der Körper- und Aethermasse proportional sei. Wir erhalten demnach, wenn wir mit 2ν den Reibungsindex bezeichnen, zur Bestimmung von ξ die Gleichung:

---

1) In der vorausgehenden Abhandlung „Theorie der Absorption und Fluorescenz", wo nur die Bewegung eines einzigen Körpertheilchens zu betrachten war, wurde die auf dasselbe wirkende periodische Kraft durch $-mf\sin qt$ ausgedrückt; hier, wo es sich um die Fortpflanzung der Bewegung durch eine Reihe von Theilchen handelt, muss begreiflicherweise unter dem Sinuszeichen noch der Phasenunterschied φ, welcher als Function von y zu betrachten ist, hinzugefügt werden.

2) O. E. Meyer hat in seinem „Versuch einer Erklärung der anomalen Farbenzerstreuung" (Pogg. Ann. CXLV. p. 80) eine ähnliche Hypothese zu Grunde gelegt, gelangte jedoch, da in seinen Gleichungen auf die Bewegung der Körpertheilchen nicht geeignete Rücksicht genommen ist, zu Formeln, welche mit der Erfahrung nicht im Einklange stehen.

$$(3) \qquad 2mv\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\right) = mf\sin(qt-\varphi),$$

deren Integration:

$$\xi = x - \frac{f}{2\nu q}\cos(qt-\varphi) - C$$

ergibt. Der Gleichung (1) aber wird, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt wurde, durch den Ausdruck:

$$x - x_0 = -\frac{f\sin\alpha}{2kq}\sin(qt-\varphi-\alpha)$$

genügt, wenn der Winkel α durch die Gleichung:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2-q^2}$$

bestimmt wird, worin q die Schwingungszahl der einfallenden Welle, p aber die Schwingungszahl [1]) des Körpertheilchens angibt, welche demselben eigen wäre, wenn er ohne Widerstand ($k=0$) schwingen könnte.

Wir erhalten demnach:

$$(5) \quad x_0-\xi = \frac{f\sin\alpha}{2kq}\sin(qt-\varphi-\alpha)+\frac{f}{2\nu q}\cos(qt-\varphi)+C.$$

Geschieht die Fortpflanzung in ebenen zur y-Axe normalen Wellen, so haben wir:

$$f = f'e^{-Ky} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{q}{c}y$$

zu setzen, wo K den Absorptionscoëfficienten, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen vorstellt. Substituiren wir mit Rücksicht auf diese Werthe von f und φ und unter der Annahme, dass die willkürliche Constante C von y unabhängig sei, den Ausdruck (5) in die Gleichung (2), so zerfällt sie in die beiden Gleichungen:

$$(6) \quad \frac{K^2}{q^2} - 2\frac{K}{q}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{k-\nu\sin^2\alpha}{\nu\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{1}{c^2} + \frac{\mu}{\omega^2}\left(1+\frac{2km}{\mu q\sin\alpha\cos\alpha}\right) = 0,$$

---

1) Die Schwingungszahlen sind eigentlich $\frac{q}{2\pi}$ und $\frac{p}{2\pi}$; ich erlaube mir aber, wo es auf die absoluten Werthe nicht ankommt, der Kürze wegen q und p selbst als Schwingungszahlen zu betrachten.

$$(7) \qquad \frac{K^2}{q^2} + 2\frac{K}{q}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{\nu \sin\alpha\cos\alpha}{k-\nu\sin^2\alpha} - \frac{1}{c^2} + \frac{\mu}{\omega^2} = 0,$$

aus welchen die zwei Unbekannten $\frac{K}{q}$ und $\frac{1}{c}$ leicht zu bestimmen sind. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ im freien Aether mit v, so liefert die Auflösung dieser beiden Gleichungen:

$$(8) \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2v^2}(\sqrt{P^2+Q^2} + P),$$

$$(9) \qquad \frac{K^2}{q^2} = \frac{1}{2v^2}(\sqrt{P^2+Q^2} - P),$$

worin P und Q die folgende Bedeutung haben:

$$(10) \qquad P = 1 + \frac{2km\nu}{\mu q}\cdot\frac{\nu\sin\alpha\cos\alpha}{k^2\cos^2\alpha + (k-\nu)^2\sin^2\alpha},$$

$$(11) \qquad Q = \frac{2km\nu}{\mu q}\cdot\frac{k-\nu\sin^2\alpha}{k^2\cos^2\alpha + (k-\nu)^2\sin^2\alpha}.$$

Führen wir in diese Ausdrücke mit Hülfe der Gleichung (4) statt des Winkels α die Schwingungszahlen p und q ein, so nehmen sie die folgende Gestalt an:

$$(10a) \qquad P = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu}\cdot\frac{p^2-q^2}{(p^2-q^2)^2 + 4(k-\nu)^2q^2},$$

$$(11a) \qquad Q = \frac{2\nu m}{\mu q}\cdot\frac{(p^2-q^2)^2 + 4k(k-\nu)q^2}{(p^2-q^2)^2 + 4(k-\nu)^2q^2}.$$

Die Grösse p repräsentirt, wie ich in der vorausgehenden Abhandlung gezeigt habe, diejenige Schwingungszahl, für welche die „moleculare Absorptionsgrösse“:

$$\frac{\sin^2\alpha}{4k^2}$$

oder:

$$\frac{q^2}{(p^2-q^2)^2 + 4k^2q^2}$$

ihr Maximum erreicht, und entspricht im Spectrum derjenigen Stelle, welche der Absorptionsstreif in sehr dünner Schicht oder bei grosser Verdünnung der absorbirenden Substanz einnimmt. Bezeichnen wir mit λ_0 die zugehörige

Wellenlänge, und mit λ die Wellenlänge, welche der Schwingungszahl q der fortgepflanzten Welle zukommt, so ist:

$$p = \frac{2\pi v}{\lambda_0} \quad \text{und} \quad q = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dass der Brechungscoëfficient n aus dem leeren Raume in den betrachteten Körper durch das Verhältniss $\frac{v}{c}$ dargestellt wird, so erhalten wir aus Gleichung (8) die folgende Dispersionsformel:

$$(12) \quad \begin{cases} n^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{P^2 + Q^2} + P), \\ P = 1 + \frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon)^2 \cdot \dfrac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}, \\ Q = \frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon) \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \dfrac{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varkappa\varepsilon \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}, \\ \varkappa = \frac{k\lambda_0}{\pi v}, \qquad \varepsilon = \frac{(k - \nu)\lambda_0}{\pi v}. \end{cases}$$

Diese Formel gilt für jeden Körper, welcher nur aus Molecülen einer und derselben Art besteht, und nur einen einzigen, durch directe Absorption entstandenen Absorptionsstreifen besitzt. Sie enthält vier Constante, nämlich λ_0, $\frac{m}{\mu}$, $\varkappa$ und ε, und umfasst sowohl die normale als die anomale Dispersion.

Um den Gang der Werthe von n^2 bei wachsender Schwingungszahl zu verfolgen, setzen wir z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ oder $\frac{q}{p}$, und betrachten n^2 als Ordinate einer Curve, deren Abscissen z den Schwingungszahlen proportional sind.

Betrachten wir zuerst die Function:

$$P = 1 + \frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon)^2 \cdot \frac{1 - z^2}{(1 - z^2)^2 + \varepsilon^2 z^2}$$

für sich, so erkennen wir, dass dieselbe grösser als 1 ist, solange z kleiner als 1 (oder $\lambda > \lambda_0$, $q < p$) bleibt, für $z = 1$ (oder $\lambda = \lambda_0$, $q = p$) der Einheit gleich wird, für alle Werthe von z dagegen, die grösser als 1 sind, kleiner als 1 bleibt. Von dem Minimalwerth:

$$1 + \frac{m}{\mu}(x - \varepsilon)^2,$$

welchen sie bei $z = 0$ besitzt, erhebt sie sich bis zu einem Maximum:

$$1 + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{(x-\varepsilon)^2}{\varepsilon(2-\varepsilon)},$$

welches sie bei $z = \sqrt{1-\varepsilon}$ erreicht, fällt von hier wieder ab, und zwar um so steiler, je kleiner ε ist, durchsinkt bei $z = 1$ das Niveau 1, fällt weiter bis zu dem Minimum:

$$1 - \frac{m}{\mu} \cdot \frac{(x-\varepsilon)^2}{\varepsilon(2+\varepsilon)},$$

welches bei $z = \sqrt{1+\varepsilon}$ stattfindet, und erhebt sich von hier wieder, indem sie sich der Geraden, welche in der Höhe 1 parallel zur Abscissenaxe gezogen ist (dem Niveau 1), von unten her asymptotisch nähert (vergl. Fig. 1.)

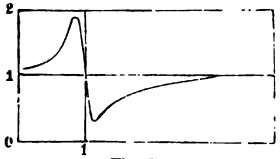


Fig. 1.

Dieses würde auch der Verlauf von n^2 sein, wenn Q gegen P vernachlässigt werden dürfte. Durch Hinzutreten des Gliedes Q wird der Gang der Curve beträchtlich für kleine, weniger für grosse Werthe der Schwingungszahl modificirt, und zwar derart, dass jetzt auch die Ordinatenaxe als Asymptote der Curve auftritt, indem die Curve zuerst aus dem Unendlichen bis zu einem zwischen $z = 0$ und $z = 1$ gelegenen Minimum (dessen Werth grösser als 1 ist) herabsinkt, von da bis zu dem ersten vor $z = 1$ gelegenen Maximum ansteigt, dann steil unter das Niveau 1 herabfällt, welches sie jedoch erst bei einem etwas hinter 1 gelegenen Werthe von z durchsinkt, alsbald ein zweites Minimum erreicht, welches kleiner als 1 ist, dann wieder

emporsteigt, und, nachdem sie das Niveau 1 ein zweites mal überschritten hat, sich über dasselbe zu einem zweiten Maximum erhebt, dann wieder herabsinkt und sich von oben her asymptotisch dem Niveau 1 nähert (vergl. Fig. 2). Die Curve zeigt, wenn ε nicht etwa Null ist (was in Wirklichkeit wohl niemals genau der Fall sein wird), ausser bei $z = 0$ nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit, und der Brechungscoëfficient n kann, da n^2 stets positiv bleibt, niemals imaginär werden.

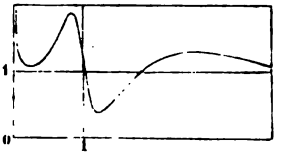


Fig. 2.

Aus diesem Verlaufe der Curve n^2 erklären sich alle Erscheinungen der Brechung und Zurückwerfung bei Körpern von der vorausgesetzten molecularen Beschaffenheit, d. i. bei solchen, welche nur aus Molecülen von einerlei Art mit einem einzigen, durch directe Absorption entstandenen Absorptionsstreifen bestehen. Das Verhalten von Lösungen und Mischungen wird weiter unten zur Sprache kommen.

Wir theilen die Curve in drei Abtheilungen, deren erste vom ersten Minimum bis zum ersten Maximum fortwährend steigt; die zweite Abtheilung umfasst das Absorptionsgebiet, in welchem die Curve vom ersten Maximum bis zum zweiten Minimum steil herabfällt; in der dritten Abtheilung steigt die Curve von ihrem tiefsten Punkte eine Strecke weit aufwärts, um sich hinter dem zweiten Maximum wieder zum Niveau 1 herabzusenken.

Liegt der Absorptionsstreif (das Maximum der molecularen Absorption, $z = 1$) innerhalb des sichtbaren Spectrums, so nimmt der Brechungscoëfficient vor dem Absorptionsstreifen mit wachsender Schwingungszahl bis zu einem Maximum zu, fällt innerhalb des Absorptionsgebiets rasch zu einem Minimum herab, um dann, anfangs rascher, später langsamer, wieder anzusteigen. Der betreffende Körper zeigt demnach anomale Dispersion. Hinter dem Absorptionsstreifen ist der Brechungscoëf-

ficient auf eine gewisse Strecke kleiner als 1; die Strahlen, welche dieser Strecke angehören, pflanzen sich also innerhalb der Substanz mit grösserer Geschwindigkeit fort, als im leeren Raume und in der Luft, und erleiden daher, aus der Luft auf die Oberfläche der Substanz fallend, jeder von einem gewissen Grenzwinkel ab, totale Reflexion. Diese total reflectirten Strahlen bilden die Oberflächenfarbe, deren eigenthümliche Polarisationsverhältnisse hierdurch ebenfalls ihre Erklärung finden. Der Zusammenhang zwischen directer Absorption, anomaler Dispersion, Oberflächenfarbe der Substanz im festen Zustande und Fluorescenz erster Art, auf welchen ich früher[1]) auf Grund experimenteller Ergebnisse hingewiesen habe, ist hiermit auch theoretisch klargelegt.

Die Metalle betrachte ich als Körper, für welche das sichtbare Spectrum in die dritte Abtheilung unserer Curve, der maassgebende Absorptionsstreif sonach in das ultrarothe Gebiet des Spectrums zu liegen kommt. Bei manchen derselben dürfte vielleicht das ganze sichtbare Spectrum demjenigen Theile der Curve angehören, welcher unter dem Niveau 1 bleibt. In einem solchen Körper würde sich das Licht schneller fortpflanzen als in der Luft, und die sogenannte Metallreflexion wäre ebenfalls als eine Art totaler Reflexion anzusehen. Hiermit stimmt überein, dass Quincke[2]) die Brechungscoëfficienten einiger Metalle (Silber und Gold) in der That kleiner als 1 gefunden hat.

Bei den Körpern endlich, welche die gewöhnliche Dispersion zeigen, fällt das ganze sichtbare Spectrum entweder in die erste Abtheilung unserer Curve (Absorptionsstreif im Ultraviolett), oder in diejenige Partie der dritten Abtheilung, welche über dem Niveau 1 ansteigt (Absorptionsstreif im Ultraroth), oder — und dies

1) Amtl. Bericht der Münchener Naturforscherversammlung 1877. Wied. Ann. III. p. 122.

2) Pogg. Ann. CXIX. p. 379. CXX p. 602.

st der allgemeinere Fall, der wohl am häufigsten eintritt — es gehört gewissermaassen beiden Abtheilungen zugleich an (Absorptionsstreifen sowohl im Ultraviolett als im Ultraroth). Man darf nämlich nicht vergessen, dass die Formel (12) unter der Voraussetzung, dass nur ein einziger Absorptionsstreif vorhanden sei, abgeleitet ist; sind mehrere solche vorhanden, so werden in der Curve n^2 mehrere Absorptionsgebiete je mit einem absteigenden Curvenstück und zwischen je zwei benachbarten Absorptionsgebieten ein aufsteigendes Curvenstück vorhanden sein, dessen über dem Niveau 1 gelegener Theil der normalen Dispersion entspricht. Dieser Umstand, dass mehrere Absorptionsstreifen vorhanden sein können, muss namentlich auch dann berücksichtigt werden, wenn es sich darum handelt, die Formel (12) mit den Ergebnissen der Beobachtung numerisch zu vergleichen. Dass sie schon in ihrer gegenwärtigen Gestalt hinsichtlich der gewöhnlichen Dispersion mit der Erfahrung im Einklange ist, ergibt sich einerseits daraus, dass sie sich in die Reihe:

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \ldots + \beta\lambda^2 + \ldots \tag{13}$$

entwickeln lässt, deren Coëfficienten aus den vier Constanten der Formel (12) zusammengesetzt sind, und welche bekanntlich mit den Beobachtungsresultaten nahe übereinstimmt, andererseits aus der directen Vergleichung, welche wir nun unter Zuhülfenahme vereinfachender Voraussetzungen vornehmen wollen.

Setzen wir nämlich voraus, dass Q^2 gegen P^2 vernachlässigt werden könne und ε verschwindend klein sei, so ergibt sich aus (12) die einfache Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \tag{14}$$

mit den zwei Constanten a und λ_0, welche sich den Beobachtungen genauer anschliesst, als die zweiconstantige Cauchy'sche Formel. Als Beispiel wählen wir die Berech-

nung der von Mascart beobachteten Brechungsverhältnisse des Flintglases von Rosette, indem wir unter Zugrundelegung der von Ångström bestimmten Wellenlängen die Constanten a und λ_0 aus den Brechungscoëfficienten für die Fraunhofer'schen Linien B und G ermitteln. Wir finden:

$$a = 1{,}543\,175 \qquad \text{und} \qquad \lambda_0 = 0{,}000\,130\,52 \text{ mm}.$$

In der folgenden Tabelle sind die beobachteten mit den nach Formel (14) berechneten Werthen zusammengestellt; die vierte Columne enthält die zugehörigen Differenzen, die fünfte die Differenzen, welche sich bei der Berechnung nach Cauchy's Formel ergeben[1]).

Flintglas von Rosette.

Spectrallinie.	n beobachtet.	n berechnet.	Differenz.	Differenz nach Cauchy's Formel.
B	1,612 68	1,612 680	0	0
C	1,614 43	1,614 447	+ 1,7	+ 9,2
D	1,619 29	1,619 390	+ 10,0	+ 36,1
E	1,625 69	1,625 903	+ 21,3	+ 54,4
F	1,631 48	1,631 727	+ 24,7	+ 52,6
G	1,642 69	1,642 690	0	0
H	1,652 68	1,652 677	− 0,3	− 92,0

Wir haben wiederholt betont, dass die obigen Formeln zunächst nur für solche Körper gelten, welche aus einerlei Art von Molecülen bestehen (also z. B. für das Cyanin in festem Zustande). Wir gehen jetzt zu dem Verhalten von Lösungen und Mischungen über, indem wir annehmen, dass die Aethermasse μ mit zwei verschiedenartigen Körpermassen m_1' und m_2', welchen die Schwingungszahlen p_1 und p_2 zugehören, in Wechselwirkung trete. Statt der

1) Die Zahlen der fünften Columne sind Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, 3. Aufl. Bd. II. p. 140, entnommen.

Gleichung (1) erhalten wir nun zwei Gleichungen derselben Form, und in der Gleichung (2) für die Bewegung des Aethers erscheint jetzt zur Rechten die Summe der beiden auf m_1' und m_2' ausgeübten Impulse. In derselben Weise behandelt wie oben liefern diese Gleichungen [1]) für das Brechungsverhältniss n und den Absorptionscoëfficienten K der Lösung oder Mischung Ausdrücke von derselben Form wie (8) und (9), nämlich:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{P^2 + Q^2} + P),$$

$$K^2 = \frac{\varrho^2}{2v^2}(\sqrt{P^2 + Q^2} - P).$$

Darin haben aber P und Q jetzt die folgende Bedeutung:

$$(15) \qquad \begin{cases} P = P_1' + P_2' - 1, \\ Q = Q_1' + Q_2', \end{cases}$$

wo P_1', P_2' und Q_1', Q_2' genau die nämliche Form besitzen wie P und Q in (12), nur dass an die Stelle von m, $\varkappa$, ε resp. m_1', $\varkappa_1'$, ε_1' und m_2', $\varkappa_2'$, ε_2' treten, und statt der Wellenlänge λ_0 resp. die den Schwingungszahlen p_1 und p_2 entsprechenden Wellenlängen zu setzen sind. Wir haben also:

$$P_1' = 1 + \frac{m_1'}{\mu}(\varkappa_1' - \varepsilon_1')^2 R_1',$$

$$P_2' = 1 + \frac{m_2'}{\mu}(\varkappa_2' - \varepsilon_2') R_2',$$

wenn mit R der von der Wellenlänge abhängige Factor bezeichnet wird. Die Grössen m_1' und m_2' sind den Gewichtsverhältnissen, mit welchen jeder der beiden Stoffe in die Mischung eingeht, oder dem Concentrationsgrade einer jeden Substanz proportional. Lassen wir z. B. die Menge der zweiten Substanz immer mehr abnehmen und endlich verschwinden, so wird $m_2'=0$, $P_2'=1$, während m_1', $\varkappa_1'$, ε_1', R_1' und sonach auch P_1' diejenigen Werthe m_1, $\varkappa_1$, ε_1, R_1 und P_1 erreichen, welche der reinen ersten Substanz entsprechen.

---

1) Eine ausführlichere Darlegung des Verhaltens von Lösungen und Mischungen sei für eine spätere Mittheilung vorbehalten.

Betrachten wir nun die Lösung eines Stoffes, welcher für sich allein anomale Dispersion zeigt, in einem normal dispergirenden Lösungsmittel, so ist für die Lösung:

$$P = 1 + \frac{m_1'}{\mu}(\varkappa_1' - \varepsilon_1')^2 R_1' + \frac{m_2'}{\mu}(\varkappa_2' - \varepsilon_2')^2 R_2'.$$

Hierin ist R_1' stets positiv, R_2' dagegen wird hinter dem Absorptionsstreifen negativ. Der Werth von P wird jedoch daselbst nur dann unter die Einheit herabsinken, wenn m_2' so gross ist, dass das mit R_2' behaftete Glied das mit R_1' behaftete Glied an absolutem Werthe übertrifft. Der Brechungscoëfficient n der Lösung kann demnach nur bei starker Concentration kleiner als 1 werden. Lösungen von Substanzen, welche im festen Zustande mit Oberflächenfarben ausgestattet sind, zeigen daher bei gewöhnlichen Concentrationsgraden keine Oberflächenfarbe; nur stark concentrirte Lösungen sind einer solchen fähig, zeigen dieselbe aber erst bei grösseren Einfallswinkeln als die feste Substanz. Farbige Gläser (Kupferoxydulglas, Kobaltglas u. s. w.) sind als wenig concentrirte Mischungen stark absorbirender Silicate mit farblosem Glasfluss zu betrachten, und zeigen daher keine Oberflächenfarbe.

Dagegen zeigt die Lösung eines Stoffes, der innerhalb des sichtbaren Spectrums einen durch directe Absorption entstandenen dunkeln Streifen besitzt, stets anomale Dispersion, da die Curve P sich hinter dem Absorptionsstreifen eine Strecke weit unter die Curve P_1' herabsenkt.

Um unsere Theorie auch hinsichtlich der anomalen Dispersion mit der Erfahrung zu vergleichen, stehen überhaupt nur Beobachtungen an Lösungen zu Gebote; und da die Formeln vorläufig nur für solche Körper gelten, welche einen einzigen Absorptionsstreifen besitzen, so sind wiederum nur die von Kundt[1]) bei Cyaninlösungen gewonnenen Resultate zu unserem Zwecke verwendbar. Vor

1) Pogg. Ann. CXLV. p. 73.

allem aber müssen wir bestrebt sein, der Formel (15) eine für bequeme Rechnung geeignete Gestalt zu geben.

Wenn die Concentration nur gering ist, so kann in dem Ausdruck für n^2 die Grösse Q^2 gegen P^2 vernachlässigt werden; nehmen wir ferner an, dass ε verschwindend klein sei, und setzen wir einstweilen z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$, so erhalten wir:

$$P_2 = 1 + \frac{\gamma}{1-z^2};$$

nehmen wir ferner für das normal dispergirende Lösungsmittel von der Entwickelung (13) nur die beiden ersten Glieder, so ist:

$$P_1 = a + \beta z^2,$$

und demnach zufolge (15) für die Lösung selbst, wenn wieder $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ statt z gesetzt wird:

$$n^2 = \alpha + \beta \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \tag{16}$$

Darin bedeutet λ_0 die Wellenlänge, bei welcher das Maximum der molecularen Absorption stattfindet, oder bei welcher in sehr dünner Schicht oder in sehr verdünnter Lösung der Absorptionsstreif auftritt. Die Constante λ_0 kann daher direct durch Beobachtung gefunden werden. Ich bestimmte dieselbe mit Hülfe eines Gitters für eine sehr verdünnte Cyaninlösung, welche sich in einem Glastroge vor dem Spalte des Spectrometers befand, indem ich auf die Mitte des nun ganz schwach und schattenartig erscheinenden Absorptionsbandes einstellte. Es ergab sich $\lambda_0 = 0{,}00059$ mm. Aus der Reihe der beobachteten Brechungscoëfficienten brauchen daher nur noch die drei Constanten α, β und γ berechnet zu werden. Die folgende Tabelle (p. 352) enthält, unter Zugrundelegung der Wellenlängen von Ångström, die Resultate der Rechnung für die Cyaninlösung von 1,22 Proc.; in der zweiten Columne stehen die von Kundt beobachteten, in der dritten die

berechneten Brechungscoëfficienten, in der vierten die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen. Zur Berechnung der Constanten α, β und γ wurden die Fraunhofer'schen Linien A, C und G benutzt.

Cyaninlösung 1,22 Procent.

$\alpha = 1{,}844\,111 \quad \log\beta = 8{,}439\,178\,0 - 10 \quad \log\gamma = 7{,}440\,822\,3 - 10$

$\lambda_0 = 0{,}00059$ mm.

Spectrallinie.	n beobachtet.	n berechnet.	Differenz.
A	1,3666	1,36660	0
a	1,3678	1,36789	+ 0,9
B	1,3691	1,36928	+ 1,8
C	1,3714	1,37140	0
E	1,3666	1,36664	+ 0,4
b	1,3675	1,36762	+ 1,2
F	1,3713	1,37070	− 6,0
G	1,3757	1,37570	0
H	1,3793	1,37956	+ 2,6

Die Rechnung stimmt danach mit der Beobachtung in sehr befriedigender Weise überein. Da die Formel (16) unter der Voraussetzung geringer Concentration abgeleitet ist, so werden wir, wenn wir sie auf eine stark concentrirte Lösung anwenden, eine ebenso befriedigende Uebereinstimmung nicht erwarten dürfen. Gleichwohl stimmt die für Kundt's concentrirte Cyaninlösung durchgeführte Berechnung, wie die Tabelle a. d. folg. S. zeigt, noch sehr gut mit der Beobachtung, mit Ausnahme des Werthes für E, welcher zu klein ausfällt, weil bei grösseren Werthen von γ die Näherungsformel (16) in dem unmittelbar hinter dem Absorptionsstreifen liegenden Gebiet nothwendig kleinere Zahlenwerthe liefert als die vollständige Formel (12). Der Theorie zufolge muss λ_0 für einen und denselben Stoff stets den nämlichen Werth behalten, während die (ebenfalls aus den Fraunhofer'schen Linien A, C und G berechneten)

Constanten α, β und γ, als von der Concentration abhängig, andere Werthe besitzen wie vorhin.

Concentrirte Cyaninlösung.

$\alpha = 1{,}847\,195 \quad \log\beta = 8{,}505\,723\,0 - 10 \quad \log\gamma = 7{,}882\,994\,3 - 10$
$\lambda_0 = 0{,}000\,59$ mm.

Spectrallinie.	n beobachtet.	n berechnet.	Differenz.
A	1,3732	1,37320	0
a	1,3756	1,37560	0,0
B	1,3781	1,37841	+ 3,1
C	1,3831	1,38310	0
E	1,3658	1,36282	− 29,8
F	1,3705	1,37050	0,0
G	1,3779	1,37790	0
H	1,3821	1,38292	+ 8,2

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Absorptionscoëfficienten K, welcher durch die Gleichung:

$$K^2 = \frac{q^2}{2v^2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} - P\right) \tag{9}$$

gegeben ist, in der die Grössen P und Q dieselbe Bedeutung haben wie in (12). Entwickeln wir, unter der Annahme, dass $Q^2 < P^2$ sei, die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatz und setzen $\frac{2\pi v}{\lambda}$ statt q, so wird:

$$K^2 = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{Q^2}{P}\left(1 - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{Q^2}{P^2} + \ldots\right),$$

oder, wenn $\frac{Q}{P}$ so klein ist, dass man seine zweite Potenz gegen die Einheit vernachlässigen kann:

$$K^2 = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{Q^2}{P}.$$

In dem Ausdrucke für Q (12) ist der Factor:

$$\frac{(1-z^2)^2+\varkappa\varepsilon z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}$$

von der Einheit jedenfalls nur wenig verschieden; setzen wir denselben $=1$, so wird:

$$\frac{\pi^2}{\lambda^2}Q^2=\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{\pi^2}{\lambda_0^2}.$$

Andererseits können wir, wenn $\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2$ klein ist,

$$\frac{1}{P}=1-\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}$$

setzen, so dass wir für K^2 die Näherungsformel:

$$(17)\quad K^2=\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\frac{\pi^2}{\lambda_0^2}\left(1-\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}\right)$$

erhalten, wo z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ steht. Der Gang der Werthe von K^2 ist demnach, unter den gemachten Voraussetzungen, aus dem oben bereits besprochenen Verlaufe der Function P unmittelbar zu entnehmen. Denken wir uns K^2 als Ordinate einer Curve, deren Abscissen z den Schwingungszahlen proportional sind, so sinkt diese Curve anfangs von dem bei $z=0$ stattfindenden Maximum bis zu einem etwas vor der Stelle der grössten molecularen Absorption ($z=1$, $\lambda=\lambda_0$, $q=p$) bei $z=\sqrt{1+\varepsilon}$ gelegenen Minimum, steigt von hier aus steil empor bis zu einem nahe hinter $z=1$, nämlich bei $z=\sqrt{1+\varepsilon}$ liegenden Maximum, und sinkt von da wieder herab, indem sie sich dem Niveau:

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\frac{\pi^2}{\lambda_0^2},$$

welches höher liegt als der bei $z=0$ vorhandene Gipfel der Curve, asymptotisch nähert.

Um die Vertheilung der Lichtstärke innerhalb des Absorptionsspectrums kennen zu lernen, berechnen wir die Intensität J des durch eine absorbirende Schicht von der

Dicke y durchgegangenen Lichtes. Dieselbe findet ihren Ausdruck durch die Gleichung:

$$J = \tfrac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dt.$$

Nach Gleichung (5) aber haben wir:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{f \sin \alpha}{2k} \cos(qt - \varphi - \alpha) + \frac{f}{2\nu} \sin(qt - \varphi)$$

und:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{f^2}{8\nu^2}\left(1 - \frac{k^2 - (k-\nu)^2}{k^2} \sin^2\alpha\right) + \frac{f^2 \sin^2\alpha}{8k^2} \cos(2qt - 2\varphi - 2\alpha)$$

$$- \frac{f^2 \sin \alpha}{4k\nu} \sin(2qt - 2\varphi - \alpha) - \frac{f^2}{8\nu^2} \cos(2qt - 2\varphi).$$

Integriren wir diesen Ausdruck zwischen den angegebenen Grenzen, indem wir T gleich der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{q}$ nehmen, so ergibt sich:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dt = \frac{f^2}{8\nu^2}\left(1 - \frac{k^2 - (k-\nu)^2}{k^2} \sin^2\alpha\right).$$

Wir erhalten demnach, wenn wir:

$$f = f' e^{-Ky}, \qquad k = \frac{\pi v}{\lambda_0} \varkappa, \qquad k - \nu = \frac{\pi v}{\lambda_0} \varepsilon$$

einführen, die gesuchte Lichtstärke, wie folgt, ausgedrückt:

$$J = \tfrac{1}{2}\mu \frac{f'^2}{8\nu^2} e^{-Ky}\left(1 - \frac{\varkappa^2 - \varepsilon^2}{\varkappa^2} \sin^2\alpha\right). \tag{18}$$

Darin ist K der vorhin besprochene Absorptionscoëfficient, und die Grösse $\sin^2\alpha$ hat, wenn wir sie ebenfalls als Function der Wellenlänge darstellen, die folgende Bedeutung:

$$\sin^2\alpha = \frac{\varkappa^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varkappa^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}.$$

Durch diese Formel (18) ist die Lichtstärke im Absorptionsspectrum als Function der Wellenlänge für jede Dicke der absorbirenden Schicht und bei Lösungen für jede Concentration dargestellt. Abgesehen von dem constanten Multiplicator besteht der Ausdruck aus zwei Factoren, von denen der eine:

$$1 - \frac{\varkappa^2 - \varepsilon^2}{\varkappa^2} \sin^2 \alpha$$

die in der vorigen Abhandlung voszugsweise betrachtete moleculare Absorption darstellt, welche sich in sehr dünner Schicht (wenn y verschwindend klein ist) oder bei sehr grosser Verdünnung (wenn $\frac{m}{\mu}$ und demnach K verschwindend klein ist) allein geltend macht. Die Stelle, welche das Maximum der molecularen Absorption im Spectrum einnimmt ($\lambda = \lambda_0$, $q = p$), ist nur von der molecularen Constitution des absorbirenden Stoffes, niemals aber von der Beschaffenheit des Lösungsmittels oder anderen äusseren Umständen abhängig. Der andere Factor:

$$e^{-Ky}$$

dagegen repräsentirt die Schichtenabsorption, und fasst in sich die Einflüsse, welche von der Dicke der Schicht, der Concentration der Lösung und der Natur des Lösungsmittels herrühren. Handelt es sich nämlich um eine Lösung oder Mischung beliebig vieler Substanzen, so wird der Absorptionscoëfficient noch immer durch die Formel (9) bestimmt, nur dass jetzt P und Q analog wie in den Gleichungen (15) zusammengesetzt sind. Ein genaueres Eingehen auf diese Verhältnisse sowie auf manches andere, was in gegenwärtiger Skizze nur andeutungsweise berührt werden konnte, muss späteren Erörterungen vorbehalten bleiben.

Erlangen, im December 1877.

IV. *Zur quantitativen Spectralanalyse; von K. Vierordt.*

Als ich an dem Spectralapparat in den Jahren 1871 und 1873 diejenigen Veränderungen anbrachte, welche denselben aus dem Bereiche der blos qualitativen Untersuchungen hinausführen und zur Messung der Lichtstärke der einselnen Spectralbezirke, ganz vorzugsweise aber zur Photometrie der Absorptionsspectren und der dadurch ermöglichten quantitativen Bestimmung farbiger Körper befähigen sollten, war ich vor allem bedacht, die denkbar einfachsten, weil immer besten, Hülfsmittel für die vorliegenden Aufgaben in Anwendung zu bringen. Wenn es sich um die Photometrie irgend einer Stelle eines Absorptionsspectrums handelt, so wird wohl kaum eine einfachere und mit tadelloserer Exactheit herstellbare, für den Experimentator bequemere und auch dem weniger Geübten zugänglichere Vorrichtung denkbar sein, als die von mir empfohlene Theilung der beweglichen Platte des Eintrittsspaltes für das Licht in zwei Platten, die jede für sich durch eine besondere Mikrometerschraube bewegt werden. Der Eintrittsspalt wird dadurch in eine obere und untere Hälfte getheilt, denen zwei unmittelbar übereinander liegende Spectren entsprechen. Diese Spectren sind gleich lichtstark, wenn beide Spalthälften die gleiche Breite haben. Wird vor die eine Spalthälfte ein Licht absorbirender Körper gebracht, während durch die andere Spalthälfte die Lichtquelle ungehindert dringt, so muss das hellere reine Spectrum der Lichtquelle verdunkelt werden, bis es dieselbe Lichtstärke zeigt, wie das Absorptionsspectrum. Diese Verdunkelung geschieht durch Verschmälerung der betreffenden Hälfte des Eintrittsspaltes; die übrigbleibende Lichtstärke (einer bestimmten Stelle) des Absorptionsspectrums wird somit schnell und sicher durch die an der Schraubentrommel ablesbare Breite des verschmälerten Eintrittsspaltes gemessen.

Dass die Lichtstärke einer bestimmten Spectralregion der Breite des Eintrittsspaltes (innerhalb der von mir angewandten mässigen Breitedifferenzen) proportional sei, durfte ich — ganz abgesehen davon, dass diese Behauptung bekanntlich unbeanstandet war — aus folgenden Gründen annehmen:

1) Wenn ich die ursprüngliche Weite beider Spalthälften ein wenig abändere (gewöhnlich untersuche ich bei $^1/_5$ mm Breite des Eintrittsspaltes), so werden dadurch die Resultate der Absorptionsmessungen in keiner merklichen Weise influirt.

2) Wenn ich die vom Licht durchstrahlte Schicht der absorbirenden Substanzen oder die Concentration der gefärbten Lösung abändere, so entspricht die nunmehrige Absorption dem Absorptionsgesetz. Dazu kommt auch, wie sich nachträglich herausgestellt hat,

3) die werthvolle Erfahrung, dass die Benutzung von Spectralapparaten, die ein viel breiteres Spectrum, als dies bei meinem Instrumente der Fall ist, ergeben, zu genau denselben Resultaten geführt hat, wie ich sie gefunden habe. C. H. Wolf[1]), der mit einem Rutherford'schen Prisma arbeitete, welches ein beinahe doppelt so langes Spectrum gab, als das von mir benutzte Flintglasprisma, erhielt z. B. für *D* 11 *E* bis *D* 50 *E* des Spectrums der Chromalaunlösung ein „Absorptionsverhältniss" von 0,04560, während ich ein solches von 0.04553 gefunden hatte.

Handelt es sich um starke Absorptionen, so verwende ich zunächst ein oder mehrere Rauchgläser, um das hellere Spectrum dem dunkleren ähnlich zu machen. Die völlige Gleichsetzung beider Spectren wird dann durch eine nachträgliche mässige Verschmälerung der einen Hälfte des Eintrittsspaltes hergestellt.

Zur chemischen Analyse sind übrigens die Rauchgläser[2]) entbehrlich, da ich die zu analysirende Flüssigkeit

1) Z. S. f. analyt. Chem. XVII. p. 65.

2) Die Anwendung der Rauchgläser hält H. C. Vogel insofern

durch einen beliebigen (natürlich genau abgemessenen) Zusatz des farblosen Lösungsmittels derartig verdünne, dass die Lichtabsorption nur eine mässige ist.

Da durch die zunehmende Verschmälerung des Eintrittsspaltes das Spectrum zunehmend reiner wird und gesättigtere Farbentöne annimmt, so muss bei meiner Methode der Farbenton der jeweils mit einander zu vergleichenden, resp. gleich lichtstark zu machenden Spectren gewisse Verschiedenheiten bieten. Mein Apparat bringt also in der That keineswegs ausschliesslich Farben von absolut gleichen Wellenlängen zur Vergleichung, wie neuerdings von einigen Seiten[1]), freilich nur in ganz allgemeiner Weise und ohne jede nähere Angabe der Grösse des dadurch etwa begangenen Fehlers hervorgehoben worden ist.

Glan hat (sieben Jahre nach Publication meiner ersten Arbeit über Spectrophotometrie in Pogg. Ann. CXL. 1870) neuerdings ein Spectrophotometer beschrieben, in welchem in beiden Spectren jeweils nur Farben von genau gleichen Wellenlängen zur Vergleichung gebracht werden. Darin liegt, theoretisch genommen, ein Vorzug vor dem von mir angewandten Apparat, der jedoch, gegenüber dem Glan'schen, ganz abgesehen von seiner viel grösseren Einfachheit und Lichtstärke (ohne welche genaue Messungen im Violett und Blau nicht möglich sind), wieder den Vortheil bietet, dass das besonders werthvolle, durch das Centrum des Einfallsrohrs dringende Licht nicht, wie bei Glan's Instrument, ausgeschlossen bleibt.

H. C. Vogel hat unlängst den Glan'schen Apparat zu astrophotometrischen Zwecken verwendet.

---

für unbequem, weil die lichtschwächende Kraft jedes einzelnen Glases (deren man etwa 5 nöthig hat) für jeden einzelnen Spectralbezirk vorher ein für allemal bestimmt werden muss. Derartige Messungen sind aber sehr leicht ausführbar.

1) H. W. Vogel, praktische Spectralanalyse. Nördlingen 1877. p. 244. — H. C. Vogel, spectralphotometrische Untersuchungen. Berl. Monatsber. März 1877. — Glan, Wied. Ann. I. p. 351. 1877. — Hüfner, Kolbe J. XVI. 1877.

Jedes Photometer hat vor allem — und das ist die oberste, an dasselbe zu stellende Anforderung — die möglichste Genauigkeit in der Einstellung, d. h. Gleichmachung beider Lichter zu gewähren. H. C. Vogel erhielt an dem Glan'schen Apparat, indem er die Spectren von zwei an sich gleichen Lichtern gleich lichtstark zu machen suchte, einen mittleren Fehler einer Ablesung von 2,8%, im äussersten Roth und Violett sogar 5%. Bei G. Müller schwankte (nach Vogel's Angabe) der Fehler zwischen 1,2 und 2,8%, an meinem Apparat erhielt letzterer aber „eine ungleich grössere Genauigkeit", nämlich im Grün 0.61%, im Blau 0,75%. Wie gering der Einstellungsfehler bei meinem Doppelspalt ist, habe ich in meinen beiden Abhandlungen über quantitative Spectralanalyse erschöpfend nachgewiesen.

Ausserdem geht aus den von mir und Anderen ausgeführten Messungen hervor, dass die Lichtstärke des Spectrums der Weite des Eintrittsspaltes — innerhalb der mässigen Grenzen, in welchen die Spaltweite zu photometrischen Zwecken variirt werden muss — derartig entspricht, dass die kleineren Abweichungen von der Proportionalität kaum in Betracht kommen können.

Immerhin wäre es aber möglich, dass den Messungen mit meinem Apparat ein (in jedem Einzelbezirke) constanter Fehler anhaften würde, dessen Betrag unter den gegebenen Versuchsbedingungen nicht ermittelt werden könnte. Niemand wird es versuchen wollen, aus den Formeln, welche über den von der Spaltbreite abhängigen Grad der Reinheit (und Lichtstärke) des Spectrums aufgestellt worden sind, die Grösse des meinem Versuchsverfahren zu Grunde liegenden Fehlers auch nur annähernd berechnen zu wollen. Dazu fehlen die nothwendigsten empirischen Voraussetzungen, namentlich eine minutiöse Kenntniss der Lichtstärke der einzelnen Spectralbezirke, vor allem des (zur chemischen Analyse in erster Linie zu verwendenden) Petroleumflammenspectrums.

Die Frage kann somit nur durch das Experiment an

einem in dazu geeigneter Weise modificirten Spectralapparat zur sicheren Entscheidung gebracht werden.

Durch den hiesigen Mechaniker Albrecht liess ich einen Eintrittsspalt verfertigen, der auf jeder Seite von je zwei beweglichen Platten begrenzt ist. Jede dieser vier Platten wird durch eine besondere, mit graduirter Trommel versehene Mikrometerschraube bewegt. Bei unmittelbarer Berührung beider Plattenpaare befindet sich die Spaltlinie im verticalen grössten Durchmesser des Einfallsrohres. Die Einstellungen des linken [1]) Plattenpaares sollen im Folgenden durch das Vorzeichen —, die des rechten Plattenpaares durch + ausgedrückt werden, z. B. + 100 entspricht einer ganzen Umdrehung der rechtsseitigen, — 50 einer halben Umdrehung der linksseitigen Schraube [2]).

Einfluss der Verschmälerung des Eintrittsspaltes auf Farbenton und Helligkeit.

Stellt man die eine Hälfte des Eintrittsspaltes auf 0 bis + 100, die andere auf 0 bis — 100 ein (das erstere Spectrum soll als +, das zweite als — bezeichnet werden), so sind beide Spalthälften genau um ihre Breite (in meinem Falle um $^1/_5$ mm) gegenseitig verschoben. Dann ist das — Spectrum ein wenig nach rechts, das + Spectrum nach

1) „Links", vom Beobachtungsfernrohr aus gesehen.

2) Die Platten dürfen natürlich nicht über ihren Nullpunkt hinaus in die Region des entgegenstehenden Plattenpaares verschoben werden, am allerwenigsten aber, wenn die entgegenstehenden Platten selbst auf ihren Nullpunkt eingestellt sind. Um solche Irrungen ganz sicher zu vermeiden, ist an dem Handgriff jeder Mikrometerschraube ein längerer, senkrecht herabhängender Faden befestigt, dessen unteres Ende ein kleines Gewicht trägt. Von der Grundplatte, auf welcher die beweglichen Platten verschoben werden, geht rechts und links ein Messingstab senkrecht nach abwärts, auf welchem fünf Marken angebracht sind, die den Stellungen 0, 1, 2, 3 und 4 ganzer Schraubenumdrehungen entsprechen. Man kann somit immer controliren, innerhalb welcher Schraubendrehung die einzelnen Platten sich befinden. Ich kann diese Vorrichtung für jedweden sonstigen Spectralapparat als sehr bequem empfehlen.

links verschoben; beide Spectren sind gleich lichtstark, aber auf jede unendlich schmale, vertical durch beide Spectren gezogene Linie fällt in beiden Spectren jeweils Licht von etwas verschiedener durchschnittlicher Wellenlänge. Bringt man, wie es bei der Photometrie der Fall ist, einen bestimmten Spectralbezirk von mässiger Breite (durch meine Abwendungsvorrichtung im Ocular) zur Beobachtung, so hat man im + Spectrum jeweils einen Spectralbezirk von zusammengenommen ein wenig grösserer Brechbarkeit als in dem zur Beobachtung vorliegenden Bezirke des —Spectrums. Das Spectrum der Petroleumflamme zeigt dann folgende Erscheinungen.

In *A* bis *a* und darüber ist das —Spectrum dunkelroth, die im Sehfeld damit zusammenfallende Partie des +Spectrums aber hellroth. Beide Spectren zeigen überhaupt in dieser Region die grössten Unterschiede der Lichtstärke. Dieser Unterschied nimmt gegen *D* hin immer mehr ab und ist schon von *C* an nur durch genaue Messungen nachzuweisen. Störende Differenzen der Farbentöne kommen aber weder im Roth, noch in den beiden ersten Dritteln des Orange vor. In *G* 65 *D* bis *D* ist das —Spectrum orange, das +Spectrum mehr gelb, und die beiderseitige Lichtstärke nicht gut mit einander vergleichbar. Von *D* bis *D* 11 *E* ist das —Spectrum gelb und heller als das mehr grünliche +Spectrum. In *D* 11 *E* bis *D* 53 *E* ist das —Spectrum gelbgrün und heller, das +Spectrum grün. Von der Mitte zwischen *D* und *E* bis über *G* hinaus (die violette lichtschwache Region wurde nicht untersucht) kommen keine auffallenden Unterschiede der Farbentöne vor; das +Spectrum ist in dieser ganzen Region etwas dunkler als das —Spectrum.

Demnach ist das + Spectrum zwischen *A* bis fast *D* heller, wobei die Helligkeitsdifferenzen in der Richtung gegen *D* immer mehr abnehmen, während umgekehrt von *D* an gegen *H* das —Spectrum das hellere ist. Die eben erörterten extremen Versuchsbedingungen — welche trotzdem nur im Gelb zu störenden Unterschieden der

Farbentöne führen, kommen in der Spectrophotometrie nicht vor.

Wird die auf 0 bis +100 eingestellte Spalthälfte von 0 bis −100 erweitert, während die andere Spalthälfte, wie in obigen Versuchen, blos auf 0 bis −100 eingestellt ist, so entsteht im letzteren Fall eine Minderung des Lichtes auf die Hälfte. So grosse Spaltweiten (2 Trommelumdrehungen) kommen aber wiederum bei der Spectrophotometrie nicht oder nur ausnahmsweise vor. Unter diesen Umständen verschwindet übrigens selbstverständlich die bei der vorigen Versuchsanordnung störende Differenz der Farbentöne im Gelb.

Noch günstiger sind die Bedingungen, wenn man, wie in der spectrophotometrischen Praxis, der oberen Spalthälfte die Breite 100° (und zwar −20 bis 0 und 0 bis +80) gibt, während die untere Hälfte des Spaltes auf 0 bis −20° eingestellt ist. Man hat also eine grosse Differenz der Lichtstärken. Vor die obere Spalthälfte brachte ich zwei Rauchgläser, die zusammen durchschnittlich 16% Licht durchliessen. Die unter diesen Umständen zur Vergleichung kommenden Einzelbezirke beider Spectren zeigen keine, auch nur im geringsten störende Unterschiede der Farbentöne. Die völlige Gleichheit der Lichtstärke lässt sich durch weitere Veränderungen der von Anfang an schon verschmälerten Spalthälfte herstellen und zwar mit derselben Genauigkeit, wie bei der einfachen Gleichstellung beider, durch keine absorbirenden Körper verlegten Spalthälften. Immer ist es bei den Absorptionsmessungen in jedem Einzelbezirk eine ganz bestimmte Verschmälerung der das reine Spectrum der Lichtquelle projicirenden Spalthälfte, welche mit nur sehr geringen Abweichungen sich bei jeder Einzelmessung wiederholt.

Im ganzen Bereiche des Roth und Orange, sowie im Grün, Blau und Violett stören bei den Absorptionsmessungen die sehr wenig differenten Farbentöne gar nicht, wie eben die übereinstimmenden Einzelmessungen sicher

darthun. Nur in dem schmalen Bezirk des Gelb zeigen die Töne bei sehr starker Differenz der Spaltbreite einen grösseren Unterschied, der aber dem Geübten keine Schwierigkeit bereitet, wie wiederum die Uebereinstimmung der Einzelmessungen darthut. Verschmälerungen der Spaltbreite bis mehr als auf höchstens $^1/_6$ kommen aber bei der Photometrie nicht vor; indem in solchen Fällen, wie erwähnt, die Rauchgläser zur hauptsächlichen Lichtverminderung gebraucht werden.

Der Einwand, dass mein Doppelspalt bei den photometrischen Messungen keine Farben von genau gleichen Tönen zur Vergleichung bringe, ist somit ohne alle und jede praktische Bedeutung.

Experimentelle Bestimmung der Fehlergrösse der Lichtstärkemessungen mittelst der Verengerung der einen Hälfte des Eintrittsspaltes.

Die vier beweglichen Platten des Eintrittsspaltes gestatten die erforderlichen Versuchsanordnungen, um die Fehlergrösse der mit meinem bisherigen Spectrophotometer gemachten Lichtstärkebestimmungen genau zu bestimmen, beziehungsweise durch eine passende Abänderung am Eintrittsspalt den an sich schon sehr kleinen Fehler zum Verschwinden zu bringen.

Die Lichtstärkeveränderungen wurden bei meiner bisherigen Methode durch Verschmälerung der einen Spalthälfte ausschliesslich an ihrem rechten Rand zu Stande gebracht; benutzt man zur Spaltveränderung nur den linken Spaltrand, so wird ein dem vorigen entgegengesetzter Fehler eingeführt. Ich werde später zeigen, dass beide, mit verschiedenen Vorzeichen versehenen Fehler gleich gross sind. Man kann aber auch den Versuch so stellen, dass der Fehler gar nicht zum Vorschein kommen kann, so dass die Ablesung unmittelbar am Apparat der geringen Correctur nicht bedarf, die sonst nöthig wäre. Aus dem Gesagten ergeben sich die drei sich controlirenden Versuchsanordnungen I. II und III. In jeder der

letzteren könnten die Versuchsbedingungen wiederum auf das mannichfaltigste variirt werden; ich wählte zur Prüfung als Beispiel einen Licht schwächenden Körper von constanter Beschaffenheit, ein Rauchglas.

Die ursprüngliche Breite beider Spalthälften ist (wie bei der Spectrophotometrie überhaupt) immer = 100 (1 Trommelumdrehung = $^1/_5$ mm). Die eine Spalthälfte wird mit dem Rauchglas verdeckt; man hat also dem Spectrum der reinen Lichtquelle durch Verschmälerung des betreffenden Eintrittsspaltes dieselbe Lichtstärke zu geben wie dem Absorptionsspectrum des Rauchglases.

I. Anwendung meiner bisherigen Methode; also linke Platte auf 0 gestellt, beide rechten auf +100. Die Gleichsetzung des reinen Spectrums der Lichtquelle mit dem Absorptionsspectrum geschieht durch Verschmälerung ausschliesslich am rechten Spaltrand (Reihe *a* der Tabelle p. 368 enthält die bezüglichen Lichtstärkebestimmungen in verschiedenen Bezirken des Spectrums des Rauchglases).

II. Bei dem gegentheiligen Verfahren werden beide rechten Platten auf 0 gestellt, beide linken auf −100. Die Gleichstellung geschieht mittelst Bewegung der einen linken Platte (siehe Reihe *b* der Tabelle).

III. Diese beiden Verfahren würden an sich schon hinreichen, um die Fehlergrösse kennen zu lernen; als weitere Controle dient die Anordnung, dass die vom Rauchglas verdeckte Spalthälfte auf 0 bis −50 und 0 bis +50 eingestellt wird. Man nimmt das Mittel (m) aus den Absorptionsmessungen I und II, stellt die linke Platte der freien Spalthäfte auf $\frac{m}{2}$ und bewirkt die völlige Gleichheit beider Spectren durch Einstellung (n) der rechten Platte. Somit ist die wahre Lichtstärke $= \frac{m}{2} + n$. Letzterer Werth (s. Reihe *c*) weicht aber in nicht merklicher Weise von dem (in Reihe *d* angegebenen) Mittelwerthe der Verfahren I und II ab; woraus folgt, dass dieser (oder auch der durch Methode III gewonnene) den richtigen Absorptionswerth darstellt.

Die Zahlen der Reihen *a*, *b* und *c* der Tabelle sind die Mittel aus je mindestens 10 Einzelmessungen, deren Wiedergabe ich schon der Kürze wegen und auch deshalb unterlassen kann, weil ich in meinen früheren Schriften von den immer nur sehr wenig von einander abweichenden Einzelmessungen häufig Beispiele gegeben habe.

Die *a*- und *b*-Werthe der Tabelle weichen (den rothen Bezirk ausgenommen) immer nur sehr wenig von einander ab. In der Region *A* bis $C\,^2/_3\,D$ ergeben die *a*-Werthe eine etwas geringere Lichtabsorption als die *b*-Werthe, so zwar, dass der Unterschied gegen *A* hin zunimmt und zwischen *A* bis $B\,^3/_4\,C$ nicht vernachlässigt werden darf. In dem Uebergangsbezirk *C* 71 *D* bis *D* ist kein Unterschied mehr nachweisbar. Von *D* an, in der Richtung gegen *H*, zeigen dagegen die *a*-Werthe eine wenig geringere Lichtabsorption als die *b*-Werthe.

Die in Reihe *d* berechneten Mittel der *a*- und *b*-Versuche weichen sehr wenig von den direct gefundenen *c*-Werthen ab. Nur eine, aus sehr zahlreichen Einzelmessungen bestehende Versuchsreihe, die jeweils bis auf mindestens $^1/_{200}$ richtige Endmittel ergeben würde, könnte vielleicht darüber entscheiden, ob zwischen den *c*- und *d*-Werthen ein wirklicher minimaler Unterschied besteht. Bei der Berechnung der Fehler gehe ich (in Reihe *e* und den folgenden) von den *d*-Werthen aus.

Im Interesse der quantitativen chemischen Spectralanalyse ist in Reihe *f* der Tabelle der Einfluss des Fehlers auf die Grösse des (dem Gehalt der Lösungen proportionalen) Extinctionscoëfficienten angegeben und zwar für die *a*-Werthe, welche nach meiner bisherigen Messungsmethode gewonnen sind. Reihe *f* gibt den absoluten Fehler der Extinctionscoëfficienten für die vorliegenden, über die absorbirende Kraft des Rauchglases angestellten Versuche. Die Extinctionscoëfficienten der *a*-Werthe habe ich weggelassen, sie können in der in meiner ersten Abhandlung über Spectralanalyse enthaltenen Tabelle der Extinctionscoëfficienten nachgeschlagen werden. Da, wie schon aus

der Vergleichung der *a*-, *b*-, *c*- und *d*-Werthe der Tabelle und anderen später zu erörternden Gründen hervorgeht, der *f*-Fehler der Weite des Eintrittsspaltes proportional ist, so kann, zur besseren Vergleichung der Fehler in den verschiedenen Spectralregionen, in Reihe *g* der relative Fehler des Extinctionscoëfficienten für $^1/_{100}$ Differenz beider Spectralweiten aufgestellt werden (d. h. Einstellung 100° der einen, 99° der anderen Spalthälfte)[1]).

Demnach wird der Messungsfehler der *a*-Werthe gefunden, wenn man die Grade, um welche die Trommel gedreht werden muss, um das hellere Spectrum dem Absorptionsspectrum gleich zu machen, mit dem betreffenden *g*-Werthe der Tabelle, sowie mit dem zu der beobachteten Lichtstärke gehörigen Extinctionscoëfficienten multiplicirt. Das Product wird in der Region *A* bis $C^3/_4$ *D* zu dem gefundenen Exstinctionscoëfficienten addirt, oder von *D* bis *H* von letzterem abgezogen[2]).

Wie gering die mit meiner bisherigen Methode verbundenen Messungsfehler sind, ergibt sich zwar schon aus den Tabellenwerthen überhaupt und den Zahlen der Reihe *g* insbesondere, noch besser aber aus der Reihe *h*, in welcher für die verschiedenen Spectralbezirke diejenige Verschmälerung des (ursprünglich auf 100°) gestellten Eintrittsspaltes angegeben ist, bei welcher der Extinctions-

---

1) Für die Fehlerberechnung wird ein Beispiel nicht überflüssig sein. In der *a*-Reihe ist im Bezirk *a* 37 *B* bis *B* die Lichtabsorption im Spectrum des Rauchglases 0,610 (Extinctionscoëfficient 0,21468); die wahre Lichtabsorption ist aber 0,583 (Extinctionscoëficient 0,23434). Also ist der Exstinctionscoëfficient um 0,01966 zu klein. Demnach ist der relative Fehler $\frac{0{,}01966}{0{,}21468} = 0{,}09158$. Bei der Absorptionsmessung wurde der Spalt auf 61° der Schraubentrommel eingestellt, also um 39 Grade bewegt. Also ist der relative Fehler des Extinctionscoëfficienten für $1^0 = 0{,}002348$.

2) Also haben wir in dem Beispiel der vorhergehenden Anmerkung $39 \times 0{,}002348 \times 0{,}21468 = 0{,}01966$. Demnach ist der richtige Exstinctionscoëficient $0{,}21468 + 0{,}01966 = 0{,}23434$, dem die wahre Lichtstärke 0,583 entspricht.

Spectralbezirk.	Lichtstärkemessung des Rauchglasspectrums bei der Einstellung: am rechten Spaltrand.	am linken Spaltrand.	an beiden Spalträndern zugleich.	Mittel von a und b.	Relativer Fehler bei a und b.	Fehler des beobachteten Extinctionscoëfficienten für die Versuche (a) am rechten Spaltrand. absolute Werthe.	in Bruchtheilen d. Extinctionscoëfficienten für 1° Drehung der Mikrometerschraube.	Einstellung des Eintrittsspaltes, bei welchem d. Extinctionscoëfficient einen Fehler von einem Hundertel erreicht hat.
	a	b	c	d	e	f	g	h
a 37 B — B	0,610	0.556	0,585	0,583	$\pm \frac{1}{21,6}$	— 0,01966	— 0,002348	99,7
B — B 55 C	0,530	0,497	0,515	0,513	$\pm \frac{1}{30,2}$	— 0,01416	— 0,001092	90,9
B 55 C — B 88 C	0,501	0,482	0,490	0,492	$\pm \frac{1}{54,7}$	— 0,00787	— 0,0005254	81,0
B 88 C — C 15 D	0,441	0,433	0,435	0,437	$\pm \frac{1}{109}$	— 0,00395	— 0,0001987	49,7
C 55 D — C 71 D	0,438	0.431	0,432	0,434	$\pm \frac{1}{109}$	— 0,00399	— 0,0001980	49,5
C 71 D — D	0,456	0,457	0,454	0,4565	nicht messbar.	0	0	—
D 15 E — D 30 E	0,455	0,461	0,457	0,458	$\mp \frac{1}{153}$	+ 0,00285	+ 0,0001529	34,7
D 39 E — D 66 E	0,438	0,441	0,440	0,439	$\mp \frac{1}{146}$	+ 0,00296	+ 0,0001469	31,9
E — E 32 F	0,429	0,435	0,434	0,432	$\mp \frac{1}{160}$	+ 0,00303	+ 0,0001444	30,8
E 80 F — F	0,354	0,363	0,360	0,358	$\mp \frac{1}{89,3}$	+ 0,00488	+ 0,0001675	40,3
F 15 G — F 32 G	0,323	0,331	0,329	0,327	$\mp \frac{1}{88,4}$	+ 0,00534	+ 0,0001607	37,5
F 53 G — F 66 G	0,311	0,322	0,314	0,316	$\mp \frac{1}{63,2}$	+ 0,00692	+ 0,0001980	49,9

coëfficient einen Fehler von $^1/_{100}$ erreicht hat. Ein Fehler der Art kann in vielen Fällen der quantitativen chemischen Analyse vernachlässigt werden; unter allen Umständen ist er aber corrigirbar. Blos die Region *A* bis *C* macht eine Ausnahme, in welcher der Fehler nicht vernachlässigt werden kann. Diese Region wird aber zur quantitativen chemischen Analyse nicht, oder nur ganz ausnahmsweise benutzt. Da wir bei der chemischen Analyse meist mit solchen Verdünnungen arbeiten, bei welchen im Absorptionsspectrum 40 bis 20 % Licht übrigbleibt, so ergibt sich aus den *h*-Werthen der Tabelle, dass in der ganzen Region von *D* bis *G* mit einem Fehler von etwa $^1/_{100}$ gearbeitet wird, wenn man denselben nicht corrigiren will.

Nichts ist somit grundloser, als die auf rein theoretischem Boden erwachsene, und durch keine einzige Thatsache erwiesene Behauptung, dass die Verwendung von nicht absolut, sondern nur annähernd gleichem Spectrallicht irgend nennenswerthe Fehler bei der Photometrie einführe.

Die Richtung (+ oder —), welche der Fehler annimmt, je nachdem die Einstellung am rechten oder linken Spaltrand gemacht wird, lässt sich leicht erklären.

Der zum Einfallsrohr des Spectralapparats genau centralen Stellung (Anfangsstellung) des Eintrittsspaltes entspricht ein Spectrum von einem durch die Spaltbreite bestimmten Grad der Reinheit. Tragen wir auf die Abscisse die Abstände der grossen Fraunhofer'schen Linien auf, und die Lichtstärken der Einzelbezirke als Ordinaten, so entsteht eine Curve, die von *A* bis *D* (dem Helligkeitsmaximum) ansteigt, um sodann bis *H* wieder zu sinken (Curve *a*).

Rückt der Eintrittsspalt (bei unveränderter Spaltweite) nach rechts, so erleidet das ganze Spectrum eine Verschiebung nach links.

Die Abscissenwerthe werden in diesem Sinne verschoben und wiederum die entsprechende Helligkeitscurve (Curve *b*) eingetragen.

Rückt der Eintrittspalt nach links, so verschiebt sich das ganze Spectrum nach rechts. Die entsprechende Curve *c* wird wiederum verzeichnet.

Das Spectrum wird also immer in einer der Spaltbewegung entgegengesetzten Richtung verschoben; dasselbe ist der Fall, wenn blos der eine Rand des Eintrittsspaltes bewegt wird. Die zur Photometrie erforderlichen Bewegungen des Spaltrandes sind aber (da sie den Spalt höchstens auf $^1/_6$ der ursprünglichen Breite von $^1/_5$ mm zu verringern haben) so gering, dass dadurch sehr unbedeutende Verschiebungen der mit einander zu vergleichenden Spectren entstehen.

Wird also blos die rechtsseitige Platte des Eintrittsspaltes (im Sinne der Spaltverengerung) bewegt, so verschiebt sich das Spectrum zunehmend mehr nach rechts. Das Spectrum der nicht verengten Spalthälfte (Absorptionsspectrum) wird somit durch Curve *a* des obigen Beispiels repräsentirt, das Spectrum der reinen Lichtquelle durch Curve *c*.

Also kommen in Region *A* bis *C* $^3/_4$ *D* in jedem Einzelbezirk (dessen Grenzen nach den Maassen des Absorptionsspectrums bestimmt werden,) Stellen des Absorptionsspectrums von ein wenig grösserer Gesammthelligkeit mit solchen von (ursprünglich) etwas geringerer Gesammthelligkeit des anderen Spectrums zur Vergleichung. Deshalb bedarf das letztere einer etwas geringeren Verminderung seiner ursprünglichen Lichtstärke, um beide Spectren gleich lichtstark zu machen. Der beobachtete Absorptionswerth ist somit etwas zu klein.

In der Region *D* bis *H* kommen dagegen jeweils dunklere Stellen des Absorptionsspectrums zum Vergleich mit (ursprünglich) helleren Stellen des anderen Spectrums; deshalb muss, zum Zwecke der Gleichstellung, der Eintrittsspalt des letzteren Spectrums etwas stärker verengert werden. Der gefundene Absorptionswerth ist somit etwas zu gross.

Gerade umgekehrt muss es sich selbstverständlich bei

der Einstellung mit der linkseitigen Platte des Eintrittsspaltes verhalten.

Im Sonnenspectrum nimmt die Lichtstärke von *A* bis *D* zu, erreicht das Maximum in *D* bis *D* 8 *E*, um gegen *H* allmählich zu sinken. In dem, für die Photometrie der Absorptionsspectren besonders wichtigen Spectrum der Petroleumflamme ist der Bezirk *C* 75 *D* bis *D* der hellste; auch in diesem Spectrum steigt die Helligkeit von *A* bis *C* 75 *D*, um jenseits *D*, gegen *H* hin, allmählich zu sinken.

Ich habe noch zu erörtern, warum, wie aus der *a*- und *b*-Reihe unserer Tabelle hervorgeht, die beiden, am linken und rechten Spaltrand gemachten Messungsfehler sich vollständig aufheben.

Zur Berechnung der mit meiner Methode verbundenen kleinen Versuchsfehler würde, wie schon bemerkt, die genaueste Kenntniss der Lichtstärke in jedem (kleinsten) Einzelbezirke des Petroleumflammenspectrums erforderlich sein. Da uns diese vorläufig abgeht, so konnte ich den Fehler nicht anders, als mittelst des Experimentes bestimmen.

Machen wir aber gleichwohl den Versuch, unsere Kenntnisse über die Lichtstärke des Petroleumflammenspectrums für die vorliegende Aufgabe zu verwerthen. Fraunhofer hat bekanntlich, jedoch nur an acht Stellen des Sonnenpectrums die Lichtstärke, d. h. den Intensitätseindruck, den dieselben auf das Sehorgan machen, in Vergleichungswerthen bestimmt. 56 Jahre später habe ich in meiner Schrift über die Anwendung des Spectralapparats zur Messung und Vergleichung der Stärke des farbigen Lichts (Tübingen 1871), die als Vorläufer zu meinen beiden Abhandlungen über quantitative Spectralanalyse diente, unter anderem die Lichtstärke in sämmtlichen Einzelbezirken des Spectrums des Sonnenlichtes, des diffusen Tageslichtes und der Petroleumflamme gemessen und zwar nicht blos in relativen, sondern auch in absoluten Werthen, d. h. reducirt auf „Lichteinheiten“ (Lichteinheit gleich derjenigen kleinsten Menge objectiven spectralen Lichtes, bei welcher

die Empfindung einer eben noch merklichen Farbe möglich ist.)

In Tafel II, sowie Tabelle IV meiner Schrift über die Photometrie der Absorptionsspectren (Tübingen 1873) ist der Gegenstand des weiteren behandelt. Betrachtet man den Verlauf der Lichtstärkencurve des Petroleumflammenspectrums, so ist sogleich ersichtlich, dass zwei von einem bestimmten Punkte *a* des Spectrums gleich weit nach links (gegen Roth) und rechts (Violett) abstehende Punkte in ihrer Lichtstärke von derjenigen des Punktes *a* immer um gleichviel (nach + und —) differiren. Der Satz gilt sogar annähernd noch für ziemlich weite Punktabstände; mit einer, für unsere vorliegende Frage mehr als genügenden Annäherung gilt er aber für kleine Abstände. Und um solche, d. h. um neu hinzukommende, resp. wegfallende Superpositionen von Licht von relativ sehr kleinen Unterschieden der Wellenlängen an derselben Stelle des Spectrums handelt es sich bei den Eintrittsspaltveränderungen der spectrophotometrischen Methode, für welche Erscheinungen ich als annähernd richtigen, jedenfalls einfachsten Ausdruck „gegenseitige Verschiebung beider Spectren" wählen durfte. Deshalb stellt das Mittel beider Lichtstärkemessungen, mittelst Einstellung der rechten und der linken Platte des Eintrittsspaltes, den wahren Werth der Lichtstärke des untersuchten Spectralbezirks dar.

Meine Lichtstärkemessungen im Spectrum der Petroleumflamme erweisen sich, wie ich jetzt sehe, als viel genauer, wie ich bisher annehmen durfte. Der geringe, kaum mehr messbare Unterschied des *a*- und *b*-Werthes in der Spectralregion *C* 71 *D* bis *D* unserer Tabelle erklärt sich vollkommen aus den geringen Lichtstärkeunterschieden in dieser Region.

Ich habe gefunden:

für *C* 65 *D* bis *C* 75 *D*	837 000	Lichteinheiten
„ *C* 75 *D* bis *D*	875 000	„
„ *D* bis *D* 8 *E*	873 000	„

1150fach grössere Werthe als in *A* bis *A* 11 *a* und 5010 mal grössere, als in *G* 90 *H* bis *H*.

Die geringen Messungsfehler bei der einseitigen Spaltveränderung blos an einem Rande sind proportional der Grösse der Drehung der Mikrometerschraube und dem Lichtstärkeunterschiede zwischen den beiden Grenzpunkten des zur Messung vorliegenden Spectralbezirkes; je nachdem im prismatischen Spectrum die Lichtstrahlen von gleichen Unterschieden der Wellenlänge weniger (wie im Roth) oder stärker (wie im Grün bis Violett) von einander abstehen, wird also der Messungsfehler grösser oder kleiner sein müssen.

Meine Bestimmungen der Messungsfehler gelten selbstverständlich in aller Strenge nur für solche Spectralapparate, welche von dem von mir benutzten[1]) nicht zu sehr abweichen. Die bisher zu diesem Zwecke verwendeten Apparate von verschiedenen Werkstätten zeigen übrigens Spectren von nahezu derselben Ausdehnung. Instrumente mit breiteren Spectren (ein Spectrum von mehr als der doppelten der bisher benutzten Breite ist, selbst für die strengsten Anforderungen der quantitativen chemischen Analyse, nicht nöthig), müssen natürlich noch geringere Messungsfehler ergeben, als ich sie gefunden habe.

In Vorstehendem habe ich nachgewiesen, dass die mittelst meiner Methode ausgeführten Lichtstärkemessungen fast im ganzen Bereich des Spectrums mit einem sehr geringen Fehler behaftet sind, der in der Mehrzahl der Fälle vernachlässigt, unter allen Umständen aber vollständig corrigirt werden kann und zwar durch irgendeine der folgenden drei Verfahrungsweisen:

I. Bei Benutzung meines bisherigen Spectrophotometers mit blos zwei beweglichen Platten, indem man die in Reihe *g* der obigen Tabelle enthaltenen Werthe zur Correctur verwendet.

---

1) Derselbe ist aus der Steinheil'schen Werkstätte. Nr. 116 des Preiscourants von 1868.

II. Oder, noch besser bei Benutzung des Spectrophotometers mit vier beweglichen Platten am Eintrittsspalt, indem man links auf -50 und rechts auf $+50$, also wiederum auf einen ganzen Umgang der Schraubentrommel, einstellt.

Man misst, wie bei I, die übrigbleibende Lichtstärke m durch Einstellung der rechtsseitigen Platte; ist m unter 0,50, so muss der Spalt noch durch Einstellung der linksseitigen Platte verengt werden, bis beide Spectren (annähernd) dieselbe Lichtstärke haben. Dann stellt man die linksseitige Platte völlig oder nahezu auf $\frac{m}{2}$ ein und bringt die genaue Gleichheit beider Spectren durch die nöthige Einstellung n der rechten Platte fertig. Die Summe von $\left(\frac{m}{2}+n\right)$ gibt die wahre, von der kleinen Verschiebung beider Spectren völlig unabhängige Lichtstärke, resp. deren Extinctionscoëfficienten. Die vorläufige Einstellung der linken Platte auf $\frac{m}{2}$ kann man, ohne den Sitz vor dem Beobachtungsfernrohr zu verlassen, mittelst der unter dem Einfallsrohr durchgeführten linken Hand bewerkstelligen. Die wirklichen Einzelmessungen werden dann durch Bewegung der leichter zugänglichen, rechtsseitigen Mikrometerschraube ausgeführt. An Einfachheit und Schnelligkeit lässt auch dieses Verfahren nichts zu wünschen übrig. 6 bis 10 gute Einzelmessungen geben ein Endmittel, dessen Fehler erheblich unter $\frac{1}{100}$ liegt.

Man könnte die Einstellungen am linken Rand des Eintrittsspaltes auch einfach (mit meinem bisherigen Apparat mit blos zwei beweglichen Platten) durch Drehung des Eintrittsspaltes um 180° bewerkstelligen, wie mir mein College Loth. Meyer vorschlug. Man hätte nur noch für eine Vorrichtung zu sorgen, welche den Eintrittsspalt in seinen beiden Stellungen in derselben, genau verticalen Lage zu arretiren hätte. Immerhin wäre dieses Verfahren viel weniger bequem als das soeben beschriebene.

III. Ich habe noch ein drittes Verfahren in Aussicht genommen; ich lasse gegenwärtig vier bewegliche Platten anfertigen, die blos durch zwei (auf der rechten Seite liegende) Micrometerschrauben bewegt werden, indem die einander gegenüberstehenden Plattenpaare durch eine gemeinsame Schraube immer im entgegengesetzten Sinne bewegt werden. Ich erwarte übrigens von dieser Vorrichtung (vorausgesetzt, dass sie tadellos hergestellt werden kann) weder eine grössere Genauigkeit, noch einen Zeitgewinn für die Einzelmessungen. Der Apparat mit vier beweglichen Platten und vier Micrometerschrauben hat den Vortheil, auch zu anderen als den hier in Rede stehenden photometrischen Zwecken verwendbar zu sein.

Bei diesem Anlasse mögen einige Bemerkungen über eine, der Pariser Akademie in der Sitzung vom 10. Dec. 1877 vorgelegte Abhandlung von Govi über quantitative Spectralanalyse gestattet sein. Hr. Govi macht den Anspruch auf die Erfindung der quantitativen Spectralanalyse, unter Hinweisung auf ein, von ihm, Bd. L, p. 156 der C. R. (1860) beschriebenes Photomètre analyseur.

Der a. a. O. beschriebene Apparat ist im wesentlichen ein Ritchie'sches Photometer, in dessen horizontalen Kasten von den beiden, mit einander zu vergleichenden Lichtern nur ein schmales verticales Bündel durch je einen entsprechenden verticalen Spalt eindringen kann. Ueber der Kante der beiden Spiegelgläser befindet sich, wie bei Ritchie, ein Seitenrohr, das zunächst eine Linse enthält, welche die von beiden Spiegeln reflectirten Lichter auf ein Flintglasprisma wirft. Die Spectren beider Lichter werden nebeneinander auf einer matten Glasscheibe aufgefangen. Die Gleichheit beider Spectren wird durch Verrückung der Lichter hergestellt. Mit diesen, schon 1850 erfundenen Apparat scheint Govi keine Messungen angestellt zu haben; am allerwenigsten aber hat er an dessen, übrigens unmögliche, Verwendung zur quantitativen chemischen Analyse gedacht.

Unlängst trat nun — 18 Jahre nach der gedachten

Veröffentlichung — Govi mit „seiner Methode der quantitativen Spectralanalyse“ auf, die im wesentlichen auf denselben Vorrichtungen fusst, die ich am Spectralapparat zum Zweck der Photometrie und der quantitativen chemischen Analyse angebracht habe. Er sagt: „L'inventeur du photomètre analyseur pense qu'on ne voudra pas l'accuser de plagiat s'il publie maintenant et s'il applique à la solution de quelques questions de physique son instrument modifié depuis longtemps par lui même d'après les idées qu'il avait déjà emises en 1860 (!) et que d'autres, mieux placés pour faire exécuter leurs instruments, ont pu avoir réalisées avant lui.“

Durch die Angabe der Jahreszahlen dürfte dieser Prioritätsanspruch beseitigt sein.

Tübingen, 18. Februar 1878.

V. *Einführung des Princips der Erhaltung der Energie in die Theorie der Diffraction; von Dr. J. Fröhlich in Budapest.*

Die bisherige Theorie der Diffraction bestimmt auf Grundlage des mehr oder weniger verallgemeinerten Huyghens'schen Princips die Wirkung einer beliebigen Wellenoberfläche auf einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt des Raumes.

Nimmt man einen leuchtenden Punkt als Lichtquelle an, so hat man für die resultirende Bewegung:

$$u = k\iint \partial f \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r_1}{\lambda}\right) + \delta\right];$$

k bedeutet dabei eine vorläufig unbestimmte Constante, ∂f das Element der Wellenfläche, r_0 und r_1 dessen Entfernung von dem leuchtenden, resp. von dem beliebigen, im Raume liegenden Punkte, T die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge, δ die Anfangsphase.

Die Amplitude dieser Bewegung ist:

$$A = K\left[\left(\iint \partial f \sin\frac{2\pi}{\lambda}(r_0+r_1)\right)^2+\left(\iint \partial f \cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_0+r_1)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

K ist nicht gleich der früheren Constante k, wie weiter unten gezeigt werden soll; es scheint, als ob bisher die Bedeutung und der Werth dieser Constante nicht genügend beachtet wurde.

Aus den obigen Formeln ergibt sich bei beugenden Oeffnungen von verschiedener Gestalt für jeden Punkt des Raumes die resultirende Lichtbewegung und deren Amplitude, und zwar relative Amplitude, weil die Lichtbewegung, ausser den angeführten Gleichungen, auch dem Principe der Erhaltung der Energie genügen muss.

Die Einführung dieses Princips ändert zwar nichts an den wesentlichen Resultaten der bisherigen Theorie; sie präcisirt und vervollständigt dieselben jedoch bedeutend, und gestattet schliesslich die Amplitude und die Intensität (theoretisch) richtig und absolut zu bestimmen[1]).

Es befinde sich hinter den beugenden Oeffnungen ein Schirm von beliebiger Gestalt, welcher sämmtliches durch die ersteren gebeugtes Licht auffängt; dann lautet das Princip der Erhaltung der Energie folgendermaassen:

Die auf den Schirm fallende, gesammte Bewegungsenergie (Intensität) der Lichtbewegung ist stets gleich oder kleiner als die Bewegungsenergie der gesammten, durch die beugenden Oeffnungen dringenden Lichtbewegung.

Es ist nämlich kein Grund vorhanden, anzunehmen,

---

1) Wir wollen hier die Intensität als die während der Zeiteinheit auf die zur Fortpflanzungsrichtung normale Flächeneinheit fallende Bewegungsenergie betrachten. Sie ist:

$$A^2 V\sigma\frac{\pi}{T^2} = A^2 C;$$

V = die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, σ die supponirte Dichte des Aethers.

dass durch den Vorgang der Beugung oder während des Verlaufs derselben die kinetische Energie der oscillatorischen Bewegung eine merkliche Aenderung erlitten hätte. Dagegen ist wahrscheinlich, dass bei Beugungserscheinungen mit grossem Diffractionswinkel ein Theil der in den Transversalschwingungen vorhandenen Energie zur Hervorbringung von Longitudinalschwingungen verwendet wird.

Bedeutet $\mathfrak{A}$ die constante oder variable Amplitude an der Fläche der beugenden Oeffnungen, so ist nach obigem Satze, homogenes Licht vorausgesetzt:

$$C\iint \mathfrak{A}^2 \partial f \geqq C\iint A^2 \partial F.$$

Substituirt man den oben gegebenen Werth von A in diese neue Bedingungsgleichung, so ergibt ihre Ausrechnung unmittelbar die Constante K, und damit zugleich auch A, welches dadurch dieselbe Dimension wie $\mathfrak{A}$ erhält.

Bei Aufstellung dieser Gleichung haben wir die jedenfalls nur näherungsweise richtige Voraussetzung gemacht, dass die Lichtbewegung in unmittelbarer Nähe der beugenden Ränder nicht gestört wird.

Wir wollen mittelst dieses Princips einfache Beugungsprobleme möglichst vollständig zu lösen versuchen.

Die beugende Oeffnung sei ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen Länge und Breite a und b. Wir nehmen den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Mittelpunkte der Oeffnung an, die X- und Y-Axe parallel zu a und b.

Das einfallende parallele Licht hat die Richtung der Z-Axe, und besitzt in der Fläche der Oeffnung die auf die Flächeneinheit bezogene Amplitude $\mathfrak{A}$ und eine Bewegung von der Form: $\mathfrak{A} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$.

Die nach der gewöhnlichen Theorie berechnete Amplitude A_g des gebeugten parallelen Lichts ist für eine Richtung, welche mit den X- und Y-Axen die Winkel α und β bildet:

$$A_q \sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\delta_1\right) = \mathfrak{A}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\partial y\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\partial x \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta}{\lambda}\right)+\delta\right]$$

$$A_q = \mathfrak{A}ab\,\frac{\sin\frac{\pi a\cos\alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a\cos\alpha}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi b\cos\beta}{\lambda}}{\frac{\pi b\cos\beta}{\lambda}}.$$

Dieses Resultat kann nicht richtig sein; denn denkt man sich einen Schirm in der Gestalt einer Kugelschale von unendlich grossem Radius, dessen Mittelpunkt die beugende Oeffnung sei, auf den das gebeugte, mit der gefundenen, endlichen Amplitude schwingende Licht fällt, so ist die während der Zeiteinheit auf die Innenseite des Schirmes fallende kinetische Energie unendlich gross.

In den folgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass die Diffractionswinkel sehr klein sind, wenige Grade nicht übersteigen, dass also die Erscheinungen mit Hülfe des Fernrohrs genau untersucht werden können. Setzt man: $\varphi = 90^0 - \alpha$, $\psi = 90^0 - \beta$ und ist φ und ψ sehr klein, so ist die eigentliche Amplitude:

$$A = \mathfrak{A}Kab\,\frac{\sin\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\frac{\pi b\psi}{\lambda}}.$$

Das gebeugte Licht falle auf einen kugelförmigen Schirm vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt zugleich auch die Mitte der Oeffnung; wir können nämlich voraussetzen, wie dies auch bei der Beobachtung der Fall ist, dass eine unmittelbar hinter der Oeffnung befindliche Linse, deren Brennweite ϱ ist, ein scharfes Bild der Erscheinung auf den Schirm projicirt. Das Flächenelement des Schirmes ist: $\varrho^2\,\partial\varphi\,\partial\psi$, daher die auf denselben fallende Energie:

$$\varrho^2 C\int_{-\pi}^{+\pi}\partial\psi\int_{-\pi}^{+\pi}\partial\varphi\,A^2.$$

Die Werthe der Amplituden sind indess schon bei kleinen Beugungswinkeln φ und ψ sehr gering und ver-

schwinden für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ gänzlich; man kann daher die Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen.

Aus dem Principe der Erhaltung der Energie folgt folgende Gleichung:

$$C\mathfrak{A}^2 ab = \varrho^2 C \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \partial\varphi\, \partial\psi = \varrho^2 C K^2 \mathfrak{A}^2 a^2 b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a\varphi}{\lambda}\right)^2}\partial\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b\psi}{\lambda}\right)^2}\partial\psi.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\pi a\varphi}{\lambda} = \omega, \qquad \frac{\pi b\psi}{\lambda} = \omega',$$

so haben die zu bestimmenden Integrale die Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\partial\omega = \pi.$$

Da nun ausserdem:

$$\partial\varphi = \frac{\lambda}{\pi a}\partial\omega, \qquad \partial\psi = \frac{\lambda}{\pi b}\partial\omega',$$

so wird unsere Gleichung:

$$C\mathfrak{A}^2 ab = \varrho^2 C K^2 \frac{\lambda}{\pi a}\cdot\frac{\lambda}{\pi b}\cdot\pi\cdot\pi\cdot\mathfrak{A}^2 a^2 b^2 = \varrho^2\lambda^2 K^2 C\mathfrak{A}^2 ab;$$

aus dieser Relation folgt unmittelbar der Werth der unbestimmten Constante K:

$$K = \frac{1}{\varrho\lambda};$$

es ist somit der richtige Ausdruck für die Amplitude an einem beliebigen Punkte des Schirmes:

$$A = \mathfrak{A}\frac{ab}{\varrho\lambda}\cdot\frac{\sin\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a\varphi}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\frac{\pi b\psi}{\lambda}}.$$

Man sieht, dass A eine ihrer Natur und Dimension nach

vollkommen mit der Amplitude $\mathfrak{A}$ übereinstimmende Grösse bedeutet.

Das Licht, welches keinerlei Beugung erlitten, für welches also $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ist, hat die Amplitude:

$$A\frac{ab}{\varrho\lambda};$$

dieselbe ist durchaus nicht im allgemeinen gleich der des einfallenden Lichtes $\mathfrak{A}$; diese Gleichheit findet nur dann statt, wenn:

$$\varrho\lambda = ab;$$

dann besteht eine sehr einfache Beziehung zwischen den Dimensionen der einzelnen Beugungsbilder und denjenigen der beugenden Oeffnung. Die Länge und Breite eines solchen Bildes werden bestimmt durch:

$$\frac{\pi a\varphi_1}{\lambda} = \pi; \qquad \frac{\pi b\psi_1}{\lambda} = \pi;$$

die wirkliche Länge und Breite des Bildes ist:

$$\varrho\varphi_1 \quad \text{und} \quad \varrho\psi_1;$$

da jedoch hier:

$$\varrho = \frac{ab}{\lambda}, \quad \varphi_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad \psi_1 = \frac{\lambda}{b},$$

so sind die letzterwähnten Dimensionen:

$$\varrho\varphi_1 = b, \qquad \varrho\psi_1 = a,$$

das ist: wenn die Amplitude des nicht gebeugten Lichtes gleich ist derjenigen des einfallenden Lichtes, so ist jedes einzelne Beugungsbild in Bezug auf Gestalt und Dimension völlig gleich der beugenden Oeffnung, doch sind die Lagen um 90° resp. gedreht.

Mit Hülfe der vorhin erhaltenen Resultate ist es nicht schwer, die Intensität (Bewegungsenergie) der einzelnen, bei dieser Erscheinung auftretenden Beugungsbilder zu bestimmen. Eine Zeichnung der betreffenden Phänomene ergibt unmittelbar, dass die vier in der Mitte gelegenen

Beugungsbilder sich zu einem einzigen vereinen, ebenso die längs der mittleren Verticalen und Horizontalen liegenden Bilder. Im Folgenden beziehen wir unsere Resultate auf je ein solches Grundbild.

Die kinetische Energie, welche auf das Flächenelement $\varrho^2 \partial\varphi \partial\psi$ fällt, ist:

$$CA^2\varrho^2 \partial\varphi \partial\psi = CK^2\mathfrak{A}^2\varrho^2 \frac{\lambda}{\pi a} \cdot \frac{\lambda}{\pi b} a^2 b^2 \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2} \partial\omega \partial\omega',$$

daher die Intensität des ersten Bildes, wenn wir beachten, dass $C\mathfrak{A}^2 ab$ die Intensität des gesammten, eindringenden Lichtes ist und dieselbe zur Abkürzung mit I bezeichnen:

$$J_{1,1} = I \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \partial\omega \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2} \partial\omega'.$$

Die Intensitäten der anderen Beugungsbilder ergeben sich auf ganz analoge Weise, so dass für ein beliebiges Bild:

$$J_{\nu,\mu} = J_{\mu,\nu} = I \frac{1}{\pi^2} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \partial\omega \int_{(\mu-1)\pi}^{\mu\pi} \frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2} \partial\omega'.$$

Die zur Diagonale symmetrisch gelegenen Beugungsbilder haben daher gleiche Intensität (erhalten gleiche Bewegungsenergie).

Die erste Ziffercolumne der folgenden Tabelle enthält die Werthe der sorgfältig auf dem Wege der mechanischen Quadratur mit Zuhülfenahme der höheren Differenzen berechneten Werthe der Integrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \partial\omega, \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \partial\omega$ u. s. w., die zweite die aufeinanderfolgenden Maxima des Ausdruckes $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$, die relativen Werthe der in den Theorien der Diffraction sogenannten Lichtmaxima.

Zwischen den Grenzen.			$2\int \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\partial\omega$.	Lichtmaxima.
	0	und π	$0.791\,711.\pi$	1.000 000
	π	„ 2π	$0.047\,087.\pi$	0.047 191
	2π	„ 3π	$0.016\,465.\pi$	0.016 480
	3π	„ 4π	$0.008\,336.\pi$	0.008 342
	4π	„ 5π	$0.005\,028.\pi$	0.005 029
	5π	„ 6π	$0.003\,360.\pi$	0.003 360
	6π	„ 7π	$0.002\,404.\pi$	0.002 404
	7π	„ 8π	$0.001\,805.\pi$	0.001 805
	8π	„ 9π	$0.001\,404.\pi$	0.001 404
	9π	„ 10π	$0.001\,123.\pi$	0.001 123

Die relativen Werthe in den beiden Ziffercolumnen nähern sich einander immer mehr, wie dies auch zu erwarten ist, denn bei grossen Werthen des Winkels ω müssen auch die Werthe des bestimmten Integrals sehr nahezu proportional sein den Maximis von $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$.

Für grössere Werthe von ν gilt die Näherungsformel:

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\partial\omega = \frac{1}{(\nu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(\nu-\frac{1}{2})^2(3.14159\ldots)^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Die gegebenen numerischen Daten gestatten mit Leichtigkeit denjenigen Theil der einfallenden Bewegungsenergie zu bestimmen, welcher zu einem beliebigen Beugungsbilde gehört; dabei muss natürlich die Bedingung erfüllt sein:

$$I = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} J_{\nu,\mu}.$$

Haben wir n gleiche, parallele, mit ihren Mittelpunkten auf der X-Axe in Abständen d von einander liegende, beugende Oeffnungen, so ist, wenn A die bei einer einzelnen Oeffnung resultirende Amplitude ist, die Amplitude der nun entstehenden Bewegung A_n:

$$A_n = A \frac{\sin n \frac{\pi d\varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d\varphi}{\lambda}},$$

worin A mit dem Factor $\frac{1}{\varrho\lambda}$ versehen ist.

Das Princip der Erhaltung der Energie ergibt:

$$n C \mathfrak{A}^2 ab = \varrho^2 C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_n^2 \, \partial\varphi \, \partial\psi .$$

Behalten ω und ω' ihre Bedeutung, und setzen wir $\frac{d}{a} = m$, so wird:

$$n C \mathfrak{A}^2 ab = \varrho^2 C K^2 \mathfrak{A}^2 a^2 b^2 \frac{\lambda}{\pi a} \cdot \frac{\lambda}{\pi b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2} \partial\omega'$$

$$= \varrho^2 C K^2 \mathfrak{A}^2 \lambda^2 \frac{ab}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega .$$

Beachten wir, dass der Werth der Constante K durch die letzten Operationen keine Veränderung erlitten hat, so ist klar, dass unsere letzte Gleichung nur unter der Bedingung:

$$n\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega$$

bestehen kann; mit anderen Worten: das Princip der Erhaltung der Energie führt zu dem Werthe folgendes Integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \partial\omega = n\pi.$$

Doch lässt sich dieses Integral, welches wir so zu sagen auf logischem Wege gefunden, auch auf rein mathematischem Wege bestimmen.

Wir können den zuletzt betrachteten Fall verallgemeinern, indem wir eine Anzahl von n' gleichen Reihen von Oeffnungen annehmen, welche sich über einander in der gleichen Distanz e von einander befinden; bezeichnet man $\frac{e}{b} = m'$, so ist hier die kinetische Energie:

$$nn' CA^2 ab = C\mathfrak{A}^2 abK^2 \frac{\varrho^2 \lambda^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \frac{\sin^2 nm\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\omega'}{\omega'^2} \cdot \frac{\sin^2 n'm'\omega'}{\sin^2 m'\omega'} \partial\omega'.$$

Es ist evident, dass auch hier: $K = \frac{1}{\varrho\lambda}$.

Die den einzelnen Beugungsbildern entsprechende Energie lässt sich analog wie im ersten Falle bestimmen; es muss jedoch n und n', m und m' bekannt sein.

Von besonderem Interesse ist jedoch nur die Kenntniss der Intensität der Bilder, in welchen die Hauptmaxima des Lichtes auftreten. Die Werthe von $nm\omega$, welche zu solchen Bildern gehören, erstrecken sich von:

$$-\pi \text{ bis } +\pi \quad \text{oder} \quad (n-1)\pi \text{ bis } (n+1).\pi \quad \text{oder}$$
$$(2n-1)\pi \text{ bis } (2n+1)\pi \ldots\ldots;$$

daraus folgen die Grenzen von ω für diese Bilder, welche wir kurz als Hauptmaxima bezeichnen wollen. Betrachtet man nur die längs der X-Axe liegenden Hauptmaxima, so hat man für deren Bewegungsenergie (wobei $I = C\mathfrak{A}^2 abnn'$) allgemein:

$$J_{M_\nu} = I \frac{1}{n\pi} \int_{\omega=\frac{(\nu-1)n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\omega=\frac{(\nu-1)n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 nm\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega.$$

Ist die Anzahl n der Oeffnungen sehr gross, so liegen auch die Grenzen des Winkels ω, welcher zu diesen Hauptmaximis gehört, sehr nahe, so dass man den Ausdruck $\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$ innerhalb der Integrationsgrenzen als constant annehmen kann, indem man für ω den Mittelwerth der Grenzen einsetzt.

Die Intensität dieser Hauptmaxima ist dann:

$$J_{M_1} = I \frac{1}{n\pi} \frac{\sin^2 o}{o^2} \int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 nm\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega.$$

. . . . . .

Man überzeugt sich jedoch leicht, dass die in den letzten Ausdrücken vorkommenden bestimmten Integrale gleich sind; die unter dem Integralzeichen stehende periodische Function hat immer denselben Werth, wenn der Winkel ω:

$$\omega = -\frac{\pi}{nm}, \quad \frac{n-1}{n}\frac{\pi}{m}, \quad \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m} \ldots .$$

und wenn:

$$\omega = +\frac{\pi}{nm}, \quad \frac{n+1}{n}\frac{\pi}{m}, \quad \frac{2n+1}{n}\frac{\pi}{m} \ldots .$$

Daraus, und aus der einfachen Periodicität der erwähnten Function, folgt unmittelbar:

$$\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} = \int_{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} = \int_{\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}}^{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{\pi}{m}} = \ldots\ldots .$$

Es ist daher schliesslich nur das Integral $\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 mn\omega}{\sin^2 m\omega} \partial\omega$ zu untersuchen; man kann dies ohne Schwierigkeit ausführen, indem man beachtet, dass innerhalb der Grenzen $\omega = -\frac{\pi}{nm}$ und $\omega = +\frac{\pi}{nm}$ die Grenzwerthe von $m\omega$ $-\frac{\pi}{n}$ und $+\frac{\pi}{n}$ sind; bei nur einigermaassen bedeutendem n fällt daher innerhalb der Integralgrenzen $m\omega$ mit $\sin m\omega$ zusammen, mithin ist das Integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 nm\omega}{m^2\omega^2} \partial\omega = n^2 \int_{-\frac{\pi}{nm}}^{+\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2 nm\omega}{n^2m^2\omega^2} = \partial\omega \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2\vartheta}{\vartheta^2} \partial\vartheta ,$$

wenn man setzt: $\vartheta = nm\omega$.
Das letztere Integral ist jedoch schon bekannt, und wir erhalten:

$$J_{M_1} = I\frac{1}{m}0{,}791\,711\ldots, \quad J_{M_\nu} = I\frac{1}{m}\frac{\sin^2(\nu-1)\frac{\pi}{m}}{\left((\nu-1)\frac{\pi}{m}\right)^2}0{,}791\,711.$$

Die gesammte Energie, welche zu diesen Hauptmaximis gehört, ist:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} J_{M_\nu} = I\frac{1}{m}0{,}791\,711\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{\sin(\nu-1)\frac{\pi}{m}}{(\nu-1)\frac{\pi}{m}}\right\}^2$$

$$= I\frac{1}{m}0{,}791\,711\left[1+2\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\left\{\frac{\sin(\nu-1)\frac{\pi}{m}}{(\nu-1)\frac{\pi}{m}}\right\}^2\right].$$

Es ist $m = \frac{d}{a}$, daher immer grösser als die Einheit; je mehr sich dieses Verhältniss der Einheit nähert, um so grösser ist die Intensität dieser Bilder. Ist z. B. $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{m} = \frac{2}{3}$, so wird auch $\sin^2(\nu-1)\frac{\pi}{m} = \frac{3}{4}$, für $\nu-1 = 3n+1$ und $\nu-1 = 3n+2$; $\sin(\nu-1)\frac{\pi}{m} = 0$, für $\nu-1 = 3n$, wobei n eine beliebige ganze Zahl und man hat:

$$\Sigma J_{M_\nu} = I\frac{1}{m}0{,}791\,711\left\{1+\tfrac{3}{2}\cdot\left(\frac{m}{\pi}\right)^2\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right]\right\},$$

oder, im Falle $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ wird $\sin^2\nu\frac{\pi}{m}$ abwechselnd gleich Eins und Null; es ist dann:

$$\Sigma J_{M_\nu} = I.0{,}395\,856\left\{1+\frac{8}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right]\right\} \text{ etc.}$$

Man bemerkt, dass für Werthe von m, welche sich von der Einheit wenig entfernen, der bei weitem grössere Theil der Energie des einfallenden Lichtes zur Bildung der Hauptmaxima verwendet wird.

Die Intensitäten dieser Bilder stehen in folgendem Verhältniss zu einander:

$$1 : \frac{\sin^2 \frac{\pi}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2} : \frac{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}{\left(2\frac{\pi}{m}\right)^2} : \frac{\sin^2 3\frac{\pi}{m}}{\left(3\frac{\pi}{m}\right)^2} \text{ etc.}$$

Es ist selbstverständlich, dass diese letzteren Untersuchungen sich auf Gitter beziehen, welche zwischen den Oeffnungen vollkommen undurchsichtige Flächen enthalten.

Bemerken wir noch, dass die Beobachtung die Resultate der Diffractionstheorie nur in einer Beziehung verificirte; bisher wurde nur die Richtung des gebeugten Lichtes gemessen und mit der Theorie in Uebereinstimmung gefunden; die Polarisation desselben und die sogenannten secundären Spectra[1]) folgten nicht aus der Theorie. Die erwähnte Verificirung ist jedoch ungenügend, denn es fehlen die ebenso wichtigen und wesentlichen Daten für die Intensität des gebeugten Lichtes.

Zum Zwecke der experimentellen Untersuchung der hier entwickelten Intensitätsverhältnisse habe ich einen Apparat zusammengestellt, dessen Hauptbestandtheil ein kleines Heliometer ist, und welcher Beobachtungen von genügender Genauigkeit erlaubt, um später die Vergleichung zwischen den theoretischen und experimentellen Resultaten anstellen zu können.

Wir haben hier das Princip der Erhaltung der Energie auf die Untersuchung einer der einfachsten Diffractionserscheinungen angewandt; man kann diese Anwendung leicht auf irgendein anderes Beugungsphänomen ausdehnen; doch ist der Ausdruck für die resultirende Amplitude gewöhnlich nicht in geschlossener Form zu erhalten, so dass die thatsächliche Ausrechnung der, durch Einführung dieses Principes entstandenen Bedingungsgleichung nicht eben schwierige, wohl aber ausgedehnte mathematische Entwickelungen erfordert, welche jedoch kaum grösseres physikalisches Interesse besitzen dürften.

Budapest, am 1. October 1877.

---

1) Quincke. Pogg. Ann. CXLVI. p. 57.

VI. *Ueber die Veränderlichkeit der Lage der Absorptionsstreifen; von Dr. Ferdinand Claes in Emmerich* [1].

(Mitgetheilt von Herrn Prof. Ketteler.)

Gestützt auf die Resultate, die er auf experimentellem Wege gefunden und in Arbeiten von 1865 [2]) und 1870 [3]) niedergelegt hat, hat Hr. Prof. Ketteler im J. 1876 [4]) eine Theorie der Dispersion veröffentlicht, die im Stande ist, sowohl von der Absorption als auch der anomalen Dispersion eine Erklärung zu geben. Seine hauptsächlichste Bewegungsgleichung stimmt im wesentlichen mit der früheren von Boussinesq [5]) überein, welcher zuerst in seinen Gleichungen sowohl der Bewegung der Körpertheilchen wie der der Aethertheilchen Rechnung trug. Nur hat Boussinesq in der seinigen die Kraftcomponenten allein eingeführt, während Ketteler diese Componenten noch mit den Amplituden, oder, wenn man will, mit dem kleinsten Theile der Amplituden multiplicirt hat. Jener gibt also die Kraft allein, dieser das Product vom Weg in die Kraft, d. i. die Arbeit, weil die Amplitudentheilchen den Weglängen proportional sind. Durch Integration dieser Gleichung findet dann Ketteler:

$$n^2 - n_\infty^2 = \Sigma \frac{D'}{\frac{l^2}{L^2} - 1},$$

wo n der Brechungsindex, n_∞ der einer unendlichen Wellenlänge λ des dispersionsfreien Raumes entsprechende Index, l die zu jedem Brechungsindex gehörige innere Wellenlänge, L und D' zwei Constanten sind. Diese Gleichung erlangt z. B. für Substanzen mit einem Absorptionsstreifen die Gestalt:

1) Inauguraldissertation mit einigen Kürzungen. Die Red.

2) Farbenzerstreuung der Gase, Bonn, Henry, 1865.

3) a) Pogg. Ann. CXL. b) Verhandl. d. naturhist. Vereins für Rheinl. u. Westphalen. Jahrg. XXXII. (4) Bd. II.

4) ibidem. Jahrg. XXXIII. (4) Bd. II.

5) Liouville J. (2). XIII. p. 313.

$$n = \frac{2n_\infty}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda'_0}{\lambda}\right)\left(1+\frac{\lambda''_0}{\lambda}\right)} \mp \sqrt{\left(1-\frac{\lambda'_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda''_0}{\lambda}\right)}}.$$

λ'_0 und λ''_0 sind die Grenzwellenlängen des Absorptionsstreifens; ist $\lambda''_0 = 0$, d. h. keine Absorption da, so ist λ'_0 die Wellenlänge für die violette Grenze des Spectrums, und die Formel ist genau die von Christoffel[1]). Diese Theorie wäre nun an den jetzt so viel besprochenen Thatsachen von anomaler Dispersion und Absorption zu beweisen. Namentlich hat Kundt[2]) auf diesem Gebiete in zahlreichen Versuchen nicht nur die Resultate seines Vorgängers Christiansen[3]) bestätigt gefunden, sondern auch weiter alle möglichen Körper mit Oberflächenfarben untersucht und die Dispersionscurven der hauptsächlichsten unter ihnen ziemlich genau beschrieben.

In seiner letzten, in diesen Bereich einschlagenden Arbeit weist er besonders auf eine Eigenschaft absorbirender Substanzen hin, die vor ihm von Hagenbach, Kraus und anderen wahrgenommen wurde, nämlich dass bei Benutzung verschiedener Lösungsmittel bei ein und derselben Substanz die Absorptionsstreifen kleine Verschiebungen erleiden. Schon früher hat Kraus[4]) hierüber eine Regel aufgestellt, der zufolge die Absorptionsstreifen um so mehr dem rothen Ende zurücken, je grösser das specifische Gewicht des lösenden Mittels ist. Jedoch findet Kundt dies keineswegs bestätigt; seine Untersuchungen führen ihn zu dem Ausspruche[5]): „Mischt man zu einer absorbirenden Substanz andere nicht absorbirende Medien, so rückt ein Absorptionsstreifen, welcher sich im Bereiche λ_1 bis λ_2 des Spectrums befindet, um so mehr nach dem

1) Pogg. Ann. CXLVII. p. 27.

2) Pogg. Ann. CXLII. p. 163. CXLIII. p. 149. 259. CXLIV. p. 128. CXLV. p. 67. 164. Jubelbd. p. 614.

3) Pogg. Ann. CXLI. p. 479. CXLIII. p. 250. CXLVI. p. 154.

4) Zur Kenntniss der Chlorophyllfarbstoffe. Stuttgart 1872.

5) Pogg. Ann. Jubelbd. p. 617.

rothen Ende des Spectrums, je grösser die Constante B ist, welche in dem Bereich λ_1 bis λ_2 die Dispersion des zugesetzten, nicht absorbirenden Mediums darstellt.“ Dass dieser Ausspruch Kundt's noch an anderen Substanzen als an dem von ihm speciell angegebenen Chlorophyll und Cyanin zu verificiren wäre, war der Gedanke, der zu der vorliegenden Arbeit Veranlassung gab. Dieselbe wird in drei Theile zerfallen; in dem ersten, dem analytischen, wird es sich darum handeln, aus den vorhandenen Dispersionsformeln einen passenden mathematischen Ausdruck für obigen Ausspruch zu entwickeln; der zweite wird den Gang der Untersuchungen sowie deren Ergebnisse mittheilen; der letzte endlich hat den Zweck, die im zweiten dargelegten Resultate etwa theoretisch zu deuten.

I.

Wir gehen aus von der Dispersionsformel:

$$n^2 - n_\infty^2 = \Sigma \frac{D'}{\frac{l^2}{L^2} - 1}. \tag{1}$$

Für unseren Zweck wird es ausreichen, das Summenzeichen auf zwei Glieder auszudehnen und zu setzen:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{D_1' L_1^2}{l^2 - L_1^2} + \frac{D_2' L_2^2}{l^2 - L_2^2}.$$

Näherungsweise sei ferner:

$$L_1^2 = 0 \quad D_1' = \infty$$

und zur Abkürzung: $D_1' L_1^2 = B$, $D_2' L_2^2 = M$, $L_2^2 = L^2$.

Dann wird, da ferner $l = \frac{\lambda}{n}$ ist, Formel (1) zu einer Näherungsformel, die sich leicht zur Ausrechnung eignet:

$$n^2 = n_\infty^2 + B\frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{M}{\frac{\lambda^2}{n^2} - L^2}. \tag{2}$$

Von dieser Formel sind die zwei ersten Glieder rechts anzuwenden bei einfach dispergirenden Mitteln, wie etwa beim Alkohol; sie stimmt auch mit der Cauchy'schen zweiconstantigen Reihe. Gleichung (2) können wir auch schreiben:

$$n_\infty^2 L^2 - M - B - n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{n^2} - L^2 n^2 + BL^2 \frac{n^2}{\lambda^2} + \lambda^2 = 0,$$

oder wenn $n_\infty^2 L^2 - M - B = A$ ist:

$$A - n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{n^2} - L^2 n^2 + BL^2 \frac{n^2}{\lambda^2} + \lambda^2 = 0. \tag{3}$$

Durch diese Gleichung lassen sich, da die Wellenlängen bekannt sind, mittelst vier Beobachtungen von n die Constanten A, n_∞^2, L^2, BL^2 bestimmen. Die Gleichung (3) werde nun mit $\frac{n^2}{L^2}$ multiplicirt, nach n geordnet und nach n^2 aufgelöst. Dann ist:

$$n^2 = \tfrac{1}{2} \frac{A + \lambda^2}{L^2\left(1 - \frac{B}{\lambda^2}\right)} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[\frac{A + \lambda^2}{L^2\left(1 - \frac{B}{\lambda^2}\right)}\right]^2 - \frac{n_\infty^2 \lambda^2}{L^2\left(1 - \frac{B}{\lambda^2}\right)}}. \tag{4}$$

Mittelst der nach (3) gefundenen Constanten kann durch diese Formel (4) das zu jedem λ gehörige n berechnet werden[1]).

Für die Grenzwellenlänge des Absorptionsstreifens wird der Theorie zufolge der Radicand Null, so dass wir hier haben:

$$(A + \lambda^2)^2 = 4 n_\infty^2 \lambda^2 L^2 \left(1 - \frac{B}{\lambda^2}\right).$$

Bezeichnen wir die Grenzwellenlängen des Absorptionsstreifens mit λ_0, so bekommen wir die Relation:

$$\lambda_0^2 = -A + 2 n_\infty^2 L^2 \pm \sqrt{4 n_\infty^2 L^2 (n_\infty^2 L^2 - A - B)}.$$

Mit Berücksichtigung des Werthes von A wird:

$$\lambda_0^2 = (n_\infty L \pm \sqrt{M})^2 + B.$$

Nennen wir die Wellenlängen für die beiden Grenzen des Absorptionsstreifens λ_0' und λ_0'', so gelangen wir zu:

$$\begin{cases} \lambda_0'^2 - B = (n_\infty L + \sqrt{M})^2 \\ \lambda_0''^2 - B = (n_\infty L - \sqrt{M})^2. \end{cases} \tag{5}$$

Da wir es bei den vorliegenden Untersuchungen mit gleichmässigen Absorptionsstreifen zu thun haben, so ist

1) Dass diese Formel (4) der Wirklichkeit entspricht, habe ich numerisch nachgewiesen. Vgl. hierüber Ketteler, Pogg. Ann. CLX. p. 480.

kein Grund gegen den stetigen Verlauf der Wellenlänge im Absorptionsstreifen vorhanden; es wird also für die Mitte des Absorptionsstreifens $\sqrt{M}$ verschwinden und die Wellenlänge λ_m^2 daselbst gegeben sein durch:

$$\lambda_m^2 - B = n_\infty^2 L^2. \tag{6}$$

Verbindet man hiermit die von Kundt angegebene Regel, dass nämlich bei Anwendung verschiedener Lösungsmittel ein und derselben absorbirenden Substanz der Streifen um so mehr nach dem Roth hinrücke, je grösser für das betreffende Mittel die Constante B sei, so gelangt man leicht zu der Vermuthung, die eben entwickelte Grösse $(\lambda_m^2 - B)$ habe für die verschiedenen Lösungen einer Substanz einen wenigstens annähernd constanten Werth. Wenn dann auch für die einzelnen Medien n_∞ und L verschieden sind, so könnte ja das Product $n_\infty^2 L^2$, dem der Theorie zufolge $(\lambda_m^2 - B)$ gleich ist, für sämmtliche Lösungen eines absorbirenden Stoffes die Bedeutung einer optischen Constanten A^2 haben. Der Nachweis für:

$$\lambda_m^2 - B = A^2 \tag{7}$$

wäre dann auch eine Verificirung der Kundt'schen Regel in aller Strenge.

II.

Um die Verschiebung der Absorptionsstreifen einer experimentellen Untersuchung zu unterziehen, ist die erste Aufgabe eine passende Auswahl von Substanzen zu treffen, die einen ausgeprägten Absorptionsstreifen besitzen und sich in Flüssigkeiten von verschiedenem Dispersionsvermögen lösen lassen. Von den 25 mir zur Verfügung stehenden Substanzen eigneten sich indess nur einige wenige, da andere, wie Methylviolett einen zu breiten Absorptionsstreifen zeigen, bei noch anderen, Jodgrün, Purpurin, derselbe nicht scharf genug ausgeprägt ist. Es kommt nämlich hier wesentlich darauf an, dass bei möglichst geringer Quantität Farbstoff im lösenden Mittel

schon ein hinreichend scharfer, nicht allzu breiter Streifen erscheint, damit die Beobachtungsfehler nicht zu gross werden. Ferner kann auch bei grösserer Concentration leicht Einwirkung von anomaler Dispersion hinzutreten, und so das Urtheil getrübt werden. Deshalb muss man so wenig Farbstoff dem lösenden Mittel beifügen, dass man annehmen darf, mit dem Lösungsmittel allein zu operiren. Als Führer in der Auswahl der einschlägigen Substanzen dienten mir Hagenbach's Versuche über Fluorescenz und Kundt's Untersuchungen über anomale Dispersion, sowie einige Notizen in den letzten Jahrgängen der Berliner Berichte.

Die angewandten Lösungsmittel waren folgende sieben: 1. Wasser, 2. Aether, 3. Alkohol, 4. Terpentinöl, 5. Benzol, 6. Nitrobenzol, 7. Schwefelkohlenstoff.

Die Untersuchung der Flüssigkeit in Betreff des Ausdruckes $(\lambda_m{}^2 - B)$ zerfällt in zwei Theile: Zunächst muss die Wellenlänge λ_m gemessen werden; dann ist zweitens die Constante B der Dispersionsformel $n^2 = n_\infty^2 + B\frac{n^2}{\lambda^2}$ möglichst genau zu berechnen, und zu diesem Zwecke sind wenigstens zwei Brechungsexponenten zu bestimmen. Beide Untersuchungen geschahen mittelst eines vortrefflichen Meyerstein'schen Spectralapparates; die Theilung des grossen Kreises gab direct 6′ an, und mittelst der mit Mikroskop versehenen Micrometer konnte man 2 Secunden ablesen und bequem 1 Secunde schätzen. Die Wellenlänge der Mitte eines Absorptionsstreifens wurde mit Hülfe eines feinen Nobert'schen Gitters nach der Formel bestimmt: $i \,.\, \lambda = d \sin \vartheta_i$, wo i die Ordnungszahl des Seitenspectrums, d die Entfernung zweier homologer Punkte des Gitters und ϑ_i der zugehörige Beugungswinkel ist. Es konnte jedoch immer nur das erste Seitenspectrum benutzt werden, i war also $= 1$; im zweiten zeigte nämlich der Absorptionsstreifen schon eine solche Breite, dass auf seine Mitte nicht genügend scharf eingestellt werden konnte. Die Distanz d war 0,011 351 mm; sie wurde nach

derselben Formel mit Hülfe der Natriumflamme berechnet, wobei $\lambda_m = 0{,}000\,588\,9$ als bekannt angenommen war. Der Winkel ϑ ist, um Beobachtungsfehler möglichst zu vermeiden, jedesmal als die Hälfte des Entfernungswinkels des rechten Spectrums vom linken genommen. Die Flüssigkeit war bei diesen Versuchen in cylindrische Glasröhrchen von 80 mm Länge und 22 mm Durchmesser gefüllt, an deren Enden parallele Glasplatten aufgekittet waren. Diese verhältnissmässig bedeutende Grösse der Röhrchen hatte noch den Vortheil, dass schon bei geringer Concentration durch die Dicke der Flüssigkeitsschicht ein scharfer Streifen zum Vorschein kam. Als Lichtquelle diente hierbei eine Drummond'sche Kalklampe. Um die Erwärmung der Flüssigkeit möglichst zu vermeiden, ging das Licht der Lampe erst durch einen prismatischen Glaskasten mit planparallelen Wänden voll Wasser; ausserdem wurde jedes fremde Licht durch einen Metallschirm, der nur eine Oeffnung von der Breite des Spaltes hatte, sorgfältig von dem Apparate fern gehalten; hinter dem Schirme war das Röhrchen mit der zu untersuchenden Flüssigkeit vor dem Spalt des Collimatorrohres aufgestellt.

Um die bei dem zweiten Theile der Untersuchungen über die Constante B nöthigen Brechungsindices zu bestimmen, wurde die Methode der minimalen Ablenkung angewandt. Das zu diesem Zweck benutzte Hohlprisma war ein von Steinheil in München geschliffenes Stück Glas, vor dessen Durchbohrung planparallele Glasplatten aufgelegt waren, die infolge ihres feinen Schliffes in den meisten Fällen ohne weiteres Kitten hielten. Der brechende Winkel änderte sich jedoch immer beim Abnehmen der Platten, so dass er bei jedem Versuche von neuem bestimmt werden musste; er schwankte zwischen $60^0\,8'\,40''$ und $60^0\,11'\,48''$. Das Prisma wurde durch eine Umhüllung vor etwaigen Temperaturschwankungen des Beobachtungszimmers möglichst geschützt; die Aenderung der Temperatur konnte man an einem in dasselbe eingesetzten, in Fünftelgrade getheilten Thermometer ablesen. Ge-

messen wurden die Brechungsexponenten für die Natriumlinie und für die zwei ersten Linien einer Geissler'schen Wasserstoffröhre, die bekanntlich mit den Fraunhofer'schen Linien *D*, *C*, *F* des Sonnenspectrums coincidiren. Zwar genügt zur Ausrechnung der Grösse *B* schon die Kenntniss von zwei Brechungsexponenten; der dritte kann aber als Controle dienen.

Der Gang einer einzelnen Untersuchung war folgender. Von einer concentrirten Lösung einer absorbirenden Substanz wurden mit Hülfe eines Glasstäbchens einige Tropfen, meistens sechs bis zehn in eine Menge des betreffenden Lösungsmittels gebracht, die in jedem Falle das oben beschriebene Glasröhrchen füllen konnte, also immerhin eine verschwindend kleine Menge Farbstoff in einer grossen Quantität lösenden Mittels. Dann wurde mit dem Gitter das Fadenkreuz des Fernrohres auf die Mitte des Absorptionsstreifens eingestellt und der Beugungswinkel ϑ abgelesen. Diese Messung, das Fadenkreuz auf die Mitte eines schwarzen Streifens, zumal wenn derselbe noch einige Breite hat, einzustellen, ist sehr schwierig, und erst mit der Zeit kann das Auge hierin einige Fertigkeit erlangen. Die abgelesenen Werthe des Beugungswinkels hatten innerhalb der einzelnen Versuchsreihen noch immer Differenzen von 6 Secunden — in einzelnen seltenen Fällen von 7—; eine grössere Sicherheit zu gewinnen ist bei einer derartigen Untersuchung unmöglich. War der Beugungswinkel zur Genüge bekannt, so wurde die Flüssigkeit sofort in das Hohlprisma gegossen und die drei Brechungsindices bestimmt, nachdem die Temperatur im Prisma sich dadurch absolut constant erwies, dass für die drei beobachteten Linien während dreier rasch aufeinander folgender Versuche die Ablenkungswinkel nur um 4 oder 6 Secunden differirten; das Mittel aus diesen drei Ablesungen gab den Werth des gesuchten Winkels. So konnte man sicher sein, möglichst genau die Constante *B* zu erhalten; sie wurde mit den beiden für die Wasserstofflinien erhaltenen Exponenten nach der oben erwähnten Formel berechnet. Dass

diese Formel mit zwei Constanten nicht immer ausreicht, besonders bei stark dispergirenden Flüssigkeiten, ist bekannt, auch liefern vorliegende Untersuchungen dafür einen Beweis. Allein für meinen Zweck genügt, wie sich zeigen wird, die Anwendung von zwei Constanten. War dann mit Hülfe der beiden Wasserstofflinien n_∞ und B ermittelt, so konnte hiermit der Exponent für die D-Linie ausgerechnet werden. Die Wellenlängen, die zur Ausrechnung dienten, finden sich in den Messungen von Ångström [1]) und zwar wurde gesetzt in Tausendstel Millimetern:

$$\lambda_C = 0{,}656\,18, \qquad \lambda_D = 0{,}588\,90, \qquad \lambda_F = 0{,}480\,66.$$

Den Schluss einer jeden Untersuchung bildete die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Mischung.

Nach jedem Versuche wurden sowohl vom Prisma als auch vom Flüssigkeitsröhrchen die Platten abgenommen und die Gefässe sorgfältig gereinigt. Die Platten am Prisma mussten bei den Versuchen mit Wasser und Nitrobenzol ebenfalls angekittet werden.

Die folgende Tabelle enthält zunächst die Constanten und die Indices der reinen lösenden Mittel. Es finden sich in der ersten Columne die specifischen Gewichte, in der zweiten und dritten die Constanten B und n_∞, dann folgen die drei beobachteten Brechungsexponenten; in der mit Δ überschriebenen ist die Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Index der D-Linie in Einheiten der vierten Decimalen angegeben.

Tab. 1. Mittl. Temp. 15,5°.

Mittel.	Spec. Gew.	B	n_∞	n_C	n_F	n_D	Δ
Wasser	0,998	0,004 656 5	1,323 98	1,331 20	1,337 23	1,333 04	+0,5
Aether	0,718	0,004 677 5	1,347 85	1,355 25	1,361 41	1,357 06	+0,2
Alkohol	0,793	0,004 582 3	1,353 95	1,361 24	1,367 28	1,362 95	−0,4
Terpentinöl . .	0,874	0,006 947 1	1,458 42	1,470 36	1,480 38	1,473 18	−1,0
Benzol	0,879	0,011 153 0	1,480 06	1,499 65	1,516 29	1,503 90	−1,0
Nitrobenzol . .	1,190	0,015 924 0	1,516 57	1,545 41	1,570 41	1,552 14	+3,5
Schwefelkstff.	1,272	0,020 565 0	1,584 57	1,623 82	1,658 39	1,633 30	−4,5

1) Thalén, **Mémoire sur la détermination des longueurs d'onde.** Upsala 1868.

1. Chlorophyll.

Ich setzte zu einer ziemlichen Menge kleingeschnittener ollunderblätter, nur frischer Schösslinge, kleine Mengen n verschiedenen Flüssigkeiten, liess sie einige Tage ehen und filtrirte den Extract sorgfältig ab. Die Aus- ge zeigten nach Verlauf von drei Monaten in ihrem erhalten noch keine Aenderung; sämmtlich waren sie ark concentrirt. Der Streifen I im Roth, nach Hagen- ach, erscheint schon bei einigen Tropfen dieser concentrir- n Flüssigkeit in der nöthigen Menge Lösungsmittel mit inreichender Schärfe, und zwar bei allen Flüssigkeiten auf ieselbe Weise. Um Streifen IV und V klar hervorzu- ringen, musste etwas mehr Chlorophyll in das lösende Medium gebracht werden. Im allgemeinen blieben bei leicher Zuthat von Chlorophyll bei sämmtlichen Medien ie Streifen dieselben; nur zeigte sich bei Terpentinöl treifen *V* kaum genau, und bei Nitrobenzol war gar nicht uf ihn einzustellen, weil das Ende des Spectrums einen nklaren Charakter zeigte. Auf die Bemerkung Kundt's inzugehen, dass Streifen II zwischen *C* und *D* in alkoholi- habe,

Chlorophyll, Streifen I.

Tab. 2. Mittl. Temp. 17,9°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	λ_m	ϑ
Aether	—	1,353 61	1,359 64	1,355 34	−0,3	0,667 91	3°22′ 24″
Alkohol	—	1,361 84	1,367 94	1,363 89	+2,6	0,668 52	3°22′ 36″
Terpentinöl . . .	0,877	1,469 45	1,479 49	1,472 34	−0,3	0,673,24	3°24′ 1″
Benzol	0,879	1,497 05	1,513 62	1,501 72	−1,4	0,672 31	3°23′ 44″
Nitrobenzol . . .	1,186	1,545 79	1,570 87	1,552 55	−4,8	0,668 85	3°22′ 41″
Schwefelkohlstff.	—	1,621 10	1,655 44	1,630 46	−5,0	0,675 27	3°25′ 38″

Chlorophyll, Streifen IV und V.

Tab. 3. Mittl. Temp. 17°.

ösungs-mittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	Streifen IV. λ_m	Streifen IV. ϑ	Streifen V. λ_m	Streifen V. ϑ
ether . . .	0,727	1,354 97	1,361 03	1,356 73	+0,1	0,536 40	2°42′ 31″	0,503 97	2°32′41″
lkohol . . .	0,804	1,362 26	1,368 30	1,364 01	−0,1	0,536 68	2°42′ 36″	0,505 57	2°33′10″
erpentinöl	0,880	1,469 65	1,479 67	1,472 51	−0,4	0,540 69	2°43′ 49″	*0,507 38	*2°33′43″
enzol . . .	0,883	1,495 85	1,512 50	1,500 61	−1,4	0,539 43	2°43′ 26″	0,506 99	2°33′36″
itrobenzol	1,192	1,545 45	1,570 46	1,552 17	−5,0	0,540 15	2°43′ 39″	—	—
S_2	1,272	1,619 70	1,653 91	1,629 07	−4,5	0,545 42	2°45′ 15″	0,510 73	2°34′45″

2. Cyanin.

Der Absorptionsstreifen des Cyanins zwischen *C* und *D* ist hinlänglich bekannt. Ich löste wieder Cyanin in den untersuchten Flüssigkeiten. Die Lösung in Terpentinöl hatte am folgenden Tage ihre blaue Farbe verloren und war durchsichtig geworden. Ein eigenthümliches Verhalten zeigte die Nitrobenzollösung. Anfangs war sie blau gefärbt und hatte einen intensiven Streifen, der bald im ganzen erbleichte, bis er nach etwa fünf bis acht Minuten völlig verschwunden war. Die Mitte desselben verschob sich bei mehreren hinter einander gemachten Lösungen nicht bemerkbar. Nachdem die Flüssigkeit einige Stunden gestanden, nahm sie eine dunkelrothe Färbung an, die, obschon nur wenig Cyanin hineingekommen war, im Spectrum

1) Die mit einem Sternchen versehenen Werthe sind nicht so genau wie die anderen; cf. vor. Seite die Bemerkung über Terpentinöl und Nitrobenzol.

nur Roth durchliess; ebendeshalb konnten auch ihre Brechungsexponenten nicht bestimmt werden.

Cyanin.

Tab. 4. Mittl. Temp. 14,6°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	λ_m	ϑ
Aether	0,730	1,355 41	1,361 95	1,357 21	−0,9	0,599 45	3° 1′ 38″
Alkohol	0,804	1,362 10	1,368 16	1,363 88	+0,1	0,597 85	3° 1′ 9″
Benzol	0,886	1,496 55	1,513 27	1,501 26	−0,6	0,612 03	3° 5′ 27″
Nitrobenzol . . .	1,193	—	—	—	—	0,620 33	3° 7′ 58″
Schwefelkohlstff.	1,274	1,622 69	1,657 07	1,632 04	−5,9	0,623 74	3° 9′ —″

3. Chinizarin.

Eine Probe Chinizarin von Prof. A. Baeyer in München löste sich leicht in Aether, Alkohol und Schwefelkohlenstoff; auch kann man einige Tropfen einer concentrirten alkoholischen Lösung zu Terpentinöl, Benzol und Nitrobenzol zusetzen, ohne am Spectrum etwas zu ändern. Ich musste hier und an anderen Stellen zu diesem Mischungsmittel greifen, um die Zahl der Lösungsmittel zu vergrössern. Chinizarin färbt die Flüssigkeit goldgelb und zeigt keine namhafte Fluorescenz. Bei ziemlicher Concentration hat es eine Absorption des Spectrums von der Mitte zwischen *D* und *E* ungefähr an bis zum violetten Ende; bei Verdünnung tritt ein Streifen von *E* bis ungefähr zum Violett auf, der bei weiterem Verdünnen in drei zerfällt. Der erste, bei *E* liegend, ist scharf ausgesprochen und nicht breit; nicht weit entfernt läuft ihm parallel ein zweiter, viel schwächerer; dann findet sich noch ein dritter am Anfang des Blau, stärker wie der zweite, aber unbestimmt; zwischen diesen ist im allgemeinen eine schwache Absorption zu verzeichnen, das Violett geht ungehindert durch. Untersucht wurde der erste Streifen; bei ihm ist der Unterschied der Wellenlängen für Aether und Nitrobenzol $= \frac{\lambda_D - \lambda_E}{5}$.

Chinizarin.

Tab. 5. Mittl. Temp. 15,6°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	λ_m	ϑ
Aether	0,802	1,353 80	1,358 91	1,355 51	—1,9	0,518 26	2°37′ 1′
Alkohol	0,726	1,361 80	1,368 12	1,363 60	—0,4	0,518 10	2°36′ 58″
Terpentinöl . . .	0,883	1,467 37	1,473 90	1,470 24	—0,1	0,521 62	2°38′ 2′
Benzol	0,874	1,484 67	1,504 14	1,489 05	—7,3	0,525 25	2°39′ 8″
Nitrobenzol . . .	1,163	1,533 50	1,557 18	1,539 46	—7,1	0,527 17	2°39′ 43″
Schwefelkohlenst.	1,266	1,620 73	1,655 70	1,630 16	—6,1	0,530 14	2°40′ 37″

4. Fuchsin.

Fuchsin zeichnet sich bekanntlich durch einen breiten, scharfen Streifen aus, der sich durch Verdünnen leicht auf eine für die vorliegenden Beobachtungen hinreichende Enge bringen lässt. Die Zusätze von alkoholischer Lösung zu Schwefelkohlenstoff, Benzol und Terpentinöl machten den Streifen völlig verwaschen; die letztgenannten Flüssigkeiten zeigten eine violette Färbung, während die alkoholische Lösung roth war. Die Untersuchung musste sich also beschränken auf Alkohol, Wasser und Nitrobenzol.

Fuchsin.

Tab. 6. Mittl. Temp. 17,2°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	λ_m	ϑ
Wasser	0,995	1,331 30	1,337 69	1,333 48	+0,9	0,547 23	2°45′ 48″
Alkohol	0,802	1,361 93	1,367 96	1,363 74	+1,4	0,555 26	2°48′ 14″
Nitrobenzol	1,190	1,545 83	1,570 88	1,552 57	—5,0	0,554 05	2°47′ 52″

5. Eosin.

Das Eosin kann man direct in Alkohol, Wasser und Nitrobenzol lösen; ausserdem setzte ich etwas alkoholische Lösung zu Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl, ohne dass im Spectrum eine Aenderung eintrat.

Stark concentrirt lässt Eosin [1]) nur das Roth durch;

1) Ebenso Lommel: Ueber Fluorescenz, Erlang. Sitzungsber. Juli 1876.

bei Verdünnung zieht sich die Absorption immer mehr gegen das violette Ende; man sieht einen scharfen Streifen vom letzten Grün bis ins Blaue hinein; noch weiter verdünnt theilt sich derselbe so, dass im letzten Grün ein nicht gar breiter, scharf ausgeprägter Streif entsteht, dem zur Seite eine ebenso breite dunkle Stelle liegt, die ihrerseits wieder nach dem blauen Ende hin von einem starken, aber unbestimmten Streifen begrenzt ist; das übrige Ende des Spectrums, das letzte Blau und ganze Violett geht ungehindert durch. Eosin zeigte die stärkste Verschiebung; es ist nämlich die Differenz der Wellenlängen von Wasser und Nitrobenzol grösser als $\frac{\Delta}{10}$ $(\lambda_D - \lambda_E)$, also nahe gleich $\frac{\lambda_D - \lambda_E}{2}$.

Tab. 7. Eosin. Mittl. Temp. 15,7°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	λ_m	ϑ
Wasser	0,995	1,331 42	1,337 41	1,333 27	+0,8	0,519 58	2°37′ 25″
Alkohol	0,802	1,362 96	1,369 00	1,364 71	−0,2	0,530 80	2°40′ 49″
Terpentinöl . . .	0,886	1,467 72	1,477 61	1,470 57	−0,5	0,540 36	2°43′ 43″
Nitrobenzol . . .	1,193	1,545 71	1,570 80	1,552 44	−5,2	0,547 01	2°45′ 44″
Schwefelkohlenst.	1,263	1,617 05	1,658 02	1,626 31	−7,2	0,541 06	2°43′ 55″

6. Magdalaroth.

Das Verhalten der einzelnen Lösungen war sehr verschieden, und darum ist dieser Stoff doppelt interessant. Es wurden einige Tropfen alkoholischer Lösung zu sämmtlichen Flüssigkeiten geschüttet, worauf folgende Spectra entstanden:

a) In alkoholischer Lösung, sowie in Nitrobenzol und Terpentinöl hat bei ziemlicher Verdünnung das Magdalaroth einen nicht sehr breiten scharfen Absorptionsstreifen im Hellgrünen, etwas nach dem Blauen zu einen schwächern, schmalen Streifen, bei grösserer Concentration nimmt jeder symmetrisch zu, der schwache wird breiter, ohne an Schärfe zu gewinnen; der Hauptstreifen bleibt scharf begrenzt; sind beide aneinandergerückt, so bildet der zweite eine dunkle Schattirung des ersten; beide haben nun nahezu gleiche Breite; alsdann sieht man nur Roth, Gelb, das

letzte Blau und Violett; in Hinsicht auf Verschiebung habe ich im ersten Stadium beide Streifen I und II untersucht.

b) In Benzol und Schwefelkohlenstoff bewirken Tropfen alkoholischer Lösung ein ganz anderes Spectrum. Dasselbe hat drei Absorptionsstreifen, zwei starke, breiter wie I in Alkohol, die ich I und II nennen will; gegen das Ende des Blau ist noch ein dritter, ähnlich dem zweiten unter a) beschriebenen. Bei Vermehrung der Concentration ziehen sich zuerst die zwei ersten zusammen, und später vereinigt sich der dritte mit ihnen, doch erst bei ziemlicher Concentration.

c) Das Spectrum der Lösung in Aether hat zwei gleich breite, aber unbestimmt ausgesprochene Streifen, die verschieden sind von denjenigen des Schwefelkohlenstoffs, weil sie näher zusammenliegen und viel breiter sind; mit dem Alkohol sind sie aus demselben Grunde nicht zusammenzubringen. Die mittleren Wellenlängen mögen etwa sein: für den ersten Streifen $\lambda_m = 0{,}566\,47$, für den zweiten $\lambda_m = 0{,}539\,08$.

d) Bei der Lösung in Wasser zeigt sich nur ein breiter Absorptionsstreif, der beim Verdünnen sich nicht in zwei zerlegen lässt; obschon derselbe ziemlich scharf begrenzt ist, kann man wegen seiner Breite doch nicht genau einstellen; gefunden wurde $\lambda_m = 0{,}539\,43$.

Zur vollständigen Untersuchung konnten nur die unter a und b beschriebenen Spectra gezogen werden.

Demgemäss zerfallen die Lösungen des Magdalaroth in zwei Gruppen: Gruppe a) Alkohol, Terpentinöl, Nitrobenzol. Gruppe b) Benzol, Schwefelkohlenstoff. Diese Bezeichnung wird im Folgenden beibehalten werden.

Tab. 8. Magdalaroth, Gruppe a. Mittl. Temp. 15,6°.

Lösungen.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ	Streifen I. λ_m	Streifen I. ϑ	Streifen II. λ_m	Streifen II. ϑ
Alkohol . .	0,801	1,361 93	1,367 99	1,363 79	+0,9	0,568 78	2°52′ 2″	0,530 58	2°40′45″
Terpentinöl	0,887	1,471 21	1,481 30	1,474 14	−0,4	0,573 12	2°53′ 39″	0,534 70	2°42′—
Nitrobenzol	1,193	1,546 37	1,571 48	1,553 10	−5,0	0,566 04	2°51′ 30″	0,526 51	2°39′31″

Magdalaroth, Gruppe b.

Tab. 9. Mittl. Temp. 13,2°.

Lösungsmittel.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	J	Streifen I. λ_m	Streifen I. δ	Streifen II. λ_m	Streifen II. δ
Benzol . .	0,883	1,496 65	1,515 23	1,503 30	—0,5	0,584 13	2°56′ 59″	*0,541 35	2°44 1′
CS_2	1,275	1,621 07	1,655 45	1,630 56	—4,5	0,585 38	2°57′ 22″	*0,542 40	2°44 20

7. Didym.

Die Didymsalze sind nur in Wasser löslich. Man kann jedoch den Brechungsexponenten des Wassers durch Zusatz von Chlorzink u. dgl. m. erhöhen[1]. Das Chlordidym lässt sich unter allen Verhältnissen mit einer Chlorzinklösung mischen und das salpetersaure mit einer Lösung von salpetersaurem Quecksilberoxyd, dessen Exponent auch bedeutend über dem des Wassers liegt. Ich untersuchte Chlordidym, schwefelsaures und salpetersaures Didym erst alle drei in Wasser, dann Chlordidym in einer concentrirten Chlorzinklösung; mischte darauf $\frac{1}{2}$, dieser Chlorzinklösung mit $\frac{1}{2}$, Wasser, und dann $\frac{1}{2}$, Chlorzinklösung mit $\frac{1}{2}$, Wasser; ebenso verfuhr ich mit dem salpetersauren Didym in Wasser und einer concentrirten Lösung von salpetersaurem Quecksilberoxyd. Die Mischungen geschahen mittelst eines calibrirten Rohres. Die Lösungen von Chlorzink und salpetersaurem Quecksilber sollten gesättigt sein, jedoch waren die Brechungsexponenten hierfür nicht gross genug. Hier wurde keine Verschiebung bemerkt. Sowohl bei den drei Lösungen in reinem Wasser als auch in allen Mischungen waren die beobachteten Streifen an derselben Stelle; die Beugungswinkel δ, obwohl bei jeder dieser zehn Mischungen vier zehen gemessen, differirten bei allen diesen Messungen nur um 7 Secunden — der Ablesungen waren im ganzen 42 —; also war die Grenze der Fehler in den früheren einzelnen Versuchsreihen nicht überschritten. Speciell wurden hier von den bekannten Absorptionsstreifen des Didyms zwei beobachtet, bei denen ist

I $\lambda_m = 0{,}577\,79$. II $\lambda_m = 0{,}523\,68$.

1 Wüllner, Pogg. Ann. CXXXII, p. 1.

Didym.

Tab. 10. Mittl. Temp. 13,2°.

Lösungen.	Spec. Gew.	n_C	n_F	n_D	Δ
$DiSO_4$ in Wasser	1,007	1,333 37	1,339 82	1,335 14	+0,3
$DiCl_2$ in Wasser	1,007	1,334 14	1,340 19	1,335 99	+0,8
$DiCl_2$, $ZnCl_2$ conc.	1,752	1,470 34	1,481 02	1,473 50	+0,5
$DiCl_2$, $^2/_3$ $ZnCl_2$, $^1/_3$ Aq	1,501	1,425 76	1,434 81	1,428 53	+1,2
$DiCl_2$, $^1/_3$ $ZnCl_2$, $^2/_3$ Aq	1,282	1,387 18	1,395 03	1,389 47	+0,0
$Di(NO_3)_2$, Aq	1,010	1,334 21	1,340 23	1,336 07	+0,9
$Di(NO_3)_2$, $Hg(NO_3)_2$ conc. . . .	1.883	1,427 22	1,437 57	1,430 26	+0,3
$Di(NO_3)_2$, $^2/_3$ $Hg(NO_3)_2$, $^1/_3$ Aq .	1,584	1,397 63	1,406 55	1,400 29	+0,5
$Di(NO_3)_2$, $^1/_3$ $Hg(NO_3)_2$, $^2/_3$ Aq .	1,361	1,373 78	1,381 39	1,375 90	−1,0

III.

Es fragt sich nun, in welcher Weise diese Resultate eine Erklärung finden. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass die Grösse $\lambda_m^2 - B = \Delta^2$ für die verschiedenen Lösungsmittel einer Substanz mit Absorptionsstreifen keine Constante ist und somit die Regel, wie ich sie aus dem Kundt'schen Ausspruch folgerte und meinen Untersuchungen zu Grunde legte, keine Gültigkeit hat. Die eigentlichen Zahlenwerthe für Δ^2 werden in den letzten Tabellen mitgetheilt. Dass jedoch dieser Ausdruck irgendeinem Gesetze unterworfen, fiel mir von Anfang meiner Untersuchungen auf, weil für die zuerst beobachteten drei Streifen des Chlorophylls Δ^2 dieselbe Reihenfolge einhielt, während beim Cyanin sich diese umkehrte[1]).

Eine Näherungsformel für das Gesetz, dem Δ^2 folgt, kann man, gestützt auf letzteres Resultat, in folgender Gestalt aufstellen:

$$\Delta^2 = \alpha + \frac{\alpha'}{f(\lambda_m^2 - B)}, \quad (1)$$

1) Eine Formel $\Delta^2 = \alpha + \beta \frac{\sqrt{B}}{n_\infty^2 - 1}$, wo α und β Constanten sind, die den Verlauf von Δ^2 mit dem analogen Verlauf des durch die Function $\frac{\sqrt{B}}{n_\infty^2 - 1}$ auszudrückenden Dispersionsvermögens verknüpft, fügt sich den Beobachtungen nicht genügend an.

worin unter $f(\lambda_m^2 - B)$ eine Function zu verstehen ist, die innerhalb der Fehlergrenzen nahezu mit $(\lambda_m^2 - B)$ identisch wird, α und α' zwei Constanten bezeichnen.

Eine Function $f(\lambda_m^2 - B)$, die für unsere Zwecke ausreicht, wird nun leicht gefunden. Ist n_m der zu λ_m zugehörige Brechungsexponent, so haben wir nach der abgekürzten (Cauchy'schen) Formel:

$$n_m^2 = n_\infty^2 + B\frac{n_m^2}{\lambda_m^2} \quad \text{oder} \quad \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n_\infty^2} = \frac{B}{\lambda_m^2 - B}.$$

Da diese Dispersionsformel immer nur angenähert richtige Werthe für die Exponenten gibt, und wir auch für die Grösse A^2 nur ein angenähertes Gesetz entwickeln wollen, so dürfen wir mit hinreichender Genauigkeit die gesuchte Function setzen:

$$f(\lambda_m^2 - B) = \frac{B n_\infty^2}{n_m^2 - n_\infty^2}, \text{ also:}$$

$$A^2 = \alpha + \alpha' \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{B n_\infty^2}, \tag{2}$$

Bezeichnet λ_1 die Wellenlänge eines in der Nähe des Absorptionsstreifens gelegenen festen Strahles, so kann man auch schreiben:

$$A^2 = \alpha + \frac{\alpha'}{\lambda_1^2} \cdot \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n_\infty^2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{B}. \tag{3}$$

Zu λ_1 gehöre der Brechungsindex n_1, so haben wir:

$$n_1^2 = n_\infty^2 + B\frac{n_1^2}{\lambda_1^2}.$$

Wird hieraus $\frac{\lambda_1^2}{B}$ in Gleichung (3) eingesetzt, so folgt:

$$A^2 = \alpha + \frac{\alpha'}{\lambda_1^2} \cdot \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n_1^2 - n_\infty^2} \cdot \frac{n_1^2}{n_\infty^2}.$$

Da λ_1 irgendwelche beliebige, aber feste, d. h. constante Wellenlänge sein soll, darf man auch setzen:

$$\alpha' = \alpha'' \lambda_1^2. \tag{4}$$

Somit gestaltet sich unsere Gleichung also:

$$A^2 = \alpha + \alpha'' \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n_1^2 - n_\infty^2} \cdot \frac{n_1^2}{n_\infty^2}. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck gibt A^2 mit hinreichender Genauigkeit wieder, wovon ich mich durch Rechnung in jeder Hinsicht überzeugt habe[1]). Man kann jedoch die theoretische Betrachtung noch anders gestalten.

Denke man sich nämlich eine unendlich geringe Menge Farbstoff in einem dispersionsfreien Lösungsmittel gelöst, und es habe für diese Mischung die Mitte des Absorptionsstreifens die Wellenlänge λ'_m. Ein Lichtstrahl, dessen Schwingungen durch die so definirte Wellenlänge λ'_m charakterisirt seien, falle auf dasjenige Gemisch von Farbstoff und dispergirendem Lösungsmittel, das gerade zur Untersuchung vorliegt und habe hier den Exponenten n'_m, so dass dieser bestimmt ist durch die Gleichung:

$$n'^2_m = n^2_\infty + B \frac{n'^2_m}{\lambda'^2_m}.$$

Alsdann kann man in (5) an Stelle der bisherigen Grössen λ_1 und n_1 einführen λ'_m und n'_m, so dass sich schreibt:

$$A^2 = \alpha + \beta \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n'^2_m - n^2_\infty} \cdot \frac{n'^2_m}{n^2_\infty}, \tag{6}$$

wo jetzt zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\beta = \frac{\alpha'}{\lambda'^2_m}. \tag{6a}$$

Die Grösse λ'_m, durch die n'_m berechnet wird, findet

---

1) Wenn man n_m und n_1 nach der Formel mit drei Constanten berechnet:

$$n^2 = \frac{n^2_\infty}{1 - \frac{B}{\lambda^2} - \frac{C}{\lambda^4}},$$

so bleibt das Resultat dasselbe, wie bei Anwendung von zwei Constanten, wie ich dies bei Chlorophyll I nachgerechnet habe.

sich durch folgenden Schluss. In Gleichung (6) wird für einen dispersionsfreien Raum $\Delta^2 = \lambda_m^2 - B$ zu $\lambda_m'^2$, weil in einem solchen Medium $B = 0$ wird. Gleichzeitig hat in diesem dispersionsfreien Raum n_m und n_m' denselben Werth, so dass beim Uebergange vom dispergirenden ins dispersionsfreie Medium der Factor von β der Einheit gleichkommt. Es ist also:

$$\lim(\Delta^2) = \lim(\lambda_m^2 - B) = \lambda_m'^2 = \alpha + \beta \quad \text{für} \quad B = 0, \text{ also:}$$

$$\lambda_m'^2 = \alpha + \beta. \tag{7}$$

Die Verbindung der Gleichungen (6a) und (7) liefert dann weiter:

$$\beta = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha'}. \tag{8}$$

Somit haben wir n_m' und λ_m' durch die Relationen bestimmt:

$$\begin{cases} \lambda_m'^2 = \alpha + \beta = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha'}, \\ n_m'^2 = \dfrac{n_\infty^2}{1 - \dfrac{B}{\lambda_m'^2}} = \dfrac{n_\infty^2}{1 - \dfrac{B}{\alpha + \beta}}. \end{cases} \tag{9}$$

Mit Hülfe von Gleichung (2) sind also mittelst zweier Beobachtungen die Constanten α und α' zu berechnen; nämlich in:

$$\Delta^2 = \alpha + \alpha' \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{B n_\infty^2},$$

kennt man λ_m durch directe Messung, B durch Rechnung, folglich die linke Seite $\Delta^2 = \lambda_m^2 - B$; n_m findet man ebenfalls nach der Dispersionsformel aus den experimentell gefundenen Werthen von λ_m [1]). Da ebenfalls n_∞ durch Rechnung bekannt ist, so haben wir auch den Ausdruck $\frac{n_m^2 - n_\infty^2}{B n_\infty^2}$. Bildet man denselben für zwei Lösungsmittel einer Sub-

1) Es wurde zwar versucht n_m direct zu messen, allein für die Mitte eines Absorptionsstreifens ist die Einstellung nach der minimalen Ablenkungsmethode durchaus ungenau.

stanz, ebenso die entsprechenden A^2, so ergeben sich aus den zwei hierzu gehörigen Gleichungen α und α', und durch diese nach (8) β und nach (9) λ'_m und n'_m. Somit sind die Data bekannt, die zur Bestätigung der Formel (6) dienen.

Bevor jedoch die Resultate der Rechnung mitgetheilt werden, muss man sich erst über die Grenzen der Beobachtungsfehler klar werden. Dieselben können eintreten theils bei der Bestimmung der Wellenlängen, theils beim Messen der minimalen Ablenkungswinkel. Die meisten sind unbedingt eine Folge der ersten Ursache; denn es ist schwer, auch bei noch so vollkommenen Apparaten das Fadenkreuz auf die Mitte eines dunkeln Streifens einzustellen, zumal wenn derselbe noch einigermaassen breit ist. Auch sind, wie schon gesagt, die mittleren Ablesungsfehler der Beugungswinkel bei einem einzelnen Versuche 6″ geblieben, und Differenzen von 6″ im Beugungswinkel verursachen der Formel $i\lambda = d \sin \vartheta_i$ gemäss eine Aenderung von drei Einheiten der vierten Decimale. Weniger entstehen Beobachtungsfehler beim Bestimmen der Indices, weil mit ziemlicher Sicherheit auf eine helle Linie eingestellt werden kann. Auch wurde vor jeder Untersuchung genau auf die senkrechte Stellung des Prismas geachtet und die Fernröhre jedesmal regulirt, so dass hier in der vierten Decimalen wohl kaum noch Fehler zu erwarten sind.

Da n_m immer mittelst der Dispersionsformel ausgerechnet ist, könnten diese Werthe wohl auf der vierten Stelle in zwei Einheiten von ihrer wirklichen Grösse differiren. Jedoch habe ich mich durch Rechnung überzeugt, dass ein Fehler in λ_m, der grösser angenommen ist, als die wirklichen Beobachtungsfehler, das in der zu prüfenden Formel (6) enthaltene n_m so wenig ändert, dass es für dieselbe ganz gleichgültig ist, ob zur Gewinnung von n_m der richtige Werth von λ_m benutzt wurde, oder selbst ein ziemlich fehlerhafter. Nehmen wir noch einige Unvollkommenheiten der Apparate hinzu, so dürfen wir bei Ausrechnung der Formel (6) und deren Auflösung nach λ_m immerhin Diffe-

renzen von drei bis vier Einheiten auf der vierten Stelle erwarten.

Nach dieser Betrachtung können wir die Resultate der Schlusstabellen beurtheilen. Zur Aufstellung derselben wurden, wie eben angegeben, aus zwei Beobachtungen bei einem Farbstoff die Constanten α und α' berechnet, dann hiermit β, λ'_m, n'_m; da nun die rechte Seite der Gleichung (6) bekannt ist, so ergibt sich durch Addition von B der berechnete Werth λ_m^2. Die Tabellen geben die Constanten α und β, deren letzte immer negativ ist, und die Grösse λ'_m; in den Columnen finden sich n_m, n'_m, n_∞, B; dann die Zahlen für die beobachteten Grösssen $\Delta^2 = \lambda_m^2 - B$; in den drei letzten sind enthalten die beobachteten und nach (6) berechneten Werthe für λ_m und schliesslich deren Differenzen Δ in Einheiten der vierten Decimalen. Die Substanzen sind geordnet nach der Grösse der Differenz:

$$\Delta^2_{\text{max.}} - \Delta^2_{\text{min.}},$$

so dass diejenige Substanz, bei der diese Differenz den grössten Werth hat, zuerst steht und so fort. Innerhalb der einzelnen Tabellen sind die Lösungsmittel nach fallenden Werthen für Δ^2 geordnet.

1. Eosin.

Tab. 11. $\alpha = 0{,}562\,12$ $\beta = -0{,}268\,33$ $\lambda'_m = 0{,}542\,02$.

Lösungsmittel.	n_m	n'_m	n_∞	B	Δ^2	λ_m Beob.	λ_m Ber.	Δ
Terpentinöl	1,474 38	1,473 33	1,455 88	0,006 916 4	0,285 08	0,540 36	0,540 79	−4,3
Nitrobenzol	1,558 96	1,559 75	1,516 76	0,015 970 0	0,283 25	0,547 01	0,547 46	−4,5
Alkohol . .	1,366 83	1,366 37	1,355 72	0,004 559 9	0,277 19	0,530 80	0,530 67	+1,3
CS_2 . . .	1,640 42	1,640 14	1,570 58	0,024 393 0	0,268 32	0,541 06	0,541 09	−0,3
Wasser . .	1,335 74	1,334 80	1,324 25	0,004 626 6	0,265 31	0,519 58	0,519 34	+2,4

2. Magdalaroth, Gruppe a, Streifen I.

Tab. 12. $\alpha = 0{,}639\,90$ $\beta = -0{,}320\,95$ $\lambda'_m = 0{,}564\,75$.

Terpentinöl	1,475 26	1,475 76	1,458 40	0,007 465 8	0,321 01	0,573 12	0,573 11	+0,1
Alkohol . .	1,364 36	1,364 50	1,354 66	0,004 583 1	0,318 93	0,568 78	0,568 75	+0,3
Nitrobenzol	1,556 62	1,556 90	1,517 36	0,015 992 0	0,304 40	0,566 03	0,566 05	+0,2

3. Magdalaroth, Gruppe a, Streifen II.

Tab. 13. $\alpha = 0{,}539\,66$ $\beta = -0{,}278\,96$ $\lambda'_m = 0{,}510\,59$.

Lösungsmittel.	n_m	n'_m	n_∞	B	A^2	λ_m Beob.	λ_m Ber.	Δ
Terpentinöl	1,477 82	1,479 74	1,458 40	0,007 465 8	0,278 44	0,534 70	0,535 07	−3,7
Alkohol . .	1,365 82	1,366 72	1,354 66	0,004 583 1	0,276 93	0,530 58	0,530 72	−1,4
Nitrobenzol	1,563 12	1,566 16	1,517 36	0,015 992 0	0,261 22	0,526 51	0,526 54	−0,3

4. Cyanin.

Tab. 14. $\alpha = 0{,}774\,55$ $\beta = -0{,}363\,38$ $\lambda'_m = 0{,}641\,22$.

CS_2 . . .	1,627 03	1,624 61	1,583 14	0,020 471 0	0,368 58	0,623 74	0,623 47	+2,7
Benzol . .	1,499 54	1,497 48	1,476 92	0,011 208 0	0,363 38	0,612 03	0,612 01	+0,2
Aether . .	1,356 98	1,353 73	1,344 50	0,004 954 5	0,354 39	0,599 45	0,599 26	+1,9
Alkohol . .	1,363 60	1,361 19	1,354 88	0,004 565 6	0,352 87	0,597 85	0,597 16	+6,9

5. Chlorophyll, Streifen I.

Tab. 15. $\alpha = 0{,}868\,48$ $\beta = -0{,}441\,98$ $\lambda'_m = 0{,}653\,05$.

Terpentinöl	1,458 68	1,469 67	1,457 57	0,006 938 7	0,446 26	0,673 24	0,673 28	− 0,4
Alkohol . .	1,361 56	1,361 90	1,354 52	0,004 613 5	0,442 28	0,668 52	0,668 41	+1,1
Aether . .	1,383 35	1,353 67	1,346 38	0,004 586 2	0,441 58	0,667 91	0,668 00	−0,9
Benzol . .	1,496 11	1,497 21	1,477 63	0,011 101 0	0,440 89	0,672 31	0,672 36	−0,5
CS_2 . . .	1,618 81	1,621 50	1,582 09	0,020 478 6	0,435 52	0,675 27	0,675 37	−1,0
Nitrobenzol	1,544 67	1,546 07	1,516 86	0,015 965 0	0,431 39	0,668 85	0,668 90	−0,5

6. Fuchsin.

Tab. 16. $\alpha = 0{,}595\,82$ $\beta = -0{,}294\,88$ $\lambda'_m = 0{,}548\,58$.

Alkohol . .	1,364 25	1,365 00	1,363 60	0,004 673 6	0,303 64	0,555 26	0,555 23	+0,3
Wasser . .	1,334 80	1,334 75	1,324 50	0,004 602 4	0,294 87	0,547 23	0,547 11	+1,2
Nitrobenzol	1,557 94	1,558 80	1,519 64	0,015 946 0	0,291 02	0,554 05	0,553 93	+1,2

7. Chlorophyll, Streifen IV.

Tab. 17. $\alpha = 0{,}557\,35$ $\beta = -0{,}283\,09$ $\lambda'_m = 0{,}523\,69$.

Terpentinöl	1,475 38	1.476 58	1,457 72	0,006 958 5	0,285 39	0,540 69	0,540 64	+0,5
Alkohol . .	1,365 88	1,366 43	1,355 01	0,004 567 4	0,283 46	0,536 68	0,537 07	−3,9
Aether . .	1,358 61	1,359 15	1,344 61	0,004 599 4	0,283 14	0,536 40	0,536 38	+0,2
Benzol . .	1,505 53	1,507 36	1,476 54	0,011 000 0	0,279 89	0,539 43	0,539 87	−4,3
CS_2 . . .	1,638 04	1,643 26	1,580 82	0,020 419 0	0,277 07	0,545 42	0,545 79	−3,7
Nitrobenzol	1,559 76	1,562 65	1,552 67	0,015 931 0	0,275 83	0,540 15	0,540 18	−0,3

8. Chlorophyll, Streifen V.

Tab. 18. $\alpha = 0{,}492\,80$ $\beta = -0{,}248\,40$ $\lambda'_m = 0{,}494\,36$.

Lösungsmittel.	n_m	n'_m	n_∞	B	A^2	λ_m Beob.	λ_m Ber.	Δ
Terpentinöl .	1,477 80	1,478 93	1,457 72	0,006 958 5	0,250 48	0,507 38	0,507 37	—0,1
Alkohol . .	1,367 28	1,367 85	1,355 01	0,004 567 4	0,251 03	0,505 57	0,505 50	+0,7
Aether . .	1,360 08	1,360 57	1,344 61	0,004 599 4	0,249 39	0,503 97	0,503 95	+0,2
Benzol . .	1,509 45	1,511 26	1,476 54	0,011 000 0	0,245 95	0,506 99	0,507 00	—0,1
CS_2 . . .	1,646 58	1,651 81	1,580 82	0,020 419 0	0,240 43	0,510 73	0,510 62	+1,1

9. Magdalaroth, Gruppe b, Streifen I.

Tab. 19. $\alpha = 0{,}652\,13$ $\beta = -0{,}330\,06$ $\lambda'_m = 0{,}567\,50$.

Benzol . .	1,503 87	1,505 38	1,479 22	0,011 096 0	0,330 11	0,584 13	0,584 09	+0,4
CS_2 . . .	1,631 61	1,634 93	1,582 23	0,020 435 0	0,322 23	0,585 38	0,585 36	+0,2

10. Magdalaroth, Gruppe b, Streifen II.

Tab. 20. $\alpha = 0{,}555\,73$ $\beta = -0{,}290\,78$ $\lambda'_m = 0{,}514\,72$.

Benzol . .	1,508 04	1,511 20	1,479 22	0,011 096 0	0,281 97	0,541 35	0,541 84	—4,9
CS_2 . . .	1,640 20	1,647 00	1,582 23	0,020 435 0	0,273 76	0,542 40	0,542 80	—4,0

11. Didym, Streifen I.

Tab. 21. $\alpha = 0{,}655\,63$ $\beta = -0{,}326\,40$ $\lambda'_m = 0{,}573\,78$
λ_m (beob.) = 0,577 79 (cf. p. 404).

Lösung.	n_m	n'_m	n_∞	B	A^2	λ_m Ber.	Δ
$DiSO_4$ in Wasser . .	1,335 46	1,335 59	1,326 26	0,004 584 9	0,329 26	0,577 81	—0,2
$Di(NO_3)_2$ in Wasser .	1,336 33	1,336 46	1,327 01	0,004 635 9	0,329 21	0,577 76	+0,3
$DiCl_2$ in Wasser . .	1,336 26	1,336 55	1,326 89	0,004 664 5	0,329 18	0,577 85	—0,6
$Di(NO_3)_2$, $^1/_3 Hg(NO_3)_2$, $^2/_3$ Aq	1,376 45	1,376 61	1,364 71	0,005 668 8	0,328 19	0,577 80	—0,1
$DiCl_2$, $^1/_3 ZnCl_2$, $^2/_3$ Aq	1,389 93	1,390 11	1,377 83	0,005 790 5	0,328 06	0,577 86	—0,7
$DiCl_2$, $^2/_3 ZnCl_2$, $^1/_3$ Aq	1,428 93	1,429 13	1,414 96	0,006 479 4	0,327 36	0,577 77	+0,2
$Di(NO_3)_2$, $^2/_3 Hg(NO_3)_2$, $^1/_3$ Aq	1,400 75	1,400 95	1,387 01	0,006 520 1	0,327 33	0,577 74	+0,5
$Di(NO_3)_2$, $Hg(NO_3)_2$ conc.	1,430 84	1,431 07	1,414 93	0,007 384 3	0,326 46	0,577 79	+0,0
$DiCl_2$, $ZnCl_2$ conc.	1,474 07	1,474 30	1,457 64	0,007 400 7	0,326 45	0,577 78	+0,1

12. Didym, Streifen II.

Tab. 22. $\alpha = 0{,}535\,81$ $\beta = -0{,}266\,64$ $\lambda'_m = 0{,}518\,81$;
λ_m (beob.) = 0,523 38 (cf. p. 404).

Lösung.	n_m	n'_m	n_∞	B	A^2	λ_m Ber.	Δ
$DiSO_4$ in Wasser . .	1,337 50	1,337 70	1,326 26	0,004 584 9	0,269 33	0,523 39	−0,1
$Di(NO_3)_2$ in Wasser .	1,338 40	1,338 59	1,327 01	0,004 635 9	0,269 28	0,523 34	+0,4
$DiCl_2$ in Wasser . .	1,338 34	1,338 54	1,326 89	0,004 664 5	0,269 25	0,523 31	+0,7
$Di(NO_3)_2$, $^1/_3 Hg(NO_3)_2$, $^2/_3$ Aq	1,379 06	1,379 32	1,364 71	0,005 668 8	0,268 24	0,523 45	−0,7
$DiCl_2$, $^1/_3 ZnCl_2$, $^2/_3$Aq	1,392 62	1,392 88	1,377 83	0,005 790 5	0,268 12	0,523 33	+0,5
$DiCl_2$, $^2/_3 ZnCl_2$, $^1/_3$Aq	1,432 03	1,432 34	1,414 96	0,006 794 0	0,267 43	0,523 39	−0,1
$Di(NO_3)_2$, $^2/_3 Hg(NO_3)_2$, $^1/_3$ Aq	1,403 81	1,404 12	1,387 01	0,006 520 1	0,267 39	0,523 39	−0,1
$Di(NO_3)_2$, $Hg(NO_3)_2$ conc.	1,434 39	1,434 74	1,414 93	0,007 384 3	0,266 52	0,523 38	+0,0
$DiCl_2$, $ZnCl_2$ conc. .	1,477 75	1,478 10	1,457 64	0,007 400 7	0,266 51	0,523 38	+0,0

13. Chinizarin.

Tab. 23. $\alpha = 0{,}478\,54$ $\beta = -0{,}213\,77$ $\lambda'_m = 0{,}514\,56$.

Lösungsmittel.	n_m	n'_m	n_∞	B	A^2	λ_m Beob.	λ_m Ber.	Δ
Terpentinöl .	1,474 38	1,474 91	1,455 51	0,006 919 5	0,265 17	0,521 62	0,521 61	+0,1
Aether . .	1,357 53	1,357 67	1,347 49	0,003 954 7	0,264 65	0,518 26	0,518 60	−3,4
Alkohol . .	1,366 43	1,363 46	1,354 23	0,004 773 7	0,263 66	0,518 10	0,518 31	−2,1
Nitrobenzol .	1,550 24	1,552 53	1,506 11	0,015 536 0	0,262 81	2,525 25	0,525 48	−2,3
Benzol . .	1,497 85	1,499 11	1,461 96	0,013 074 0	0,262 37	0,527 17	0,527 55	−3,8
CS_2 . . .	1,642 91	1,647 15	1,581 05	0,020 873 0	0,260 18	0,530 14	0,530 47	−3,3

Die Tabellen bedürfen keiner weiteren Erläuterung. Nur muss noch hervorgehoben werden, dass Terpentinöl überall, wo es vorkommt, die erste Stelle einnimmt, und dass die Theilung der Magdalaroth-Spectra in zwei Gruppen nothwendig war, wie die Stellen zeigen, die ihnen infolge der Anordnung der letzten Tabellen angewiesen werden mussten.

Die Formel:

$$\lambda_m^2 - B = \alpha + \beta \frac{n_m^2 - n_\infty^2}{n'^2_m - n_\infty^2} \cdot \frac{n'^2_m}{n_\infty^2}$$

stimmt also so gut, wie man verlangen kann, und, obschon rein empirisch aufgestellt, scheint sie doch, was besonders durch Didym bewiesen wird, in allen Fällen der Wirklichkeit zu entsprechen. Auffallend bleibt freilich, dass für Eosin und Fuchsin λ'_m in den Bereich der λ_m fällt, was der Theorie nach wohl nicht zu erwarten ist.

Das Schlussresultat der ganzen Untersuchung lässt sich also in zwei Sätze fassen:

Für unendlich dünne Lösungen einer Substanz mit Absorptionsstreifen kann:

1) die Lage der Absorptionsstreifen beträchtlich variiren;

2) ist ein Absorptionsstreifen in absoluter Weise durch diejenige Wellenlänge λ'_m charakterisirt, die ihm bei der Lösung im dispersionsfreien Lösungsmittel zukommt.

Am Schlusse dieser Arbeit kann ich nicht unterlassen, den Herren Prof. Dr. Clausius und Prof. Dr. Ketteler für die liebevolle Ueberwachung und Leitung bei den experimentellen Untersuchungen meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Phys. Laboratorium der Univ. Bonn, Aug. 1877.

VII. *Versuch einer Theorie der electrischen Scheidung durch Reibung; von E. Riecke.*

(Aus den Göttinger Nachr. vom 28. November 1877, vom Hrn. Verfasser mitgetheilt.)

Der Versuch, für die mannichfach verwickelten Erscheinungen der electrischen Scheidung durch Reibung einen theoretischen Leitfaden zu entwickeln, konnte so lange als überflüssig und dem Bedürfnisse der Wissenschaft nicht entsprechend bezeichnet werden, als es an dem Beobachtungsmaterial zur Prüfung der Brauchbarkeit dieses Leitfadens vollkommen fehlte. Nun ist es aber Riess gelun-

gen, auch auf dem Gebiete der durch Reibung bewirkten electrischen Scheidung zu quantitativer Messung der geschiedenen Electricitäten fortzuschreiten, und wenn auch bei der Schwierigkeit solcher Messungen die Resultate noch nicht als endgültige zu betrachten sind, so genügen sie doch zu einer vorläufigen Prüfung der auf theoretischem Wege zu entwickelnden Gesetze. Zu den Messungen von Riess kommen aber noch hinzu die Beobachtungen von Zöllner über gewisse, bei der Reibung zweier Körper auftretende electrische Strömungen. Zöllner hat gezeigt, dass Ströme von ganz derselben Art, wie sie Quincke bei dem Strömen von Wasser und von anderen schlecht leitenden Flüssigkeiten durch Diaphragmen beobachtet hatte, auch bei der Reibung zweier fester Körper auftreten. Sollte sich nun ergeben, dass die theoretischen Betrachtungen auch für die Erklärung dieser Erscheinungen eine Möglichkeit offen lassen, so darf man wohl erwarten, dass dieselben für die weitere experimentelle Forschung auf dem Gebiete der Reibungselectricität einen nützlichen Leitfaden zu bilden im Stande sind. Ich erlaube mir daher, die folgenden theoretischen Betrachtungen über den Vorgang der electrischen Scheidung durch Reibung vorzulegen, zu deren weiterer experimenteller Prüfung ich einen meiner Schüler veranlasst habe.

I.

Aufgabe. Gegeben sei die unbegrenzte ebene Oberfläche eines Isolators, von dem angenommen werden soll, dass er durch Reibung negativ electrisch werde. Diese Oberfläche sei in irgendeiner gegebenen Weise mit electrischem Fluidum bedeckt. Der Reiber sei gegeben durch einen unendlich schmalen Streifen eines zweiten, bei der Reibung positiv electrisch werdenden Körpers, der in einer zu seiner Längsrichtung normalen Richtung mit gegebener constanter Geschwindigkeit über die isolirende Oberfläche weggeführt werde. Es soll die electrische Dichtigkeit auf der Oberfläche des Reibers und die Aenderung

der electrischen Dichtigkeit auf der isolirenden Oberfläche bestimmt werden.

Wir gehen bei der Lösung dieser Aufgabe aus von folgenden Hypothesen:

1. Die in der Zeiteinheit durch den Vorgang der Reibung auf der Oberfläche des Reibers entwickelte Electricitätsmenge ist proportional mit dieser Oberfläche.

2. Die Menge der geschiedenen Electricität ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher der Reiber über die Oberfläche des Isolators weggeführt wird.

3. Der scheidenden Kraft der Reibung wirken entgegen die von der schon geschiedenen electrischen Flüssigkeit ausgeübten Kräfte. Es wird angenommen, dass durch diese Kräfte eine fortdauernde Wiedervereinigung der geschiedenen Electricitäten bedingt wird, und dass die Electricitätsverluste, welche infolge hiervon sowohl der Reiber wie der geriebene Isolator in jedem Augenblicke erleiden, durch ein Gesetz bestimmt werden, welches formell mit dem für die Zerstreuung geschiedener Electricität in der Luft geltenden Gesetze vollkommen analog ist.

Ist also in irgendeinem Momente die electrische Dichtigkeit des Reibers gleich ε, die des Isolators gleich η, so wird der Reiber in der kleinen Zeit dt einen Electricitätsverlust erleiden, der gegeben ist durch einen Ausdruck von der Form:

$$o \,.\, q\,(\varepsilon - \eta)\,.\,dt.$$

Hier bezeichnet o die Fläche des Reibers, und ist q eine von der Natur der beiden an einander geriebenen Körper abhängende Constante. Gleichzeitig muss natürlich auch die Oberfläche des Isolators einen Electricitätsverlust erleiden, der dem Verlust des Reibers gerade entgegengesetzt ist, und daher gegeben wird durch den Ausdruck:

$$o \,.\, q \,.\, (\eta - \varepsilon)\,.\,dt.$$

Auf der Richtung, in welcher der Reiber auf der Oberfläche des Isolators verschoben wird, werde ein beliebiger Punkt als Ausgangspunkt angenommen. Die Breite

des reibenden Streifens sei gleich δ, seine Länge werde gleich 1 gesetzt; die Entfernung der vorderen Kante des Reibers von dem auf der Richtung der Verschiebung angenommenen Anfangspunkt sei s, die Geschwindigkeit der Verschiebung:

$$u = \frac{ds}{dt}.$$

Während der kleinen Zeit dt ist die infolge der Reibung auf der Oberfläche des Reibers entwickelte Electricitätsmenge gleich $\varkappa . \delta . u\, dt$, wo $\varkappa$ eine von der Natur der beiden reibenden Oberflächen abhängende Constante; gleichzeitig findet aber ein Electricitätsverlust statt, der gegeben ist durch $q . \delta . (\varepsilon - \eta)\, dt$.

Somit ergibt sich für den ganzen Zuwachs, welchen die electrische Dichtigkeit des Reibers während der Zeit dt erleidet, die Gleichung:

I. $$d\varepsilon = \varkappa u\, dt - q(\varepsilon - \eta)\, dt.$$

Gleichzeitig wird auf die Oberfläche des geriebenen Isolators eine Electricitätsmenge $-\varkappa . \delta . u\, dt$ übergehen, während der Electricitätsverlust derselben gegeben ist durch $q\,\delta(\eta - \varepsilon)\, dt$.

Die an der Oberfläche des Isolators vorhandene Electricitätsmenge erleidet also im ganzen einen Zuwachs:

$$-\varkappa\,\delta\, u\, dt - q\,\delta(\eta - \varepsilon)\, dt.$$

Aber dieser Zuwachs vertheilt sich auf dem Isolator über eine grössere Fläche vom Inhalt $(\delta + u\, dt)$.

Machen wir nun die Annahme, dass die Zeit dt so gross genommen werden könne, dass δ gegen $u\, dt$ verschwindend klein ist, so ergibt sich für die Zunahme, welche die electrische Dichtigkeit der Isolatorfläche erleidet, die Gleichung:

II. $$\Delta\eta = -\varkappa\delta + \frac{q}{u}(\varepsilon - \eta)\,\delta,$$

wo dann $\Delta\eta$ ein unendlich Kleines im Vergleich mit $d\varepsilon$ ist.

Führen wir an Stelle von t mit Hülfe der Beziehung $ds = u\,dt$ s als unabhängige Veränderliche in den beiden Differentialgleichungen ein, und bestimmen wir die Constante der Integration so, dass für $s = 0$ auch $\varepsilon = 0$ wird, so führt die Integration von Gl. I zu folgenden Ausdrücken für die electrischen Dichtigkeiten:

$$\text{III.} \qquad \varepsilon = \varkappa \cdot \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}s}\right) + \frac{q}{u} \cdot e^{-\frac{q}{u}s} \int_0^s e^{\frac{q}{u}s}\, \eta\, ds.$$

$$\text{IV.} \qquad \Delta\eta = -\varkappa\delta e^{-\frac{q}{u}s} - \frac{q}{u}\delta\eta + \frac{q^2}{u^2}\delta e^{-\frac{q}{u}s} \int_0^s e^{\frac{q}{u}s}\, \eta\, ds.$$

Ehe wir zu der Vergleichung der für die electrische Dichtigkeit des Reibers gefundenen Formel mit den Versuchen von Riess übergehen, möge die Gleichung IV noch der folgenden Prüfung unterworfen werden. Die in irgendeinem Augenblicke auf der Oberfläche des Reibers angesammelte Electricitätsmenge ist:

$$\varepsilon\delta = \varkappa\frac{u}{q}\delta - \varkappa\frac{u}{q}\delta e^{-\frac{q}{u}s} + \frac{q}{u}\delta e^{-\frac{q}{u}s} \int_0^s e^{\frac{q}{u}s}\, \eta\, ds.$$

Eine dieser gleiche, aber entgegengesetzte Electricitätsmenge muss somit bis zu dem betrachteten Augenblicke auf die geriebene Oberfläche übergegangen sein. Die gesammte Electricitätsmenge, welche bis zu einer beliebigen Entfernung s vom Anfangspunkte an auf die Oberfläche übergegangen ist, wird aber gegeben durch das Integral:

$$\int_0^s \Delta\eta\, ds$$

und es muss somit der Werth dieses Integrals gleich $-\varepsilon\delta$ sein.

Setzen wir für $\Delta\eta$ seinen Werth, so ergibt sich:

$$\int_0^s \Delta\eta\, ds = -\varkappa\delta\int_0^s e^{-\frac{q}{u}s}\, ds - \frac{q}{u}\delta\int_0^s \eta\, ds + \frac{q^2}{u^2}\delta\int_0^s ds\, e^{-\frac{q}{u}s}\int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma}.\eta\, d\sigma.$$

Hierbei ist in dem letzten Doppelintegral an Stelle von s das eine mal σ gesetzt, um für die verschiedenen Terme, durch deren Multiplication und Addition das Doppelintegral sich aufbaut, verschiedene Bezeichnungen zu erhalten. Das erste der in der vorhergehenden Gleichung auftretenden Integrale hat den Werth:

$$\int_0^s e^{-\frac{q}{u}s}\, ds = \frac{u}{q} - \frac{u}{q}e^{-\frac{q}{u}s};$$

das Doppelintegral:

$$\int_0^s ds\, e^{-\frac{q}{u}s}\int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma}\,\eta\, d\sigma$$

ist zunächst in folgender Weise zu bilden; für jede Stelle der Axe s zwischen $s=0$ und $s=s$ werden die Ausdrücke aufgestellt:

(1) $\qquad ds\, e^{-\frac{q}{u}s}, \qquad$ (2) $\quad e^{\frac{q}{u}\sigma}.\eta\, d\sigma.$

Es wird sodann jeder der Terme (1) multiplicirt mit allen unter ihm liegenden Termen (2) und die so erhaltenen Producte werden addirt. Man kann nun offenbar bei der Bildung des Integrals auch umgekehrt ausgehen von einem der Ausdrücke (2), diesen multipliciren mit allen über ihm liegenden Termen (1) und schliesslich die auf diese Weise erhaltenen Producte addiren. Es ergibt sich hieraus die Gleichheit der beiden Doppelintegrale:

$$\int_0^s ds\, e^{-\frac{q}{u}s}\int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma}\,\eta\, d\sigma \quad \text{und} \quad \int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma}\,\eta\, d\sigma\int_0^s e^{-\frac{q}{u}s}\, ds.$$

Führen wir in dem letzteren Integral die Integration aus, so ergibt sich:

$$\int_0^s ds\, e^{-\frac{q}{u}s} \int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma} \eta\, d\sigma = -\frac{u}{q} e^{-\frac{q}{u}s} \int_0^s e^{\frac{q}{u}\sigma} . \eta\, d\sigma + \frac{u}{q} \int_0^s \eta\, d\sigma .$$

Substituiren wir die gefundenen Werthe in der Gleichung für $\int_0^s \Delta\eta\, ds$, so ergibt sich in der That:

$$\int_0^s \Delta\eta\, ds = -\varepsilon\delta.$$

Zur Prüfung der für die electrische Dichtigkeit des Reibers gegebenen Formel III kann die erste der von Riess ausgeführten Beobachtungsreihen benutzt werden, welche er mit folgenden Worten beschreibt:

„Das unbeschwerte Reibzeug wurde auf eine (27 × 12 Zoll) grosse Tafel aus Hartkautschuk mit glänzender Oberfläche gestellt und am Glasstile in gerader Linie um einen Zoll behutsam fortgeführt. Die dadurch geriebene Fläche des Kautschuks beträgt (1 × Durchmesser des Reibers + Reiberfläche) 3,267 Quadratzoll und die dabei stattgefundene Reibung wird zur Einheit der Reibungsmenge genommen. Dann wurde das Reibzeug behutsam abgehoben, auf eine frische Stelle der Platte gestellt, wiederum einen Zoll weit fortgeführt u. s. f. Die Anzahl dieser Operationen bestimmt den Werth der Reibungsmenge. War die gewünschte Menge erreicht, so wurde mit dem Reiber der Knopf des von mir angegebenen Sinuselectrometers berührt, und die erregte Electricitätsmenge gemessen."

„Folgende sind die Mittel aus drei Beobachtungen und die aus ihnen berechneten Verhältnisse der erregten Electricitätsmengen:

Reibungsmenge:	1	2	4	8
Erregte Electricitätsmenge:	1	1,45	1,67	1,93."

Um die Resultate dieser Beobachtungen mit unserer theoretischen Formel zu vergleichen, haben wir die schon

vor der Reibung auf der Oberfläche des Isolators vorhandene electrische Dichtigkeit η gleich Null zu setzen. Die Gleichung III kommt dann auf die einfachere Gestalt:

$$\varepsilon = \varkappa \cdot \frac{u}{q} \cdot \left(1 - e^{-\frac{q}{u}s}\right).$$

Der Reibungsmenge 1 entspricht eine Fortführung des Reibers um etwa 27 mm, und wir werden demnach die dem Werthe $s = 27$ entsprechende Dichtigkeit $\varepsilon = 1$ zu setzen haben, um Uebereinstimmung zwischen den auf theoretischem Wege berechneten Werthen der electrischen Dichtigkeit und den von Riess beobachteten Electricitätsmengen herzustellen. Es zeigt sich, dass den Beobachtungen von Riess am besten entsprochen wird durch die Annahme:

$$\frac{q}{u} = \frac{1}{36}.$$

Die mit Hülfe dieses Werthes berechneten Werthe der electrischen Dichtigkeit sind im Folgenden mit den von Riess beobachteten Electricitätsmengen zusammengestellt.

s	Berechnete Dichtigkeit.	Beobachtete Menge.
27	1	1
54	1,47	1,45
108	1,80	1,67
216	1,89	1,93

II.

Aufgabe. Ueber eine ebene, unbegrenzte und von Anfang an unelectrische Isolatorfläche werde ein Reibzeug von endlicher Breite in einer dieser Breite parallelen Richtung fortgeführt. Die Oberfläche des Reibzeuges möge eine so geringe Leitungsfähigkeit besitzen, dass von einer während der Reibung stattfindenden Ausgleichung der electrischen Dichtigkeit abgesehen werden kann. Es soll unter dieser Voraussetzung die electrische Dichtigkeit an der Oberfläche des Reibzeuges und des Isolators bestimmt werden.

Wir betrachten das Reibzeug zunächst in derjenigen Stellung, welche es vor Beginn der Bewegung einnimmt; auf der Linie, längs welcher die vordere Kante desselben die Isolatorfläche berührt, nehmen wir in der letzteren einen Punkt O_1; durch O_1 ziehen wir eine Linie parallel zu der Bewegungsrichtung des Reibzeugs. Die Entfernung irgendeines Punktes dieser Linie von dem Punkt O_1 werde bezeichnet durch s_1. Derjenige Punkt der Reibzeugfläche, welcher in der Anfangsstellung dem Punkt O_1 gerade gegenüber liegt, werde bezeichnet durch Ω; an der Oberfläche des Reibzeuges ziehen wir durch Ω eine Axe ξ, parallel mit der Breite des Reibzeuges. Es wird dann die Richtung ξ der Richtung s_1 gerade entgegengesetzt sein. Durch Linien senkrecht zu ξ theilen wir die Oberfläche des Reibzeugs in lauter unendlich schmale Streifen; die Breite der aufeinanderfolgenden Streifen werde bezeichnet durch $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$ ... Dem Anfangspunkt des Streifens $d\xi_1$ liegt in der Oberfläche des Isolators gegenüber der Punkt O_1; der dem Anfangspunkt von $d\xi_2$ gegenüberstehende Punkt der Isolatorfläche sei O_2, der dem Anfangspunkt von $d\xi_3$ gegenüberliegende O_3, u. s. f. Durch diese Punkte O_1, O_2, O_3 ..., welche auf derselben der Oberfläche des Isolators angehörenden Linie liegen, ist auf dieser eine Reihe verschiedener Coordinatensysteme gegeben, zwischen welchen offenbar die folgenden Beziehungen existiren:

$$s_2 = s_1 + d\xi_1; \quad s_3 = s_2 + d\xi_2 \ \ldots; \quad s_n = s_{n-1} + d\xi_{n-1},$$
$$s_n = s_1 + d\xi_1 + d\xi_2 + \ \ldots \ + d\xi_{n-1}.$$

Ausser diesen auf der Oberfläche des Isolators festliegenden Systemen haben wir dann noch das System ξ, dessen Anfangspunkt Ω in der vorderen Kante des Reibzeuges liegt, und welches wir als mit dem Reibzeug fest verbunden betrachten werden.

Um nun die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Formeln auf das jetzt vorliegende Problem anwenden, um also mit Hülfe derselben die electrischen Dichtigkeiten

auf dem Reibzeug und dem Isolator berechnen zu können, wenn das erstere an einer beliebigen Stelle seiner Bahn angekommen ist, ersetzen wir den wirklich stattfindenden Vorgang durch folgenden gedachten. Wir zerlegen das Reibzeug in seine einzelnen Streifen; führen zunächst den ersten derselben in die der späteren Lage des Reibzeuges entsprechende Stellung über und berechnen mit Hülfe der Formeln des vorhergehenden Abschnittes die durch die Reibung hervorgerufenen electrischen Dichtigkeiten. Wir lassen sodann den zweiten Streifen nachrücken und berechnen die electrische Dichtigkeit dieses zweiten Streifens, sowie die Aenderung der electrischen Dichtigkeit der Isolatorfläche; dasselbe wiederholt sich bei einem dritten, vierten Streifen u. s. f., bis endlich sämmtliche Streifen des Reibzeugs in die betrachtete neue Stellung übergegangen sind.

Es mögen nun im Folgenden die Resultate dieser aufeinanderfolgenden Operationen entwickelt werden.

1. Bewegung des Streifens $d\xi_1$. Für die Dichtigkeit ε_1 auf $d\xi_1$ und $\Delta\eta_1$ auf der Isolatorfläche ergibt sich:

$$(1) \qquad \varepsilon_1 = \varkappa . \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}s_1}\right) \; ; \quad (1') \qquad \Delta\eta_1 = -\varkappa d\xi_1 e^{-\frac{q}{u}s_1}.$$

2. Bewegung des Streifens $d\xi_2$. Es ergibt sich:

$$\varepsilon_2 = \varkappa . \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}s_2}\right) + \frac{q}{u} e^{-\frac{q}{u}s_2} \int_0^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2 \, ,$$

$$\Delta\eta_2 = -\varkappa d\xi_2 e^{-\frac{q}{u}s_2} - \frac{q}{u} . d\xi_2 \Delta\eta_1 + \frac{q^2}{u^2} d\xi_2 e^{-\frac{q}{u}s_2} \int_0^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2 .$$

Wir betrachten zunächst das Integral: $\int_0^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2$.

In diesem Integral ist $\Delta\eta_1$ gleich Null von $s_2 = 0$ bis $s_2 = d\xi_1$, so dass wir erhalten:

$$\int_0^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2 = \int_{d\xi_1}^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2,$$

oder wenn wir für $\Delta\eta_1$ seinen Werth substituiren:

$$\int_0^{s_2} e^{\frac{q}{u}s_2} \Delta\eta_1 \, ds_2 = -\varkappa d\xi_1 \, e^{\frac{q}{u}d\xi_1} . s_1 .$$

Mit Hülfe dieses Werthes ergibt sich:

$$(2) \qquad \varepsilon_2 = \varkappa . \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}s_2}\right) - \varkappa . \frac{q}{u} d\xi_1 \, e^{-\frac{q}{u}s_1} . s_1 .$$

$$(2') \qquad \Delta\eta_2 = -\varkappa d\xi_2 \, e^{-\frac{q}{u}s_2} + \varkappa \frac{q}{u} \, d\xi_2 \, d\xi_1 \, e^{-\frac{q}{u}s_1}\left(1 - \frac{q}{u}s_1\right).$$

Die erste dieser beiden Gleichungen gibt für $s_2 = 0$ nicht, wie es der Fall sein sollte, $\varepsilon_2 = 0$, sondern:

$$\varepsilon_2 = \varkappa . \frac{q}{u} \, d\xi_1 \, e^{\frac{q}{u}d\xi_1} . d\xi_1 .$$

Es erledigt sich dieser Widerspruch in einfacher Weise dadurch, dass die Function:

$$\Delta\eta_1 = -\varkappa d\xi_1 \, e^{-\frac{q}{u}s_1}$$

für alle negativen Werthe von s_1 gleich Null zu setzen ist, und dass daher gleiches auch von dem zweiten Term des für ε_2 gefundenen Ausdruckes gilt. Es mag gleich an dieser Stelle bemerkt werden, dass auch die für spätere Streifen aufzustellenden Formeln zu ganz analogen Bemerkungen Veranlassung geben; dass also alle Fälle, in welchen negative Werthe der Coordinaten s_1, s_2 ... in Betracht kommen, einer gesonderten Betrachtung bedürfen, oder dass man sich bei der Anwendung der resultirenden Formeln auf Fälle zu beschränken hat, in denen solche negative Werthe nicht eintreten, d. h. in welchen das Reibzeug mindestens um seine ganze Breite verschoben wird.

3. Verschiebung des Streifens $d\xi_3$. Es ergibt sich:

$$\varepsilon_3 = \varkappa . \frac{u}{q}\left(1-e^{-\frac{q}{u}s_3}\right)+\frac{q}{u}e^{-\frac{q}{u}s_3}\int_0^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}(\Delta\eta_1+\Delta\eta_2)\,ds_3,$$

$$\Delta\eta_3 = -\varkappa\, d\xi_{S_3} e^{-\frac{q}{u}s_3} - \frac{q}{u}\, d\xi_{S_3}(\Delta\eta_1+\Delta\eta_2)$$

$$+\frac{q^2}{u^2}\, d\xi_{S_3}\, e^{-\frac{q}{u}s_3}\int_0^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}(\Delta\eta_1+\Delta\eta_2)\,ds_3.$$

Ebenso wie bei der vorhergehenden Rechnung ergibt sich:

$$\int_0^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}\Delta\eta_1\,ds_3 = \int_{d\xi_{S_1}+d\xi_{S_2}}^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}\Delta\eta_1\,ds_3 = -\varkappa\, d\xi_{S_1} e^{\frac{q}{u}(d\xi_1+d\xi_2)s_1},$$

$$\int_0^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}\Delta\eta_2\,ds_3 = \int_{d\xi_{S_2}}^{s_3} e^{\frac{q}{u}s_3}\Delta\eta_2\,ds_3 = -\varkappa\, d\xi_{S_2} e^{\frac{q}{u}d\xi_2}.s_2$$

und durch Substitution dieser Werthe in den Gleichungen für ε_3 und $\Delta\eta_3$:

$$(3)\quad \varepsilon_3 = \varkappa . \frac{u}{q}\left(1-e^{-\frac{q}{u}s_3}\right)-\varkappa\frac{q}{u}\, d\xi_{S_1} e^{-\frac{q}{u}s_1}.s_1-\varkappa.\frac{q}{u}\, d\xi_{S_2} e^{-\frac{q}{u}s_2}.s_2,$$

$$(3')\quad \Delta\eta_3 = -\varkappa d\xi_{S_3} e^{-\frac{q}{u}s_3}+\varkappa\frac{q}{u}\, d\xi_{S_3}\, d\xi_{S_1} e^{-\frac{q}{u}s_1}.\left(1-\frac{q}{u}s_1\right)$$

$$+\varkappa\frac{q}{u}\, d\xi_{S_3}\, d\xi_{S_2} e^{-\frac{q}{u}s_2}.\left(1-\frac{q}{u}s_2\right) \text{ u. s. w.}$$

Verschiebung des Streifens $d\xi_{S_i}$. Es ergibt sich:

$$\varepsilon_i = \varkappa\frac{u}{q}\left(1-e^{-\frac{q}{u}s_i}\right)-\varkappa.\frac{q}{u}\sum_1^{i-1} e^{-\frac{q}{u}s_r}.s_r\, d\xi_{S_r},$$

$$\Delta\eta_i = -\varkappa d\xi_{S_i} e^{-\frac{q}{u}s_i}+\varkappa\frac{q}{u}\, d\xi_{S_i}\sum_1^{i-1} d\xi_{S_r} e^{-\frac{q}{u}s_r}\left(1-\frac{q}{u}s_r\right).$$

4. Die electrische Dichtigkeit an der Oberfläche des Reibzeuges. Um den im Vorhergehenden für die electrische Dichtigkeit ε_i gegebenen Ausdruck weiter entwickeln zu können, bemerken wir, dass die in demselben auftretenden Coordinaten s_i und s_r die Coordinaten eines und desselben Punktes der Richtung s mit Bezug auf die verschiedenen auf ihr angenommenen Anfangspunkte sind. Setzen wir nun:

$$\xi_r = d\xi_1 + d\xi_2 + \ldots + d\xi_{r-1},$$

so ist $s_r = s_1 + \xi_r$.

Substituiren wir diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung für ε_i und ersetzen wir gleichzeitig die auf der rechten Seite derselben stehenden Summen durch die entsprechenden Integrale, so ergibt sich durch Ausführung der Integration:

$$\varepsilon_i = \varkappa \cdot \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}(s_1+\xi_i)}\right) - \varkappa \cdot s_1 e^{-\frac{q}{u}s_1}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}\xi_i}\right)$$

$$- \varkappa \cdot \frac{u}{q} e^{-\frac{q}{u}s_1}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}\xi_i} - \frac{q}{u}\xi_i e^{-\frac{q}{u}\xi_i}\right).$$

Auf der Oberfläche des Reibzeuges ist die Stelle, deren Dichtigkeit durch die vorstehende Formel dargestellt wird, gegeben durch ihre Coordinate ξ_i mit Bezug auf den der Vorderkante des Reibzeuges angehörenden Punkt Ω. Dagegen ist die Entfernung des Streifens $d\xi_i$ von seiner ursprünglichen Stellung, in welcher die Dichtigkeit den obigen Werth erreicht hat, gegeben durch den Abstand s_1 des Streifens $d\xi_i$ von dem Punkte O_1. Es ist nun zweckmässiger, als unabhängige Veränderliche neben den Coordinaten ξ_i die Entfernung s der vorderen Kante des Reibzeuges von ihrem Ausgangspunkt O_1, d. h. die ganze Verschiebungsgrösse des Reibzeuges einzuführen. Wir haben dann in der vorhergehenden Formel zu setzen:

$$s_1 = s - \xi_i$$

und erhalten:

$$\varepsilon(\xi, s) = \varkappa \frac{u}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{u}s}\right) - \varkappa(s-\xi)e^{-\frac{q}{u}s}(e^{\frac{q}{u}\xi} - 1)$$

V.

$$-\varkappa . \frac{u}{q} e^{-\frac{q}{u}s}(e^{\frac{q}{u}\xi} - 1 - \frac{q}{u}\xi).$$

Hier ist der Index bei ξ weggelassen und durch die Klammer (ξ, s) angedeutet, dass durch diese Formel ε als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen ξ und s bestimmt ist.

Für die gesammte Electricitätsmenge, welche sich auf der Oberfläche des Reibzeugs von der vorderen Kante, d. h. von $\xi = 0$ an bis zu einer beliebigen Entfernung ξ nach irgendeiner Verschiebung s angesammelt hat, ergibt sich:

$$E(s, \xi) = \int_0^{\xi} \varepsilon \, d\xi.$$

Die Ausführung der Integration gibt:

$$E(s\xi) = \varkappa . \frac{u}{q} . \xi - \varkappa . \frac{u^2}{q^2}\left(2 + \frac{q}{u}(s-\xi)\right)e^{-\frac{q}{u}(s-\xi)}$$

VI.

$$+ \varkappa . \frac{u^2}{q^2}\left(2 + \frac{q}{u}s + \frac{q^2}{u^2}s . \xi\right)e^{-\frac{q}{u}s}.$$

Die im Vorhergehenden gemachten Annahmen entsprechen einigermaassen den Verhältnissen der zweiten von Riess mitgetheilten Beobachtungsreihe, bei der das Reibzeug in einem Zuge um Strecken von 27, 54, 108 und 216 mm über die Kautschukfläche fortgeführt wurde. Auf die erste dieser Verschiebungen ist jedoch die Formel VI auf keinen Fall anwendbar, da dieselbe weniger als die ganze Breite des Reibzeuges beträgt. Auch bei den übrigen Verschiebungen kann aber eine genaue Uebereinstimmung zwischen den von Riess beobachteten und den nach der obigen Gleichung berechneten Electricitätsmengen nicht stattfinden, da das Reibzeug von Riess mit einer dünnen Amalgamschicht überzogen war, während unsere Entwickelungen auf der Voraussetzung einer sehr schlechten Lei-

tungsfähigkeit der Reibzeugfläche beruhen. Ferner beziehen sich die Versuche von Riess anf ein Reibzeug von kreisförmiger Gestalt, während wir eine rechteckige Form desselben angenommen haben. Diese Verschiedenheit dürfte sich dadurch ausgleichen lassen, dass wir an Stelle des Kreises ein Quadrat von gleichem Inhalt setzen. Für die Seite dieses Quadrats ergibt sich mit Rücksicht auf die Dimensionen des von Riess benutzten Reibzeugs eine Länge von 35 mm. Wir haben also in der vorigen Formel für ξ den Werth 35, für s der Reihe nach die Werthe 54, 108 und 216 zu substituiren, um die diesen Verschiebungsgrössen entsprechenden Electricitätsmengen zu erhalten. Es ergibt sich, dass den Beobachtungen von Riess genügt wird durch die Annahme:

$$\frac{u}{q} = 20.$$

Die hiermit berechneten Werthe der Electricitätsmengen sind im Folgenden mit den von Riess beobachteten zusammengestellt.

s	Berechnet.	Beobachtet.
54 mm	1,34	1,34
108 mm	1,82	1,60
216 mm	1,89	1,92

III.

Ueber Reibungsströme. Die im vorhergehenden Abschnitt für die electrische Dichtigkeit an der Oberfläche des Reibzeuges gegebene Gleichung V soll dazu benutzt werden, den Werth dieser Dichtigkeit an der vorderen und hinteren Kante des Reibzeugs zu berechnen. Hierbei setzen wir entsprechend den Versuchen von Riess die Breite des Reibzeuges gleich 35 mm, den Werth der Constanten $\frac{u}{q}$ gleich 20. Es ergibt sich dann für die einer beliebigen Verschiebung s des Reibzeuges entsprechende Dichtigkeit:

an der vorderen Kante, d. h. für $\xi = 0$:

$$\varepsilon_0 = \varkappa . 20 \left(1 - e^{-\frac{s}{20}}\right);$$

an der hinteren Kante, d. h. für $\xi = 35$:

$$\varepsilon_1 = \varkappa . 20 . \left(1 - e^{-\frac{s}{20}}\right) - \varkappa . 4{,}76 . s e^{-\frac{s}{20}} + \varkappa . 106{,}4 . e^{-\frac{s}{20}}.$$

In der folgenden Tabelle sind die hieraus für einige Verschiebungen s sich ergebenden Werthe von ε_0 und ε_1 zusammengestellt.

s	ε_0	ε_1	s	ε_0	ε_1
40	$17{,}3 . \varkappa$	$6{,}0 . \varkappa$	120	$19{,}9 . \varkappa$	$18{,}7 . \varkappa$
80	$19{,}6 . \varkappa$	$14{,}6 . \varkappa$	160	$20{,}0 . \varkappa$	$19{,}8 . \varkappa$

Der constante Endwerth $20\varkappa$, welchem sich die electrische Dichtigkeit an der vorderen Kante sehr schnell, an der hinteren langsam nähert, kann zu einer Bestimmung des numerischen Werthes von $\varkappa$ benutzt werden. Zöllner hat „die Zahl von electrostatischen Einheiten, welche sich auf jedem Quadratmillimeter einer auf trockenem Tuche kräftig geriebenen Siegellackstange befinden", bestimmt, und fand als Maximum 68 electrostatische Einheiten; nehmen wir hiernach 70 als Maximalwerth der zu erreichenden electrischen Dichtigkeit, so ergibt sich:

$$\varkappa = 3{,}5.$$

Die Vergleichung der in der vorstehenden Tabelle zusammengestellten Werthe der electrischen Dichtigkeiten zeigt, dass namentlich im Anfange der Reibung die electrische Dichtigkeit der vorderen Kante des Reibzeugs sehr beträchtlich grösser ist, als die der hinteren Kante; würde man also in irgendeinem Momente plötzlich durch einen Schliessungsdraht die vordere Kante mit der hinteren verbinden, so würde eine Ausgleichung der electrischen Dichtigkeiten stattfinden, und es würde die Electricität des Reibzeuges in dem Schliessungsdrahte von der vorderen Kante nach der hinteren abströmen. Ist also das Reibzeug positiv electrisch, so erhält man einen Strom, der von der vorderen Kante desselben nach der hinteren gerichtet ist; umgekehrt, wenn

das Reibzeug negativ electrisch ist, so geht der positive Strom von der hinteren Kante nach der vorderen. Dieser Strom würde, wie sich aus den numerischen Werthen von ε_0 und ε_1 ergibt, zu Anfang der Reibung eine Stärke besitzen, welche sehr wohl vergleichbar wäre mit der Stärke des Stromes, welcher durch Vereinigung der Electricität des Reibzeuges mit der des Isolators entstände.

Zöllner hat Beobachtungen angestellt, durch welche die Existenz von electrischen Strömen im Inneren des Reibzeugs während der Dauer der Reibung nachgewiesen wird. Er spricht die Resultate dieser Beobachtungen in folgenden Sätzen aus.

„Werden zwei verschiedene Körper, von denen der eine ein Isolator (Dielectricum), der andere ein sogenannter Halbleiter ist, mittelst gleitender Reibung an einander verschoben, so entstehen in dem Halbleiter electrische Ströme, deren Richtung von der Natur und Bewegung des Isolators in folgender Weise abhängt.

Wird der geriebene Isolator positiv electrisch, so entstehen an der Berührungsfläche oder im Inneren des Reibzeugs electrische Ströme, welche parallel, aber entgegengesetzt der relativen Bewegung des Isolators sind; wird dagegen letzterer negativ electrisch, so sind die erwähnten Ströme parallel und gleichgerichtet der relativen Bewegung des Isolators."

Es handelt sich ferner bei den Versuchen von Zöllner „um die Ausgleichung von Electricitätsmengen, welche keineswegs unbedeutend, sondern vollkommen von der Ordnung derjenigen sind, welche überhaupt nur durch Reibung an der Oberfläche zweier heterogener Körper entwickelt werden können".

Wie man sieht, stimmen die von Zöllner beobachteten Ströme der Richtung nach vollkommen mit denjenigen Strömen überein, auf deren Existenz wir durch unsere theoretischen Betrachtungen geführt worden sind. Ob aber

in der nach unserer Theorie zwischen der vorderen und hinteren Kante des Reibzeugs auftretenden Spannungsdifferenz der wahre Grund der von Zöllner beobachteten Reibungsströme, und ebenso der von Quincke und Zöllner untersuchten Capillarströme gefunden ist, darüber wird erst durch weitere experimentelle Untersuchungen entschieden werden können.

IV.

Ueber die Natur der Scheidungskräfte der Reibung. In einem in Pogg. Ann. Jubelbd. enthaltenen Aufsatze „zur Theorie der dielectrischen Mittel" habe ich eine genauere Analyse der von einem Ampère'schen Molecularstrome ausgehenden electrischen Wirkungen ausgeführt. Die dabei zu Grunde gelegte Anschauung über die Constitution dieser Molecularströme war die, dass eine mit einem ponderabeln Molecüle fest verbundene Masse negativer Electricität, der Kern des Molecularstromes, umkreist werde von einem Ringe, über welchen eine gleich grosse Masse positiver Electricität gleichförmig vertheilt ist. Ich habe dabei insbesondere auf eine eigenthümliche electrodynamische Wirkung aufmerksam gemacht, welche von dem Ringe des Molecularstromes ausgeht und deren Componenten sich darstellen lassen durch die negativen Differentialquotienten des Potentiales:

$$\frac{4}{c^2}\,\varepsilon\sigma'^2\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\right)^2 . d\sigma .$$

Hier bezeichnet $d\sigma$ ein Element des Ringes, σ' die Geschwindigkeit, mit welcher die Electricität sich in dem Ringe bewegt, ε die auf die Längeneinheit des Ringes kommende Menge positiver Electricität; r die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem Punkte, für welchen das Potential des Ringes bestimmt werden soll. Es mag bemerkt werden, dass dieses Potential dasselbe ist, dessen Existenz ich in einem Aufsatze, der in Götting. Nachr. 1873, Nr. 19

veröffentlicht ist, bewiesen habe, und auf welches durch ganz dieselbe Entwickelung und unabhängig von mir auch Clausius geführt worden ist.

Die Kräfte, deren Componenten durch das obige Potential bestimmt werden, sind insbesondere durch die folgenden Eigenschaften ausgezeichnet.

1. Der positive Ring des Molecularstromes übt eine abstossende Wirkung auf gleichnamige, eine anziehende Wirkung auf ungleichnamige electrische Theilchen aus.

2. Diese Wirkungen sind proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die positive Electricität in dem Ringe sich bewegt, sie sind also unabhängig von der Richtung, in welcher diese Strömung erfolgt.

3. Die von dem Ringe ausgeübte Kraft ist proportional mit der Summe seiner einzelnen Elemente, jedes derselben multiplicirt mit dem Quadrate des Cosinus desjenigen Winkels, welchen das Element mit der Richtung vom Mittelpunkt des Stromes nach dem abgestossenen oder angezogenen electrischen Theilchen einschliesst.

Schon in dem angeführten Aufsatze habe ich darauf hingewiesen, dass diese Kräfte vielleicht eine Rolle spielen dürften bei dem Vorgange der electrischen Scheidung durch Reibung oder Berührung. Ich erlaube mir, diese damals gemachte Andeutung jetzt etwas näher zu begründen. Zunächst wird es zweckmässig sein, die in dem früheren Aufsatze in Betreff der Ampère'schen Molecularströme gemachten Annahmen mit etwas allgemeineren zu vertauschen. Wir werden mit demselben Rechte, mit welchem wir uns bisher die negative electrische Flüssigkeit mit ponderabler Masse verbunden gedacht haben, auch die positiv electrischen Theilchen als mit ponderabler Masse behaftet denken können. Die beiden electrischen Massen, aus welchen der Molecularstrom besteht, werden dann in Doppelsternbewegung um einander begriffen sein, und es wird je nach dem Ueberwiegen der einen oder der anderen der beiden ponderabeln Massen

die Bahn des positiven Theilchens die des negativen umschliessen oder umgekehrt. Um nun in diesem Falle die electrischen Wirkungen des Molecularstromes ermitteln zu können, möge folgende Hypothese eingeführt werden: die Wirkung eines electrischen Theilchens, das eine geschlossene Curve mit grosser Geschwindigkeit durchläuft, kann ersetzt werden durch die Wirkung einer über die ganze Curve stetig ausgebreiteten electrischen Vertheilung, wenn deren Gesammtmasse gleich ist jener einzelnen electrischen Masse und wenn die ganze über die Curve vertheilte Masse in dieser mit derselben Geschwindigkeit dahinströmt, mit welcher sie von jenem einzelnen electrischen Theilchen durchlaufen wird. Lässt man diese Hypothese zu, so kann die Wirkung eines electrischen Doppelatomes auf einen electrischen Punkt in derselben Weise gefunden werden, in welcher die Wirkungen des Ampère'schen Molecularstromes von mir in dem angeführten Aufsatze entwickelt worden sind. Es ergibt sich also, dass auch in diesem Falle jene statischen Wirkungen existiren, welche wir im Vorhergehenden betrachtet haben; die Art dieser Wirkungen wird bei einem electrischen Doppelatome durch folgenden Satz bestimmt:

Ein electrisches Doppelatom übt auf ein positiv electrisches Theilchen eine abstossende Wirkung aus, wenn die Bahn des positiven Atoms die des negativen umschliesst; wenn dagegen umgekehrt die Bahn des negativen Atomes die umschliessende ist, so findet eine anziehende Wirkung statt. Diese Wirkung ist unabhängig von der Richtung, in welcher sich die beiden Atome um einander drehen und proportional dem Quadrate der Drehungsgeschwindigkeit.

Die von irgendeinem Körper ausgehenden Wirkungen electrischen Ursprungs können ihren Grund haben in einer Vertheilung freier Electricität an seiner Oberfläche, in einer dielectrischen oder diamagnetischen Polarisation; aber selbst wenn alle diese Wirkungen ausgeschlossen

sind, kann derselbe noch der Sitz electrischer Kräfte sein, die ihren Grund in der Verschiedenheit der Bahnen haben, welche von den Theilchen eines und desselben electrischen Doppelatomes durchlaufen werden. Wenn die Oberflächen zweier Körper in innige Berührung gebracht werden, so werden dieselben wechselseitig Kräfte auf einander ausüben, durch welche eine Zersetzung der electrischen Atomsysteme angestrebt wird. Sind diese Kräfte stark genug, um den Zusammenhang der Atomsysteme zu lösen, so wird derjenige Körper, von welchem die stärkeren Kräfte ausgehen, mit einer electrischen Ladung aus der Berührung hervorgehen, welche der von ihm angezogenen Electricitätsart entspricht. Diese Ladung würde natürlich von einer solchen Grösse sein, dass die von ihr ausgeübten Wirkungen von derselben Ordnung wären, wie die Kräfte, durch welche sie erzeugt wurde. Jene Kräfte enthalten aber den Factor $\frac{1}{c^2}$, wo c die Weber'sche Constante bezeichnet; es ergibt sich hieraus, dass die Kräfte, um welche es sich handelt, äusserst schwach sind, so dass zu ihrem experimentellen Nachweis besonders günstige Verhältnisse und die feinsten Hülfsmittel erforderlich sein dürften. Daraus ergibt sich aber weiter, dass wir durch die vorhergehenden Betrachtungen für die Erklärung der electrischen Scheidung durch Reibung oder Berührung unmittelbar noch nichts gewonnen haben, sondern dass wir die weitere Annahme hinzufügen müssen, dass das Weber'sche Gesetz für moleculare Distanzen ebenso modificirt werden muss wie das Newton'sche. Auf diese Forderung ist aber von ganz anderer Seite her auch C. Neumann geführt worden in seiner Theorie der electromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. In der That, wenn wir die von ihm für moleculare Distanzen vorgeschlagene Form des Weber'schen Gesetzes benutzen, so haben wir in dem Ausdrucke für das Potential der von uns betrachteten Kräfte an Stelle von $\sqrt{n}$ eine andere unbekannte Function der Entfernung zu setzen, und gelangen im übrigen zu genau

denselben Resultaten. Es ergibt sich also, dass die Scheidungskräfte der Berührung oder Reibung in der That reducirt werden können auf rein electrische Wirkungen.'

Es scheint mir nicht nothwendig, darauf einzugehen, wie sich aus den im Vorhergehenden entwickelten Principien die Existenz einer Spannungsreihe mit Nothwendigkeit ergibt, wie die electromotorischen Kräfte, welche aus der relativen Bewegung zweier sich berührender Körper bei der gleitenden Reibung hervorgehen, geeignet erscheinen, den specifischen Einfluss der Reibung zu erkären; nur auf einen Punkt erlaube ich mir zum Schluss hinzuweisen. Man pflegt die electrischen Scheidungskräfte durch Reibung oder Berührung aufzufassen als Kräfte von der Art der chemischen Affinitätskräfte. Wenn sich nun gezeigt hat, dass das Weber'sche Gesetz mit der für moleculare Distanzen nothwendigen Modification auch diese Wirkungen zu umfassen vermag, so kann man daran die Aussicht knüpfen, dass Kräfte von der Art des Weber'schen Grundgesetzes im weiteren Fortschritte der Wissenschaft auch das Gebiet der chemischen Erscheinungen der Anwendung mechanischer Principien zu unterwerfen im Stande sind. Auf eine ganz andere Beziehung zwischen seinem Gesetz und den Erscheinungen der Chemie hat Weber selbst in der sechsten Abhandlung über electromotorische Maassbestimmungen aufmerksam gemacht; durch Anwendung seines Gesetzes auf ein System zweier gleichartiger electrischer Theilchen gelangt er zu der Unterscheidung zweier verschiedener Aggregatzustände dieses Systems, einem Vorbild für die bald beharrlichen, bald nicht beharrlichen chemischen Atomverbindungen.

Zusatz. Es gibt gewisse Fälle der Reibung zweier Körper, auf welche die in den beiden ersten Abschnitten entwickelten Principien nicht unmittelbar anwendbar sind. Ein solcher Fall ist z. B. die Reibung eines kreisförmigen Reibzeuges auf ebener Unterlage durch Drehung um den Mittelpunkt des Kreises. Aehnliche Verhältnisse treten

aber schon dann ein, wenn bei der Bewegung des Reibzeuges ein Theil der von demselben ursprünglich eingenommenen Fläche von dem Reibzeug überdeckt bleibt. Auch aus diesem Grunde ist also die Anwendung der Formeln auf Fälle, in denen das Reibzeug nicht um seine ganze Breite verschoben wird, zu vermeiden.

VIII. *Bemerkungen über die unipolare Leitung der Flamme; von Ferdinand Braun.*

In einem kürzlich erschienenen Aufsatze[1]) sucht Hr. Herwig die sogenannte positive unipolare Leitung der Flamme mit einem allgemeinen Satz in Uebereinstimmung zu bringen, wonach stets die negative Electricität leichter aus einem festen Körper in ein Gas austrete, als die positive. Herr Herwig discutirt (§. 6) auch Versuche von mir, und ich möchte mir erlauben, auf ein Missverständniss hinzuweisen, welches dabei untergelaufen zu sein scheint. Ich war bei Versuchen[2]), welche prüfen sollten, ob die Richtung der besseren Leitungsfähigkeit einer Flamme mit der Richtung des sog. Flammenstromes in Beziehung stehe, zu dem Resultat gekommen, dass in weitaus den meisten Fällen in der Richtung gegen den Flammenstrom eine bessere Leitung stattfinde. Hr. Herwig fasst diesen Satz so auf, „als wenn im Falle gleichgerichteter Ströme im ganzen eine grössere Potentialdifferenz thätig wäre, im Falle entgegengesetzt gerichteter dagegen eine kleinere als für den Normalfall der Abwesenheit des Flammencontactstromes. Im ersteren Fall muss daher nach §. 4 (derselbe han-

1) Wied. Ann. I. p. 516. 1877.
2) Pogg. Ann. CLIV. p. 481. 1875.

delt von der Zunahme des Widerstandes mit zunehmender electromotorischer Kraft) der Flammenwiderstand grösser sein" (l. c. p. 537). Dann freilich könnte ich nur Hrn. Herwig beistimmen und das Resultat als „ein fast selbstverständliches" ansehen; da die Abhängigkeit des Widerstandes von der Stromintensität[1]) bekannt war, als ich meine Arbeit veröffentlichte, so würde mich der Vorwurf treffen, auf einen durch ausgedehnte Versuchsreihen ermittelten Zusammenhang zwischen zwei Erscheinungen hingewiesen zu haben, als auf einen Punkt, welcher vielleicht unsere Anschauungen erweitern könne, während er direct aus schon bekannten Thatsachen a priori zu erschliessen war. Auf ein solches Missverständniss war ich nicht vorbereitet, um so weniger, als ich in einzelnen Tabellen (z. B. Tab. I, II, III u. IV) alle Zahlen, welche zur Beurtheilung nöthig sind, mitgetheilt habe. Ich greife eine Beobachtung heraus; Tab. IV meines Aufsatzes (l. c. p. 495) enthält in der ersten Zeile folgende Angaben: electromotorische Kraft der Kette = 10 Grove; Flammenstrom $= -3^{sc}$; Stromintensität resp. -10^{sc} und „über $+500^{sc}$". Es berechnet sich hieraus eine ungefähre electromotorische Kraft des Flammenstromes, welche höchstens 3 Grove beträgt (eine richtigere Rechnung, indem man die -3^{sc} des Flammenstromes compensirt durch $+3^{sc}$ des Kettenstromes würde etwa nur 0,1 Grove ergeben). Aber selbst diesen viel zu hohen Werth für den Flammenstrom angenommen, so würden 3 in den Kreis der Flamme in entsprechender Richtung eingeschaltete Grove'sche Elemente bewirken, dass die Potentialfunction der freien Electricität an allen Stellen des Kreises gleich wäre. Erhöht man nun abwechselnd das

1) Die Versuche, welche Hr. Hoppe (Wied. Ann. II. p. 83) mitgetheilt hat, können seinen Schluss, dass der Widerstand unabhängig von der Intensität sei, natürlich höchstens in den engen Grenzen beweisen, innerhalb deren er die electromotorische Kraft geändert hat. Ein allgemeiner Schluss ist aus den bis jetzt von ihm publicirten Beobachtungen nicht zulässig, zumal der Widerstand sich nach unseren sonstigen Erfahrungen in sehr complicirter Weise mit der Stromintensität ändert (vgl. meinen Aufsatz Pogg. Ann. CLIV. p. 499).

Potential auf der einen Electrode über das auf der anderen um eine gewisse Grösse, so müsste man nach Hrn. Herwig's Auffassung gleiche Intensität nach beiden Richtungen bekommen, da die Potentiale sich algebraisch addiren, wie Hankel gezeigt hat[1]); 7 weiter in der Richtung gegen den Flammenstrom hinzugefügte Grove's müssten also dieselbe Stromintensität ergeben, wie 7 in der anderen Richtung, d. h. 10 Grove gegen den Flammenstrom müssten denselben Ausschlag herbeiführen, wie 7 demselben gleichgerichtete. Die mitgetheilten Zahlen zeigen aber, dass man im ersteren Falle über „+500 sc", im zweiten jedenfalls weniger als — 10 sc bekam. Zu wesentlich demselben Resultat gelangt man, wenn man der electromotorischen Kraft des Flammenstromes auch einen anderen Werth beilegt. Angesichts so auffälliger Zahlen hatte ich es unterlassen, ausdrücklich einem Missverständniss vorzubeugen, wie dasjenige ist, in welchem sich Hr. Herwig zu befinden scheint. Weitere Beispiele aus einzelnen der früher mitgetheilten Beobachtungen zu geben, unterlasse ich. Wenn ich Hrn. Herwig nicht selbst missverstanden habe, so glaube ich annehmen zu dürfen, dass seine irrthümliche Auffassung durch diese einzige Bemerkung beseitigt ist. Indess möge es mir gestattet sein, die gebotene Gelegenheit zu ergreifen, um an zwei Beobachtungsreihen die Rechnungen in der hier angedeuteten Weise durchzuführen und dadurch die Zweideutigkeit vollständig zu entfernen, welche meiner früheren Darstellungsweise noch anhaften konnte. Ich wähle Tab. III meiner früheren Abhandlung. Tab. 1a. ist ein unveränderter Abdruck derselben. Die in der Rubrik „Stromintensitäten" angegebenen Zahlen sind nicht die direct abgelesenen Intensitäten, sondern diese minus der Intensität des Flammenstromes. Dies hatte ich früher gleichfalls nicht ausdrücklich bemerkt, weil es sich wohl von selbst versteht.

1) Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. VII. 1859.

Tabelle 1a.

Grosse Flamme. Links Oese mit Na_2SO_4, rechts reines Platinblech.

Electrom. Kraft.		Flammenstrom.	Stromintensitäten.	
0,1	Grove	+1,6	+ 0,4	− 1,1
0,2	„	—	+ 0,8	− 2,8
0,4	„	—	+ 1,2	− 9,8
0,9	„	—	+ 1,4	−18,8
1,9	„	—	+ 3,0	−24,8
2,9	„	—	+ 4,4	−29,8
4,9	„	—	+ 7,2	−35,8
9,9	„	—	+13,7	−48,8

Da die Electroden bei dieser Versuchsreihe verschiedene Grösse hatten, so konnte Hr. Herwig, wie ich absichtlich hervorhebe, für seine anderweitigen Betrachtungen mit Recht diese Tabelle unberücksichtigt lassen. Aus den obigen Zahlen berechnet sich, dass die electromotorische Kraft des Flammenstromes zwischen 0,1 und 0,2 Grove liegt und einen Strom erzeugt, dessen Richtung durch + angedeutet werden soll; ich nehme den grösseren Werth 0,2 an. Aus dieser etwas ungenauen Annahme erklärt sich die (in Tab. 1b.) mit einem Stern versehene Zahl −1,2 als Intensität eines Stromes, welchem die „wirkliche“ electromotorische Kraft 0 beigelegt ist. Es bedeutet nämlich in Tab. 1b. die Columne „hinzugefügt“ die electromotorische Kraft, welche durch Abzweigung von einem constanten Kettenstrome zu derjenigen des Flammenstromes hinzugefügt wurde; die Columne „wirkliche electromotorische Kraft“ gibt diejenige von Flammenstrom plus Kettenstrom; die Columne „Intensität“ die Stromintensität, welche die electromotorische Kraft des Flammenstroms plus der hinzugefügten des Kettenstromes hervorbrachte.

Die Tab. 1b. (p. 440) zeigt z. B., dass die wirkliche electromotorische Kraft von −0,7 Grove bereits eine grössere Intensität hervorruft, als +9,9 Grove. — Ich gebe noch, in derselben Weise berechnet, eine früher nicht publi-

Tabelle 1 b.

Electr. Kr. in Grove's hinzugef.	wirkliche.	Intensität.	Electr. Kr. in Grove's hinzugef.	wirkliche.	Intensität.
+0,1	+ 0,3	+ 2,0	−0,1	+0,1	+ 0,5
+0,2	+ 0,4	+ 2,4	−0,2	0,0	− 1,2*
+0,4	+ 0,6	+ 2,8	−0,4	−0,2	− 8,2
+0,9	+ 1,1	+ 3,0	−0,9	−0,7	−17,2
+1,9	+ 2,1	+ 4,6	−1,9	−1,7	−23,2
+2,9	+ 3,1	+ 6,0	−2,9	−2,7	−28,2
+4,9	+ 5,1	+ 8,8	−4,9	−4,7	−34,2
+9,9	+10,1	+15,3	−9,9	−9,7	−47,2

cirte Beobachtungsreihe, deren graphische Darstellung eine der Fig. 6 (Taf. II) meiner früheren Abhandlung (vgl. daselbst p. 503) ähnliche Curve ergeben würde. Die Intensität des Flammenstromes war $= +15^{sc}$, woraus sich seine electromotorische Kraft zu +0,4 Grove berechnet.

Tabelle 2.

Links Perle von K_2CO_3, rechts von KCl. Die Perlen gleich gross und in gleicher Höhe.

Electr. Kr. in Grove's hinzugef.	wirkliche.	Intensität.	Electr. Kr. in Grove's. hinzugef.	wirkliche.	Intensität.
+ 0,3	+ 0,7	+19	− 0,3	+0,1	+ 8
+ 0,5	+ 0,9	+21	− 0,5	−0,1	− 3
+ 1,0	+ 1,4	+26	− 1,0	−0,6	− 42
+ 2,0	+ 2,4	+34	− 2,0	−1,6	− 80
+ 3,0	+ 3,4	+46	− 3,0	−2,6	−128
+ 5,0	+ 5,4	+54	− 5,0	−4,6	−203
+10,0	+10,4	+86	−10,0	−9,6	−313

Es folgt aus diesen Zahlen unzweifelhaft, dass die electromotorische Kraft des Flammenstromes auch nicht entfernt ausreicht, die unipolare Leitung in der von Hrn. Herwig gedachten Weise zu

erklären. Trotzdem können beide Erscheinungen vielleicht durch einen Causalnexus verknüpft sein. In der That scheint es, als ob auch Fälle, auf welche ich früher nicht wagte, den Satz anzuwenden, sich demselben besser fügen, als man erwarten sollte. So hat z. B. Henrici[1]) gefunden, dass bei ungleich grossen Flächen aus demselben Metall der Flammenstrom stets von der grösseren Electrode durch die Flamme sich zur kleineren bewegte, mochte der kleinere Draht roth oder weiss glühen; stets würde ein Kettenstrom auf dem umgekehrten Wege geringeren Widerstand erfahren. Dass aber bei Ueberführung des einen Drahtes in sehr heisse Flammentheile die Richtung des Flammenstromes und der besseren Leitungsfähigkeit gleichzeitig umschlagen, habe ich früher schon mitgetheilt. — Als ein anderes Beispiel, welches vielleicht mit dem obigen Satz in Beziehung stehen könnte, führe ich Beobachtungen von Hittorf an. Derselbe untersuchte[2]) in Geissler'schen Röhren, welche vom Inductionsstrom durchbrochen wurden, den Widerstand am negativen Pol, wenn derselbe der Reihe nach aus verschiedenen Metallen gebildet wurde. Die Stärke der Zerstäubung scheint nicht ausreichend zur Erklärung, da Eisen, obschon es viel weniger als Platin und Silber zerstäubt wird, doch den grössten Widerstand zeigt. Möglicherweise lässt sich aber auch hier auf den Widerstand oder einen Theil desselben aus dem electromotorischen Verhalten der Körper schliessen, wie nachstehende Zusammenstellung zeigt.

Widerstand am negativen Pol.		Electromot. Kraft.
Aluminium am kleinsten	= 1 gesetzt	
Zink	= über 2,5	Zn | Al = − 25
Silber und Platin	= über 4	Ag | Al = − 121 Pt | Al = − 148
Eisen	noch etwas grösser	Fe | Al = − 100

Ich wage nicht, hieran irgend weitere Discussionen

1) Pogg. Ann. LXXIX. p. 476. 1850.
2) Pogg. Ann. CXXXVI. p. 25. 1869.

zu knüpfen, sondern begnüge mich mit diesem gelegentlichen Hinweis auf einen angenäherten Parallelismus zwischen zwei Eigenschaften, welcher vielleicht zufällig ist, immerhin aber beachtenswerth sein könnte.

Ich erlaube mir noch auf einige Punkte in Hrn. Herwig's Arbeit einzugehen, welche mir Schwierigkeiten für seine Erklärung zu bereiten scheinen. Hr. Herwig ist der Ansicht, dass „in allen anderen Fällen, wo nicht einfach das Ohm'sche Gesetz Anwendung hat, die electrischen Ausgleichungen relativ leichter mit gesteigerter electromotorischer Kraft erfolgen" (l. c. p. 531). Die Flamme zeigt aber im Gegentheil ein Wachsen des Widerstandes mit steigender electromotorischer Kraft, und Hr. Herwig findet daher in diesem abweichenden Verhalten der Flamme eine Stütze für seine Ansicht, dass auch die Ausnahmestellung, welche die Flamme in ihrem sonstigen electrischen Verhalten (als positiv unipolarer Leiter) einnimmt, durch störende Einflüsse bedingt sei. Durch diese werde das ursprüngliche allgemeine Gesetz, wonach stets die negative Electricität leichter aus einem festen Körper in ein Gas austrete als die positive, verdeckt. Diese störenden Einflüsse findet aber Hr. Herwig in einer Ladung der heisseren Flammengase mit freier negativer Electricität, und es erklärt sich nach ihm der Widerstand, welcher dem Austritt der negativen Electricität aus der Electrode in die Flammengase erfahrungsmässig entgegensteht, ohne weiteres, „da die heissen Flammentheile für die electrische Leitung natürlich die allein entscheidenden sind, und diese also, selbst mit negativer Eigenelectricität geladen, von der positiven Electrode leichter die äussere electrische Bewegung in sich aufnehmen. Man hat dabei einfach zu denken, dass die geladenen Flammengase als leicht bewegliche Körper der durch die Potentialdifferenz an beiden Electroden dargestellten electrischen Triebkraft unterliegen und deshalb von der negativen Electrode fort und zu der positiven hin gedrängt werden" (l. c. p. 522). Nun hat Hankel schon früher

gezeigt (l. c. p. 64, p. 71) dass auch für den Austritt der positiven Electricität aus den Electroden in das glühende Gas ein besonderer, wenn auch geringer Widerstand vorhanden ist, den er für constant hielt und der Querschnittsverminderung zuschrieb, und ich habe später nachgewiesen (l. c. p. 503), dass dieser Widerstand sehr erheblich mit der Stromdichtigkeit, bezw. der electromotorischen Kraft der Kette zunimmt, selbst wenn die Electroden sich in einer relativ sehr gut leitenden Gasschicht (von glühendem Natrium- oder Kaliumdampf) befinden. Dazu möchte ich noch bemerken, dass bei meinen Versuchen die positive und die negative Electrode sich sehr nahe an einander in einer Schicht von fast gleich guter Leitungsfähigkeit befanden. Nach den oben mitgetheilten Vorstellungen, scheint mir, müsse man consequenter Weise schliessen, dass die positive Electricität leichter mit gesteigerter Potentialdifferenz in die Flamme abgeleitet würde. Die Erfahrung bestätigt diesen Schluss nicht, was man freilich durch die Annahme erklären könnte, dass der von Hrn. Herwig supponirte Widerstand, welchen die positive Electricität bei ihrem Eintritte in ein Gas mehr erfährt als die negative, mit der electromotorischen Kraft (bezw. Stromdichtigkeit) zunimmt, und zwar unter Umständen so bedeutend, dass der günstige Einfluss der Ableitung, welcher seitens der negativ geladenen Flammengase nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkt, dieses Gesetz nicht zu verdecken vermag.

Aber auch der eben wörtlich angeführten Ansicht des Hrn. Herwig, wonach die schon mit freier negativer Electricität geladenen Flammengase „als leicht bewegliche Körper der durch die Potentialdifferenz an beiden Electroden dargestellten Triebkraft unterliegen und deshalb von der negativen Electrode fort und zu der positiven hin gedrängt werden", kann ich nicht zuneigen. Einmal ist es mir nie gelungen, auch bei Anwendung von 40 Bunsen'schen Elementen, die geringste Aenderung in der Verbreitung des Metalldampfes, welchen die eine mit Salz bedeckte Electrode (eine Oese aus Platindraht) gab, zu

sehen, wenn der Strom geschlossen wurde. Doch ist diese Beobachtung vielleicht ohne Belang[1]). Ein anderer Grund dürfte folgender sein. Electrische Entladungen, welche durch bewegte Molecüle vermittelt werden oder mit welchen der Transport glühender Materie verbunden ist, scheinen stets dem Magneten zu folgen, wie der Flammenbogen des constanten Stromes oder die Entladungen des Inductoriums durch Geissler'sche Röhren. Diese Thatsache wird begreiflich, selbst wenn die geladenen Molecüle nur kurze Wege zurücklegen[2]), wenn man berücksichtigt, dass die convectiv fortgeführte Electricität vom Magneten beeinflusst werden muss. Es ist mir bei Versuchen, welche ich gelegentlich meiner früheren Untersuchung anstellte, aber nicht gelungen, durch einen Ruhmkorff'schen Electromagneten, welcher mit 4 grossen Bunsen'schen Elementen erregt wurde, während der Strom von 7 Grove'schen Zellen durch die Flamme ging, weder eine Aenderung der Verbreitung des Metalldampfes, noch eine Aenderung des Widerstandes, noch der Stromvertheilung in einer Flamme nachzuweisen, mochten die ableitenden dünnen Platindrähte an Stellen nahezu gleichen oder sehr verschiedenen Potentiales liegen. Ich glaube daher nicht, dass die Gastheilchen in der Flamme selbst durch die Electricität bewegt oder unter Umständen von den Polen weggedrängt werden, sondern dass ihre grosse Leitungsfähigkeit die Uebertragung der Electricität ermöglicht, ohne dass die vermittelnden Theilchen eine ausgiebigere Bewegung machen als diejenige ist, welche man auch in leitenden Flüssigkeiten annehmen muss. Sie würden demnach ebenso wenig durch ihre eigene Electricität und die auf den Electroden seitens der Kette angesammelte in Bewegung gerathen, wie eine, wenn auch schlecht leitende, Flüssigkeit (z. B. destillirtes Wasser), welche in einen geschlossenen Stromkreis eingeschaltet ist, eine solche Bewegung zeigen

1) Vgl. G. Wiedemann, Pogg. Ann. CLVIII. p. 260. 1876.
2) Vgl. G. Wiedemann ibid.

wird, wenn ihm von einer Maschine Electricität von hoher Spannung zugeführt wird. Darauf weist auch die einfache Thatsache hin, dass die Flammengase schon den schwächsten Strom durchlassen, während Gase von gewöhnlicher Temperatur, obschon gleichfalls leicht beweglich, jedenfalls für niedrige Spannungen so geringe Electricitätsmengen übertragen, dass die Verringerung der Leitungsfähigkeit auch nicht entfernt der Verringerung der Moleculargeschwindigkeiten entspricht.

Der gewichtigste Einwand gegen Hrn. Herwig's Erklärung dürfte endlich in den zur Zeit jedenfalls noch zu Recht bestehenden Resultaten von E. Becquerel's Versuchen liegen[1]). Becquerel hat ungemischte Gase in einer Platinröhre, die ihrerseits von einer Thonröhre umgeben war, in einem Ofen zum Glühen erhitzt. Die Electroden wurden gebildet durch die Platinröhre und einen von ihr isolirten, in der Axe der Röhre angebrachten Platindraht. Er findet, dass von dunkler Rothglut an Leitung eintritt, dass zunehmende electromotorische Kraft den Widerstand vermehrt (zunehmende Stromintensität dagegen ihn vermindert?), dass die Intensität grösser ist (bei 1 oder 2 Bunsen im Verhältniss von 8:7; 13:10; 10:4,8; 10:2,5. l. c. p. 372), wenn das Platinrohr, also die grössere Electrode, mit dem negativen Pol der Kette verbunden ist. Dem qualitativen Resultate dieser Versuche scheinen im grossen und ganzen auch die Wiederholungen von Hrn. Hittorf[2]) nicht zu widersprechen, da er nur von Abänderungen spricht, welche sich als nöthig erwiesen, um übereinstimmende (also wohl quantitative) Resultate zu bekommen. Nur auf dem Wege des Experiments unter möglichst einfachen Bedingungen dürfte eine sichere Entscheidung über die von Hrn. Herwig ausgesprochenen Ansichten herbeizuführen sein, und ich selbst würde mich früher nicht mit den von mir publicirten Versuchen be-

1) Ann. d. chim. et phys. (3) XXXIX.
2) Pogg. Ann. CXXXVI. p. 234.

gnügt haben, wenn uns nicht von Hrn. Hittorf schon damals wären maassgebende Versuche in Aussicht gestellt gewesen. Wie schwierig die Discussion bei so complicirten Verhältnissen und dem Mangel bestimmter, wenigstens annähernd numerisch gegebener Werthe ist, dürfte z. B. daraus hervorgehen, dass Hr. Herwig (l. c. p. 540) und Hr. Hittorf aus derselben Thatsache zu direct entgegengesetzten Schlüssen kommen. Meine obigen Bemerkungen sollen daher auch keine Beweise, sondern nur Hinweise sein; und auch für diese würde ich keinen Raum in diesen Blättern zu beanspruchen gewagt haben, wenn sie nicht einiges experimentelle Material enthielten. Derselbe Umstand mag noch die folgende Bemerkung rechtfertigen.

Die Unterschiede, welche unipolare Leitung für den constanten und den inducirten Strom so häufig zeigen, wiederholen sich noch unter ganz anderen Versuchsbedingungen, bei denjenigen festen, metallisch leitenden Körpern nämlich, welche, wie Psilomelan, Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz zeigen. Ich habe darauf hingewiesen, dass der Oeffnungsstrom stets leichter diese Stoffe durchfliesst als der Schliessungsstrom; der Oeffnungsstrom selbst geht auch wieder, wie bei Gasen, leichter in einer bestimmten Richtung; es zeigte sich gleichzeitig, was ich früher noch nicht mitgetheilt hatte, in allen von mir untersuchten Fällen, dass der constante Strom dann gerade in der anderen Richtung geringeren Widerstand erfuhr. Diese Erscheinung, ein Analogon zum Unterschiede zwischen der constanten Entladung starker Ketten als Flammenbogen und der Entladung des Inductoriums kann vielleicht bei weiterer Untersuchung zur Erkennung der Bedingungen beitragen, von welchen das verschiedene Verhalten der Gase gegen die Entladungen der Kette und des Inductoriums abhängt. Es wird durch die erwähnten Beobachtungen an Psilomelan wahrscheinlich, dass allgemein bei Körpern, die einen von der Stromstärke abhängigen Uebergangswiderstand besitzen, Inductionsstrom und constanter Strom in dem besprochenen

Gegensatz stehen; zu den hierdurch bewirkten Erscheinungen, welche also schon die unbeweglich gedachten Molecüle zeigen würden, können sich bei Gasen noch Complicationen gesellen infolge der Beweglichkeit der Molecüle.

Marburg, December 1877.

IX. *Ueber die Temperaturfläche des Wasserdampfes; von A. Ritter in Aachen.*

§. 1.

Zustandsgleichung des Wasserdampfes.

Für trockenen Wasserdampf lässt sich die Beziehung zwischen Druck, Volumen und absoluter Temperatur ausdrücken durch die empirische Gleichung:

$$(1) \qquad T = \frac{pv}{R} + \frac{b}{pv\sqrt{v}}.$$

Hierin bedeuten R und b constante Coëfficienten, für welche die folgenden numerischen Werthe zu setzen sind:

$$R = \tfrac{1}{220} \quad \text{und} \quad b = 28,$$

wenn der Druck p in Atmosphären, das Volumen v in Cubikmetern und die absolute Temperatur $T = a + t$ in Centesimalgraden ausgedrückt wird.

Aus obiger Gleichung kann man für je zwei willkürlich angenommene Werthe der Grössen p und v den zugehörigen Werth von T berechnen. Als geometrische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse T mit den beiden Grössen p und v sich ändert, erhält man die Temperaturfläche[1]) des Wasserdampfes — und zwar spe-

1) Wied. Ann. II. p. 273. 1877.

ciell dasjenige Gebiet, welches dem überhitzten Dampfe entspricht. Jedem Werthsysteme der drei Grössen p, v, T entspricht ein bestimmter Punkt der Temperaturfläche. Man findet diesen Punkt, indem man zunächst in der Horizontalebene denjenigen Punkt aufsucht, dessen Coordinaten p, v sind, und in diesem Punkte alsdann ein Perpendikel von der Länge T errichtet.

Dass die obige Gleichung für stark überhitzten Dampf Resultate liefert, welche mit den Beobachtungen gut übereinstimmen, zeigen die nachfolgenden Hirn'schen Versuchsresultate[1]).

$p =$	1	5	13,75	15,124
$T =$	478	478	533	533
$v =$	2,14	0,414	0,166	0,151.

In dieser Tabelle sind die Werthe von v bis zur dritten Decimalstelle genau nach den Hirn'schen Versuchen angegeben. Wenn man nach Gleichung (1) diejenigen Werthe von v berechnet, welche den hier angegebenen Werthen von p und T entsprechen, so zeigt es sich, dass die auf solche Weise berechneten Werthe bis zur dritten Decimalstelle noch genau mit den Hirn'schen Resultaten übereinstimmen.

Wie weit die obige Gleichung auch für die Grenzcurve des gesättigten Dampfes (Nebelkante) noch befriedigende Resultate liefert, zeigt die nachfolgende Zusammenstellung:

$p =$	0,1	1	4	14
$T =$	319,21	373	417	468,53
$v =$	14,3	1,635	0,448	0,139
	(14,55)	(1,650)	(0,448)	(0,138).

Diese Tabelle enthält in der dritten Horizontalreihe die nach Gleichung (1) berechneten Werthe von v, und die in der vierten Reihe stehenden eingeklammerten Werthe sind die den Zeuner'schen Dampftabellen entnommenen,

1) G. A. Hirn: Théorie mécanique de la Chaleur.

nach der mechanischen Wärmetheorie berechneten Werthe. Eine Vergleichung dieser beiden Zahlengruppen zeigt, dass für gesättigten Dampf die Abweichungen allerdings bis zur dritten Decimalstelle sich erstrecken. Wenn man jedoch berücksichtigt, dass bei der Berechnung der eingeklammerten Zeuner'schen Zahlenwerthe empirische Formeln benutzt wurden, welche nach neueren Untersuchungen über die specifische Wärme des Wassers[1]) keineswegs als vollkommen zuverlässig betrachtet werden dürfen, so wird man die Uebereinstimmung auch hier befriedigend finden. Ueberdies würde man durch geringe Aenderung der für die Constanten angenommenen Werthe leicht eine noch bessere Uebereinstimmung herbeiführen können. Eine genauere Bestimmung der Constanten dürfte jedoch bei der Unzulänglichkeit der vorliegenden Beobachtungsresultate gegenwärtig noch als verfrüht erscheinen, und empfiehlt es sich deshalb, einstweilen mit den obigen abgerundeten Zahlenwerthen zu rechnen.

§. 2.

Theoretische Begründung der aufgestellten Gleichung.

Nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze lässt sich für ein sogenanntes vollkommenes Gas die Beziehung zwischen Druck, Volumen und absoluter Temperatur ausdrücken durch die Gleichung:

$$pv = RT. \tag{2}$$

Als geometrische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse T mit den beiden Grössen p und v sich ändert, erhält man die hyperbolische Paraboloidfläche. In dieser krummen Fläche bilden die Linien constanten Druckes, welche man die „Isobaren" nennen kann, ein System von geraden Linien; ebenso auch die Linien constanten Volumens, welche man mit dem Namen „Isopleren" bezeichnen kann (nach dem griechischen Worte: „πλήρης",

1) Vgl. Wüllner. Wied. Ann. I. p. 592. 1877.

voll). Die Linien constanter Temperatur dagegen, welche man die „Isothermen" nennen kann, bilden in jener Fläche ein System von gleichseitigen Hyperbeln.

Man darf annehmen, dass bei unendlich grosser Ueberhitzung auch der Wasserdampf dem obigen Gesetze folgt, und dass die Abweichung desselben von diesem Gesetze um so grösser wird, je mehr der Dampf dem gesättigten Zustande sich nähert. Wenn man also für Wasserdampf den Quotienten $\frac{pv}{R}$ mit θ bezeichnet, so wird bei entsprechender Wahl der Constanten R in der Zustandsgleichung:

$$pv = R\theta \tag{3}$$

die Grösse θ zwar für den Zustand unendlicher Ueberhitzung die Bedeutung der wirklichen Temperatur annehmen; im allgemeinen wird jedoch die Grösse θ eine von der wirklichen abweichende Temperatur darstellen, welche man die „virtuelle Temperatur" des Wasserdampfes nennen kann. Unter der virtuellen Temperatur hat man hiernach diejenige Temperatur zu verstehen, welche den Werthen von p und v entsprechen würde, wenn der Dampf bis zum Sättigungspunkte genau dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze folgte. Als geometrische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse θ mit den Grössen p und v sich ändert, erhält man eine krumme Fläche, welche man die „virtuelle Temperaturfläche" des Wasserdampfes nennen kann. Diese Fläche hat, wie bei dem vollkommenen Gase, die Form einer hyperbolischen Paraboloidfläche.

Denkt man sich über der Horizontalebene, in welcher die Druckaxe und die Volumenaxe liegen, sowohl die der wirklichen, als auch die der virtuellen Temperatur des Wasserdampfes entsprechende Temperaturfläche construirt, so erkennt man, dass die Grösse:

$$\tau = T - \theta, \tag{4}$$

als Differenz der verticalen Coordinaten, die Abweichung des Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Ge-

setze geometrisch darstellen wird. Wenn es also gelänge, das Aenderungsgesetz der Grösse τ als Function der Grössen p und v durch eine Gleichung darzustellen, so würde mit der Gleichung:

$$pv = R(T - \tau) \tag{5}$$

zugleich das Krümmungsgesetz der wirklichen Temperaturfläche oder die richtige Zustandsgleichung des Wasserdampfes gefunden sein.

Die Constante der virtuellen Temperaturfläche kann man nach der anderweitig bekannten, von den Physikern allgemein als richtig anerkannten Thatsache berechnen: dass bei zunehmender Ueberhitzung das Verhältniss der Dichtigkeit des Wasserdampfes zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft dem Grenzwerthe 0,622 sich nähert[1]). Da für atmosphärische Luft die betreffende Constante den Werth: $\frac{29{,}27}{10\,333} = \frac{1}{353}$ annimmt, so ergibt sich für Wasserdampf der Werth:

$$R = \frac{1}{0{,}622 \,.\, 353} = \frac{1}{220}. \tag{6}$$

Für trockenen gesättigten Dampf sind die Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur bereits bekannt. Man kann daher aus der Gleichung:

$$\tau_0 = T_0 - \frac{p_0 v_0}{R}, \tag{7}$$

in welcher der Index „Null" eine Ueberhitzung von 0° andeuten soll, diejenigen Werthe von τ berechnen, welche den Sättigungspunkten entsprechen. Wenn man annimmt, dass die in der letzten Tabelle des vorigen Paragraphen in der dritten Horizontalreihe stehenden Zahlen die richtigen Werthe von v_0 darstellen, so erhält man aus dieser Gleichung die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

---

1) Clausius: „Mechanische Wärmetheorie". 2. Auflage. I. Bd. p. 157.

$p_0 =$	0,1	1	4	14
$T_0 =$	319,21	373	417	468,53
$v_0 =$	14,3	1,635	0,448	0,139
$\tau_0 =$	5,2	13,3	23,2	38,6.

Die Form der Function $\tau = f(p, v)$ ist so zu wählen, dass dieselbe den folgenden drei Bedingungen Genüge leistet.

Erstens sollen die krummlinigen Isobaren der wirklichen Temperaturfläche bei wachsenden Werthen von v an die geradlinigen Isobaren der virtuellen Temperaturfläche asymptotisch sich anschliessen (Fig. 1). Dieser Bedingung kann man dadurch Genüge leisten, dass man der Function die Form eines Bruches gibt, dessen Nenner die Grösse v als Factor enthält.

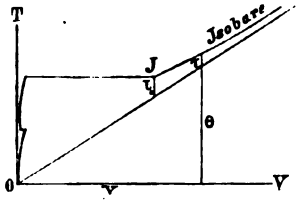


Fig. 1.

Zweitens sollen die krummlinigen Isopleren der wirklichen Temperaturfläche bei wachsenden Werthen von p an die geradlinigen Isopleren der virtuellen Temperaturfläche asymptotisch sich anschliessen (Fig. 2). Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Nenner jenes Bruches auch die Grösse p als Factor enthält.

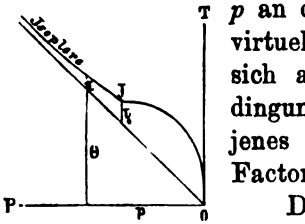


Fig. 2.

Drittens soll die Function so beschaffen sein, dass die nach Gleichung (5) zu construirende Temperaturfläche durch die ihrer Form und Lage nach bereits gegebene Nebelkante J hindurchgeht; d. h. die Grösse τ soll für trockenen gesättigten Dampf Werthe annehmen, welche mit den oben nach Gleichung (7) berechneten Werthen von τ_0 möglichst genau übereinstimmen.

Bei dem Aufsuchen der Functionsform hat man sich zu vergegenwärtigen, dass innerhalb derjenigen Grenzen, welche durch die obigen drei Bedingungen festgestellt

sind, bei der Auswahl einigermaassen willkürlich verfahren werden darf, insofern selbst die grössten Werthe, welche die Grösse τ annehmen kann, immer noch verhältnissmässig kleine Bruchtheile der wirklichen Temperatur bilden, wie die in obiger Tabelle für die Grösse τ_0 angegebenen Werthe zeigen. Bei dem Anblicke der in obigen Figuren dargestellten Isobare und Isoplere erkennt man leicht, dass durch geringe Aenderungen des Krümmungsgesetzes der betreffenden Curve die nach Gleichung (5) zu berechnenden Endresultate in ganz unerheblicher Weise beeinflusst werden. Wenn es nur gelingt, die Form der Gleichung so zu bestimmen, dass für den Anfangspunkt J der nach dieser Gleichung zu construirenden Curve die richtige Lage sich ergibt, und dass zugleich ein asymptotischer Anschluss der Curve an die geradlinige Isobare, resp. Isoplere überhaupt stattfindet, so wird es im Uebrigen ziemlich gleichgültig sein, ob diese asymptotische Annäherung etwas rascher oder langsamer sich vollzieht.

Wenn mit b und ε positive constante Grössen bezeichnet werden, so hat die Gleichung:

$$\tau = \frac{b}{pv^{\varepsilon}} \tag{8}$$

jedenfalls diejenigen Eigenschaften, welche durch die ersten beiden Bedingungen vorgeschrieben werden. Es ist also zu untersuchen, ob durch entsprechende Wahl jener beiden Constanten erreicht werden kann, dass auch der dritten Genüge geleistet wird. Nach dieser letzteren Bedingung müsste für das Product:

$$\tau_0 p_0 v_0^{\varepsilon} = b \tag{9}$$

in allen Punkten der Nebelkante ein und derselbe Werth sich ergeben. Mit Benutzung der obigen Tabelle findet man, dass diese Bedingung in der That erfüllt wird, wenn für den Exponenten der Werth $\varepsilon = \frac{3}{5}$ gesetzt wird, insofern die sämmtlichen in der Tabelle aufgeführten Fälle den übereinstimmenden Werth:

$$\tau_0 p_0 v_0^{\frac{3}{5}} = 28 \tag{10}$$

für jenes Product liefern. Man darf hiernach behaupten, dass die Gleichung:

$$\tau = \frac{28}{pv\sqrt{v}} \quad . \tag{11}$$

mit einem für den vorliegenden Zweck vollkommen genügenden Grade von Genauigkeit die richtige Form der gesuchten Function darstellt, und dass die im vorigen Paragraphen aufgestellte Zustandsgleichung (1) innerhalb der hier angenommenen Grenzen dem wirklichen Verhalten des überhitzten Wasserdampfes entspricht.

Von der obigen Gleichung unterscheiden sich die von Hirn, Schmidt, Zeuner und Weyrauch aufgestellten Zustandsgleichungen dadurch, dass in den letzteren die Grösse τ als Function von nur einer der beiden veränderlichen Grössen p und v dargestellt erscheint, und zwar in den Gleichungen von Hirn[1]) und Schmidt[2]) als Function von v, in den Gleichungen von Zeuner[3]) und Weyrauch[4]) als Function von p. Der ersteren Behandlungsweise entspricht die Voraussetzung, dass die Isopleren ein System von geraden Linien bilden, der letzteren entspricht die Voraussetzung, dass die Isobaren ein System von geraden Linien bilden. Die aus solchen Voraussetzungen abgeleiteten Gleichungen können zwar bei entsprechender Wahl der Constanten für ein beschränktes Gebiet der Temperaturfläche die Form derselben mit einem für praktische Anwendungen völlig genügenden Grade von Genauigkeit darstellen. Es liegt jedoch in der Natur der Sache, dass die Anwendungen derselben auf gewisse, weit ausserhalb jenes Gebietes liegende extreme Fälle zu Resultaten führen müssen, deren Abweichungen von den Versuchsresultaten die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten.

---

1) Ann. d. chim. et phys. (4) X.
2) Z. S. d. Ver. dtsch. Ing. 1867.
3) Grundzüge d. mechan. Wärmetheorie. 2. Aufl. Neuer Abdruck.
4) Z. S. d. Ver. dtsch. Ing. 1876.

§. 3.

Specifische Wärme des trockenen Wasserdampfes.

Für die beiden partiellen Differentialquotienten der Grösse T erhält man nach Gleichung (1) die zweigliedrigen Ausdrücke:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v}{R} - \frac{b}{p^2 v^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

$$\frac{dT}{dv} = \frac{p}{R} - \frac{\frac{1}{2}b}{pv^{\frac{3}{2}}}, \tag{13}$$

deren letztere Glieder die Abweichungen vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze darstellen. Wenn abkürzungsweise:

$$\frac{Rb}{(pv)^2\sqrt{v}} = \omega \tag{14}$$

gesetzt wird, so kann man den obigen Ausdrücken auch die folgenden einfacheren Formen geben:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v}{R}(1 - \omega), \tag{15}$$

$$\frac{dT}{dv} = \frac{p}{R}(1 - \tfrac{1}{2}\omega). \tag{16}$$

Da die Grösse ω mit zunehmender Ueberhitzung dem Grenzwerthe Null sich nähert, so bildet die Grösse $\frac{v}{R}$ den Grenzwerth, welchem das Steigungsverhältniss der Isoplere mit wachsendem Drucke sich nähert, und die Grösse $\frac{p}{R}$ den Grenzwerth, welchem das Steigungsverhältniss der Isobare mit wachsendem Volumen sich nähert.

Aus den letzteren drei Gleichungen ergeben sich die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe.

$p' =$	0,1	1	4	14
$v' =$	14,3	1,635	0,448	0,139
$T' =$	319,21	373	417	468,53
$\omega =$	0,016	0,037	0,059	0,090
	0	0	0	0

$\frac{dT}{dp} =$	3094	346,3	92,72	27,20
	3146	359,7	98,56	30,58
$\frac{dT}{dv} =$	21,46	207,7	802	2664
	22	220	880	3080.

Die ersten drei Horizontalreihen beziehen sich auf den gesättigten Zustand und enthalten die Coordinaten des in der Nebelkante liegenden gemeinschaftlichen Anfangspunktes der betreffenden Isoplere und Isobare. In jeder von den folgenden drei Doppelreihen sind die beiden Grenzwerthe angegeben, zwischen welchen die betreffende Grösse variirt. Der obere Zahlenwerth entspricht der Ueberhitzung von 0°; der untere bildet denjenigen Grenzwerth, welchem die betreffende Grösse mit zunehmender Ueberhitzung sich nähert, und zwar bezüglich der Grösse $\frac{dT}{dp}$ den Grenzwerth für wachsenden Druck, bezüglich der Grösse $\frac{dT}{dv}$ den Grenzwerth für wachsendes Volumen.

Mit Benutzung der oben für die beiden partiellen Differentialquotienten gefundenen Ausdrücke kann man nunmehr aus der Clausius'schen Gleichung:

$$AT = (c_p - c_v)\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dv}\right), \tag{17}$$

in welcher c_p die specifische Wärme bei constantem Drucke, c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen und $A = \frac{10333}{424} = 24{,}37$ das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bedeutet, für jeden Punkt der Temperaturfläche die Differenz der beiden specifischen Wärmen berechnen. Aus dieser Gleichung ergeben sich die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

$p =$	0,1	1	4	14
$c_p - c_v =$	0,117	0,126	0,138	0,158
	0,111	0,111	0,111	0,111.

Die in der vorletzten Horizontalreihe stehenden Werthe beziehen sich auf den gesättigten Zustand; die Zahl 0,111

bildet den Grenzwerth, welchem die Grösse $c_p - c_v$ mit zunehmender Ueberhitzung sich nähert.

Für die Punkte der Nebelkante kann man mittelst der von Weyrauch[1]) angegebenen Methode jede von den beiden Grössen c_p und c_v auch einzeln bestimmen, indem man die allgemeine Differentialgleichung der mechanischen Wärmetheorie:

$$dQ = c_p dT - \frac{ATdp}{\left(\frac{dT}{dv}\right)}, \tag{18}$$

welcher man nach Substitution des aus Gleichung (16) zu entnehmenden Werthes von $\frac{dT}{dv}$ auch die folgende Form geben kann:

$$dQ = c_p dT - \frac{ARTdp}{(1 - \frac{1}{2}\omega)p}, \tag{19}$$

auf den speciellen Fall der Zustandsänderung längs der Nebelkante anwendet und dieselbe nachher mit der Gleichung:

$$dQ = h dT \tag{20}$$

verbindet, in welcher h die bereits anderweitig bekannte specifische Wärme des gesättigten Dampfes für diese specielle Art der Zustandsänderung bedeutet. Durch Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke erhält man alsdann die Gleichung:

$$c_p' = h + \frac{ART}{p'(1-\frac{1}{2}\omega')} \cdot \left(\frac{dp}{dT}\right)', \tag{21}$$

in welcher der Apostroph darauf hinweisen soll, dass die mit demselben bezeichneten Grössen sämmtlich auf den gesättigten Zustand sich beziehen, und dass der Differentialquotient $\frac{dp}{dT}$ hier diejenige Bedeutung hat, welche der Zustandsänderung längs der Nebelkante entspricht. Nach dieser Gleichung erhält man mit gleichzeitiger Benutzung der vorigen Tabelle die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

1) Z. S. d. Ver. dtsch. Ing. 1876. Heft 2.

$p =$	0,1	1	4	14
$c'_p =$	0,360	0,432	0,500	0,584
$c'_v =$	0,243	0,306	0,363	0,426
$\frac{c'_p}{c'_v} =$	1,483	1,412	1,376	1,370.

Für die theoretische Ableitung des allgemeinen Gesetzes, nach welchem die Grössen c_p und c_v als Functionen von p und v mit diesen Grössen sich ändern, bietet die mechanische Wärmetheorie zur Zeit keine weiteren Anhaltepunkte, und zur Ableitung einer empirischen Formel fehlen die erforderlichen Versuchsresultate, insofern der von Regnault für die Isobare $p=1$ bei Ueberhitzungen bis zu 316° C. gefundene Mittelwerth $c_p = 0{,}48$ zur Begründung einer solchen nicht als ausreichend erachtet werden kann. Die Frage nach jenem Aenderungsgesetze ist daher einstweilen noch als eine offene zu behandeln.

§. 4.

Adiabaten und Isothermen des Wasserdampfes.

Die im vorigen Paragraphen mit ω bezeichnete Function ändert sich — wie die Tabelle zeigt — mit den Grössen p und v so langsam, dass man dieselbe für eine kurze Strecke der Adiabate oder Isotherme bei Annahme eines passenden Mittelwerthes ohne Bedenken als eine constante Grösse behandeln darf. Auf gleiche Weise darf man auch hinsichtlich der Grössen c_p und c_v verfahren.

Um die Gleichung der Adiabate zu erhalten, hat man $dQ = 0$ zu setzen in Gleichung (19), welcher man alsdann die folgende Form geben kann:

$$\frac{dT}{T} = \frac{AR}{c_p(1-\frac{3}{2}\omega)} \cdot \frac{dp}{p}. \tag{22}$$

Bei Ausführung der Integration darf man der obigen Erklärung gemäss die Grösse:

$$\frac{AR}{c_p(1-\frac{3}{2}\omega)} = \mu \tag{23}$$

als eine constante Grösse behandeln und findet alsdann für die Verticalprojection der Adiabate die Gleichung:

$$\frac{T}{p^{\mu}} = \text{Const.} \tag{24}$$

Um die Horizontalprojection der Adiabate zu bestimmen, hat man in der allgemeinen Gleichung:

$$dQ = c_v \left(\frac{dT}{dp}\right) dp + c_p \left(\frac{dT}{dv}\right) dv \tag{25}$$

für die Differentialquotienten die im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe zu substituiren und nachher $dQ = 0$ zu setzen; man gelangt dann zu folgender Gleichung:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{1-\frac{3}{2}\omega}{1-\omega}\right)\frac{dv}{v}, \tag{26}$$

und da man der oben gegebenen Erklärung gemäss bei Ausführung der Integration die Grösse:

$$\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{1-\frac{3}{2}\omega}{1-\omega}\right) = k \tag{27}$$

als eine constante Grösse behandeln darf, so erhält man die Gleichung:

$$pv^k = \text{Const.} \tag{28}$$

Wenn der Anfangspunkt der zu berechnenden adiabatischen Strecke in der Nebelkante liegt, und die Länge der Strecke sehr klein ist, so darf man für die Exponenten μ und k annäherungsweise diejenigen Werthe einsetzen, welche jene Grössen in der Nebelkante selbst annehmen. Für diesen Fall ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe.

$p =$	0,1	1	4	14
$\mu =$	0,315	0,271	0,243	0,219
$k =$	1,471	1,385	1,333	1,302.

Mit wachsender Ueberhitzung nähern sich jene Exponenten den Grenzwerthen: $\mu = \frac{k-1}{k}$ und $k = \frac{c_p}{c_v}$. (Die Versuche von Hirn und Cazin[1]) ergaben für Drucke zwischen 0,967 und 4,275 Atmosphären bei Temperaturen zwischen 99,1 und 254,7° C. den Mittelwerth $\mu = 0{,}236$).

1) C. R. LXIII. 1866.

Um die Gleichung der Isotherme zu finden, hat man in der allgemeinen Differentialgleichung:

$$dT = \left(\frac{dT}{dp}\right) dp + \left(\frac{dT}{dv}\right) dv \tag{29}$$

für die partiellen Differentialquotienten die im vorigen Paragraphen angegebenen Werthe zu substituiren und nachher $dT = 0$ zu setzen; man erhält dann eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$\frac{dp}{p} = -\left(\frac{1 - \frac{3}{4}\omega}{1 - \omega}\right)\frac{dv}{v}, \tag{30}$$

und wenn man bei Ausführung der Integration den Quotienten:

$$\frac{1 - \frac{3}{4}\omega}{1 - \omega} = \nu \tag{31}$$

als eine constante Grösse behandelt, so gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$pv^{\nu} = \text{Const.} \tag{32}$$

Nach Gleichung (31) erhält man mit Benutzung der ersten Tabelle des vorigen Paragraphen die folgenden Werthe:

$p =$	0,1	1	4	14
$\nu =$	0,99	0,98	0,97	0,95
	1	1	1	1

Die in der vorletzten Horizontalreihe stehenden Werthe beziehen sich auf den gesättigten Dampf; mit zunehmender Ueberhitzung nähert sich der Exponent dem Grenzwerthe $\nu = 1$, und die Isothermen nehmen die Form gleichseitiger Hyperbeln an.

Aachen, den 11. December 1877.

X. *Die Affinitätsunterschiede des Chlors, Broms und Jods als vielfache derselben Constanten; von Richard Rühlmann.*

J. Thomsen[1]) hat wiederholt darauf aufmerksam gemacht, dass die bei analogen chemischen Processen auftretenden Wärmemengen entweder selbst Vielfache derselben Constanten sind oder dass wenigstens die Differenzen derselben sich als Vielfache solcher Constanten herausstellen. Gegen die Richtigkeit dieser Behauptung sind mehrfach, besonders von Berthelot, Bedenken erhoben worden. Eine Durchsicht des gesammten auf dem Gebiete der Thermochemie zur Zeit publicirten zuverlässigen Beobachtungsmateriales führt zu der Ueberzeugung, dass eine solche Erscheinung in der That vielfach nicht in Abrede zu stellen ist. Allerdings vermisst man auch sehr oft derartige Beziehungen in Fällen, in denen man glaubt, deren Existenz nach Analogie vermuthen zu dürfen.

Man sollte jedoch nicht übersehen, dass bei chemischen Processen fast immer physikalische Zustandsänderungen mit eintreten, und dass man häufig nicht im Stande ist, die Energiemengen zu bestimmen, welchen diese Aenderungen äquivalent sind.

Entstehen aus in Wasser unverändert löslichen Bestandtheilen bei einer chemischen Reaction Verbindungen, welche in Wasser vollkommen stabil sind, also nicht durch die Einwirkung von Wasser partielle Zersetzungen erleiden, so können bei Eintritt analoger Vorgänge am ersten solche einfache Beziehungen erwartet werden, da hier eine nahezu vollkommene Compensation sonstiger Zustandsänderungen höchst wahrscheinlich ist.

Eine Untersuchung der Chlor-, Brom- und Jodverbindungen des Wasserstoffs und der Metalle nach dieser Richtung hat den von Favre und Silbermann[2]) für diese

1) Zuerst 1854 in Pogg. Ann. XCII. p. 44 und neuerdings Ber. d. chem. Ges. V. p. 170. VI. p. 239. VII. p. 452.

2) Ann. d. chim. et phys. (3) XXXVII. p. 489.

Körper gefundenen Satz zum Theil bestätigt, zum Theil beschränkt und zum Theil auch erweitert.

Ich theile im Nachstehenden das hierher gehörige Beobachtungsmaterial mit, und zwar benutze ich ausschliesslich die Zahlen von J. Thomsen. Wenn auch die von diesem Forscher gefundenen Werthe möglicherweise etwas unter den wahren Grössen zurückbleiben, so sind ihre Differenzen doch wahrscheinlich, wenn nicht fast absolut richtig, so doch jedenfalls wesentlich genauer als die entsprechenden Zahlen, welche aus den Beobachtungen Berthelot's oder gar aus den von Favre und Silbermann mit Hülfe des Quecksilbercalorimeters bestimmten Werthen erhalten werden.

Die Reaction, um die es sich im vorliegenden Falle handelt, entspricht der Bildung der Haloidsalzen oder der Hydrosäuren in verdünnter Lösung, z. B.:

$$K + Cl + xH_2O,$$

wobei x eine sehr grosse Zahl ist.

Die Wärmemenge ist angegeben als die Anzahl von Calorien, welche bei der Bildung eines Molecüles der Verbindung (z. B. KCl) entwickelt wird[1]).

Alle folgenden Zahlen, mit Ausnahme der auf Gold bezüglichen, zeigen, dass bei Substitution eines Atomes Brom durch ein Atom Chlor 10 940 und bei Vertretung von 1 Atom Jod durch 1 Atom Chlor 26 150 Calorien entwickelt werden. Werden hingegen beim Goldbromid die drei Atome Brom durch drei Atome Chlor ersetzt, so entwickeln sich nur 22 180 statt, wie man erwarten sollte, 32 100 Calorien.

---

1) Eine Zusammenstellung der hier citirten Zahlen findet man ausser in den Originalabhandlungen J. Thomsen's in dem von mir herausgegebenen Handbuch der mechanischen Wärmetheorie (Braunschweig, Vieweg) II. p. 290. Es sei mir gestattet an dieser Stelle auf zwei Druckfehler in den thermochemischen Tabellen dieses Buches aufmerksam zu machen. Es muss heissen: p. 291 Z. 14 v. o. 28380 statt 23380; p. 298 Z. 11 v. o. $(Al_2, Cl_6, Aq) = 153690$ und dann: $(Al_2, Cl_6, Aq) = 475560$ und $(Al_2, O_3, 3SO_3Aq) = 451770$.

Reaction.	R = Cl	R = Br	R = J	Substitution von Br durch Cl	J durch Cl
$H + R + xH_2O$	39 320	28 380	13 170	10 940	26 150
$K + R + xH_2O$	101 170	90 230	75 020	10 940	26 150
$Na + R + xH_2O$	96 510	85 580	70 300	10 930	26 210
$H_4 + N + R + xH_2O$	86 740	75 800	60 580	10 940	26 160
$Mg + 2R + xH_2O$	186 930	165 050	134 630	21 880	52 300
$Ca + 2R + xH_2O$	187 640	165 760	135 340	21 880	52 300
$Sn + 2R + xH_2O$	195 690	173 810	143 390	21 880	52 300
$Ba + 2R + xH_2O$	196 320	174 440	144 020	21 880	52 300
$Pb + 2R + xH_2O$	75 970	54 410	—	21 560	—
$Cu + 2R + xH_2O$	62 710	40 830	10 410	21 880	52 300
$Tl + 3R + xH_2O$	89 000	56 180	10 550	32 820	78 450
$Au + 3R + xH_2O$	27 270	5 090	—	22 180	—

Es ist jedoch unzweifelhaft, dass die bei Vertretung von Brom und Jod durch Chlor in wässerigen Lösungen der Hydrosäuren und Haloidsalze auftretenden, in Wärmemaass gemessenen Affinitätsdifferenzen ganze Vielfache ein und derselben Zahl, der Zahl 5350 sind.

Es ist nämlich:

10 940	sehr	nahe	gleich	2×5350
21 880	„	„	„	4×5350
32 820	„	„	„	6×5350
26 150	„	„	„	5×5350
52 300	„	„	„	10×5350
78 450	„	„	„	15×5350

Der Affinitätsunterschied zwischen Chlor und Brom verhält sich zu dem zwischen Chlor und Jod wie 2:5.

Auch bei manchen anderen Reactionen in verdünnten Lösungen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von Brom oder Jod eine gleiche Anzahl Chloratome eintritt, auch dann, wenn statt 4 nur 2 Chloratome in die sonst ähnlich gebaute Verbindung eintreten und selbst bei Bildung einiger fester Haloidsalze kann die Differenz der die Verbindung begleitenden Wärmemenge als ein Viel-

faches der Zahl 5350 angesehen werden. Die Uebereinstimmung ist dann jedoch meist keine so vollkommene, wie in den oben mitgetheilten Beispielen.

Dass in allen sonst gleichartigen Fällen durch Ersetzung eines Brom- und Jodatomes durch ein Chloratom immer die nämliche Wärmemenge entwickelt wird, erscheint mir nicht besonders auffällig; es ist dies nur ein neuer Beweis für die längst bekannte Thatsache, dass die sich vertretenden Elemente in den Hydrosäuren und Haloidsalzen immer genau dieselbe Stelle in der Verbindung ausfüllen. Wohl aber erscheint es mir sehr beachtenswerth, dass die Energiedifferenzen in beiden Fällen genaue Vielfache derselben Constanten sind. Es drängt sich dabei unwillkürlich die Vermuthung auf, dass die Affinitäten des Chlors, Broms und Jods selbst in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen möchten.

Eine Prüfung der unmittelbar beobachteten Zahlen unserer Tabelle scheint dies allerdings nicht zu bestätigen und auch die analogen Sauerstoffverbindungen der drei Halogene lassen ähnliche Regelmässigkeiten nicht mit Sicherheit erkennen. Es scheint mir jedoch, als ob dies nicht als Beweis gegen diese Vermuthung betrachtet werden dürfte, da bei der Bildung der Verbindungen selbst eine grosse Anzahl physikalischer Zustandsänderungen concurriren, deren Energieäquivalente zur Zeit nicht bekannt sind.

Vielleicht verdient es auch einige Beachtung, dass die Zahl 5350, welche bei den hier betrachteten Wärmephänomenen als gemeinschaftliches Maass auftritt, auch zu den beiden anderen Werthen, welche von Thomsen als Grundzahlen bei der Erscheinung der Affinität nach Vielfachen derselben Constanten beobachtet worden sind, in einem einfachen, rationalen Verhältnisse steht. Es ist:

$$5350 . \tfrac{7}{2} = 18725 \quad \text{und} \quad 5350 . \tfrac{5}{2} = 13375,$$

und das sind fast genau jene so vielfach in der Thermochemie wiederkehrenden Constanten.

Chemnitz, Februar 1878.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1878. ANNALEN № 4.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND III.

I. *Ueber die Reibungsströme; v. Karl Schering.*

Die hier mitgetheilten Beobachtungen haben die Untersuchung derjenigen electrischen Ströme zum Zweck, welche in einem Leitungsdrahte, dessen Enden mit zwei verschiedenen Stellen des Reibzeugs einer Reibungselectrisirmaschine verbunden sind, auftreten.

Von Hrn. Prof. Riecke wurde ich zu diesen Beobachtungen veranlasst, und ich ergreife gern die Gelegenheit, hierfür wie für die gütige Erlaubniss zur Benutzung der Instrumente des hiesigen physikalischen Instituts meinen Dank auszusprechen.

Eine cylindrische Glaswalze von 119 mm Radius wurde um ihre horizontale Längsaxe gedreht und hierbei gegen einen Riemen, der als Reibzeug diente, gerieben. Mit dieser bisher angewandten Einrichtung ist in folgendem ausserdem ein die Electricität der Walze ableitender Saugkamm in Verbindung gesetzt, und bei allen nun möglichen Combinationen die Abhängigkeit der Intensität der Reibungsströme von der Entfernung der mit einander verbundenen Stellen des Reibzeugs bestimmt.

Quer über den Glascylinder wurde der Riemen aus weichem ungeglättetem Leder gelegt (Dicke = 3 mm, Breite = 40 mm). Das eine Ende desselben war mit seidenen Bändern an einer isolirenden verticalen Glassäule befestigt, die an ihrem Fussende festgeschraubt war, so dass sie bei einem seitlichen Drucke sich nicht bewegen konnte. An dem anderen Ende des über die Glaswalze gelegten Riemens war, ebenfalls mit einem seidenen Bande, eine Wagschale aus Horn befestigt, die frei in der Luft hing.

Durch Gewichte, welche in die Wagschale gelegt waren (1 bis 1,5 kg) wurde der Riemen nahezu gleichmässig gespannt und an die Glaswalze angedrückt. Er berührte dieselbe in einer Länge von 200 bis 300 mm; die geriebene Oberfläche des Riemens war nicht mit Amalgam präparirt. Wurden nun von oben in den Riemen an zwei verschiedenen Stellen zwei Stahlspitzen eingesteckt und jede derselben mit einem Ende des Multiplicatordrahtes eines empfindlichen Wiedemann'schen Galvanometers verbunden, so zeigte dieses, mit Fernrohr und Scala beobachtet, bei dem Drehen der Walze eine Ablenkung der Nadel an in demselben Sinne, wie es Prof. Zöllner[1]) beobachtete. In die beiden Stahlspitzen waren Schraubengewinde geschnitten und eine schmale Messingplatte als Mutter so weit aufgeschraubt, dass beide Spitzen von oben gleich weit in das Leder (1 bis 1,5 mm tief) hineingesteckt werden konnten. Wie tief dies übrigens geschah, erwies sich ohne Einfluss auf die Grösse der Ablenkung der Nadel. Um die Spitzen während der Drehung der Walze vor dem Herabfallen zu sichern, waren über die erwähnten Messingplatten zwei schmale (3 mm breite) Lederstreifen gelegt, die über den breiteren Lederriemen der Länge nach hinliefen, und ebenfalls an dem einen Ende an der Glassäule befestigt, an dem anderen durch ein besonderes geringes Gewicht gespannt waren.

Zunächst wurde die Abhängigkeit der Intensität des „Reibungsstromes" von der gegenseitigen Entfernung der beiden Spitzen auf dem Riemen bei constanter Drehungsgeschwindigkeit der Walze untersucht.

Dasjenige Ende des Reibzeuges, welchem sich bei dem Drehen noch nicht geriebene Stellen der Walze nähern, möge die vordere Kante (V) des Reibzeugs genannt werden, das entgegengesetzte Ende, von welchem sich geriebene Stellen der Walze entfernen, die hintere Kante (H). Diese Bezeichnung ergibt sich unmittelbar, wenn man sich

1) Pogg. Ann. CLVIII. p. 497.

die Drehung der Walze durch eine Bewegung des Reibzeugs um die Walze herum in entgegengesetztem Sinne ersetzt denkt.

Wurde die in der Nähe der einen Kante, *V* oder *H*, des Reibzeugs eingesteckte Spitze in ihrer Stellung ungeändert gelassen, die andere Spitze dagegen in verschiedenen Entfernungen von der ersten in den Riemen, in den eine Centimeterscala eingeritzt war, der Art eingesteckt, dass die unter den Spitzen befindlichen Stellen des Riemens bei der Drehung der Walze von denselben Theilen dieser Walze nach einander gerieben wurden, — so nahm mit zunehmender Entfernung der Spitzen von einander auch der Ausschlag der Nadel des Galvanometers zu.

Diese Abhängigkeit der Stromintensität von der Entfernung der Spitzen zeigte Regelmässigkeit und Uebereinstimmung in verschiedenen Beobachtungsreihen, und eine genauere Berechnung mehrerer derselben ergab, dass der Ausschlag y der Nadel des Galvanometers in Scalentheilen mit grosser Annäherung dargestellt werden kann durch die Formel:

I. $$y = c_0 x - c_1 x^2,$$

wenn x die Entfernung der beiden Spitzen von einander und c_0, c_1 geeignete positive Constanten bedeuten.

Herr Prof. Riecke[1]) hat vor kurzem die Differentialgleichungen für die Electricitätsmenge auf einem unendlich schmalen Streifen, der mit gleitender Reibung auf einer isolirenden Ebene hin bewegt wird, und die Formel für die Electricitätsmenge auf einem Reibzeuge aus einem nichtleitenden Stoffe aufgestellt.

Auf Grund derselben Differentialgleichungen lässt sich auch die allgemeine Formel für die electrische Dichtigkeit H_n, welche sich nach n Umdrehungen auf der cylindrischen Walze befindet, und für die Dichtigkeit E_n auf dem Reibzeuge ableiten. H_n, E_n sind Functionen des Ortes auf der Walze, resp. dem Reibzeuge und der Zeit, ferner

1) Gött. Nach. 1877. November. Wied. Ann. III. p. 414.

abhängig von H_{n-1}, E_{n-1}, d. h. den nach $(n-1)$ Umdrehungen auf der Walze, resp. dem Reibzeuge befindlichen electrischen Dichtigkeiten. Durch wiederholte Einsetzung dieser Formeln in einander erhält man dann H_n, E_n mit Hülfe von Exponentialfunctionen als eindeutige, allein von dem Orte der Zeit abhängige Ausdrücke. Da aber die Formeln in dieser Allgemeinheit zur directen Prüfung durch die Beobachtung nicht fähig sind, so wird die Mittheilung derselben dem Zwecke dieser Experimentaluntersuchung zu fern liegend erscheinen. Leiten wir aber die Electricität der Walze durch einen Saugkamm ab, so dass $H_{n-1}=0$ ist, so erhalten wir unter der weiteren Annahme, dass der Einfluss von E_{n-1}, E_{n-2} u. s. w. auf die Differenzen der electrischen Dichtigkeiten in dem Reibzeuge unberücksichtigt gelassen werden könne, die in der eben citirten Abhandlung abgeleiteten Formeln.

Die Beobachtung zeigt ferner, dass schon nach einer geringen Drehung der Walze der Ausschlag der Nadel vollkommen constant bleibt und mit der Zeit sich nicht mehr ändert. Es muss also auf dem Reibzeuge sehr rasch infolge der Ausgleichung im Riemen selbst, von welcher die Theorie zunächst noch abgesehen hat, ein mit der Zeit sich nicht mehr merklich ändernder Zustand hergestellt werden; für einen Strom von 2 Elementen erwies sich die Leitungsfähigkeit des Leders, auch wenn die Spitzen nur 1 mm entfernt waren, vollkommen gleich Null.

Es konnten also bei den angestellten Beobachtungen die von der Zeit oder der Verschiebungsgrösse des Reibzeugs abhängigen Glieder in der eben erwähnten Formel des Hrn. Prof. Riecke als constant angesehen werden. Dann erhält diese die Gestalt:

$$\text{II.} \qquad y = C_0\left(1 - e^{C_2 x}\right) + C_1 . x . e^{C_2 x},$$

worin x, y dieselbe Bedeutung wie oben haben, also y proportional der Differenz der electrischen Dichtigkeiten auf dem Reibzeuge ist, C_0, C_1, C_2 Constante sind. Da aber, wie

bei der Berechnung der Formel I sich ergab, der Coëfficient von x^3 nicht einmal auf zehntel Scalentheile einen merkbaren Einfluss hat, so können wir an Stelle der Gleichung II auch die mit ihr bis auf die Glieder von der Ordnung x^3 übereinstimmende setzen:

III. $$y = B.x.e^{-Cx},$$

wenn:

$$B = C_1 - C_0 C_2 \qquad C = -C_2 \frac{C_1 - \frac{1}{2} C_0 C_2}{C_1 - C_0 C_2}.$$

In den folgenden Tabellen sind sämmtliche Beobachtungsreihen, die in der oben angegebenen Weise ausgeführt wurden, zusammengestellt. Für zehn derselben sind aus allen einzelnen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe der beiden Constanten B, C berechnet, und mit diesen Werthen wieder diejenigen von y. Die mittleren Abweichungen dieser berechneten von den beobachteten Werthen sind in Scalentheilen und in Procenten des mittleren beobachteten Ausschlags angegeben.

Es bedeutet also:

x die Entfernung der beiden Spitzen auf dem Riemen von einander in Millimetern,

y den Ausschlag der Nadel in Scalentheilen,

F_1 die relative Feuchtigkeit der Luft,

F_2 die absolute Feuchtigkeit der Luft, gleich dem Gewichte (Gramme) des in 1 cbm Luft enthaltenen Wasserdampfes.

F_1 und F_2 sind aus den Temperaturdifferenzen der Thermometer eines August'schen Psychrometers berechnet, die vor und nach jeder Beobachtungsreihe abgelesen wurden.

Die Entfernung der Scala vom Spiegel betrug am 13. und 14. Dec. 2,54 m, am 18., 21. und 22. Dec. 2,37 m, am 3., 5. und 8. Jan. 2,70 m.

Eine Beobachtungsreihe nahm, mit Ausnahme von I, circa eine Viertelstunde in Anspruch.

Die Walze wurde in einer Secunde einmal herumgedreht.

$$y = B \cdot x \cdot e^{-C \cdot x}$$

	I. Dec. 21.		II. Dec. 22.		III. Dec. 22.		IV. Jan. 3.		V. Jan. 3.	
B =	0,112 15		0,073 18		0,122 70		0,368 20		0,964 60	
C =	0,002 472		0,007 00		0,002 105		0,003 05		0,011 59	
F_1 =	0,64		0,68		0,69		0,70		0,73	
F_2 =	7,24		7,79		8,90		8,23		9,13	
x mm	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.
40			2,5	2,8	5,5	4,5	13,4	13,1	23,0	24,3
50	3,6	5,2								
60	5,0	5,8	4,4	4,2	6,1	6,5	17,8	18,6	25,1	28,9
70	6,6	6,6								
80	7,5	7,4	6,8	5,5	7,7	8,3	22,9	23,3	26,0	30,5
90	7,9	8,1								
100	9,1	8,8	7,8	6,8	7,8	9,9	26,9	27,5	27,8	30,3
110	9,5	9,4								
120	10,2	10,0	8,2	8,1	12,4	11,4	31,3	31,1	29,5	28,8
130	10,7	10,6								
140	11,6	11,1	8,4	9,3	13,8	12,8	35,7	34,2	29,2	26,7
150	12,1	11,6								
160	12,6	12,0	9,9	10,4	14,6	14,0	38,2	36,9	27,4	24,2
170	13,6	12,5								
180	13,6	12,9	11,4	11,6	16,2	15,1	39,4	39,1	24,0	21,6
190	14,0	13,3								
200	14,1	13,7	14,0	12,7	17,5	16,1	40,9	41,0	19,8	19,0
210	13,9	14,0								
220	14,7	14,3	13,3	13,8	17,5	17,0	43,4	42,5	17,5	16,6
230	15,6	14,6								
240	15,0	14,9	14,0	14,8			43,1	43,7		
250	15,2	15,1								
260	14,6	15,3	14,6	15,9						
270	14,6	15,5								
280	14,6	15,8	16,5	16,8						
290	15,0	15,9								
300	16,1	16,0	17,0	17,8						
	V.w.		*V.a.*		*V.w.K.*		*H.a.K.*		*H.w.K.*	
Mittl. Abw. in Scalenth.	± 0,5		± 0,7		± 0,9		± 0,6		± 2,1	
in Procenten	4,3 0		6,4 0		7,3 0		1,9 0		8,5 0	

$$y = B \cdot x \cdot e^{-C \cdot x}$$

	VI. Jan. 3.		VII. Dec. 21.		VIII. Dec. 22.		IX. Dec. 22.		X. Dec. 22.	
B =	0,183 22		0,160 40		0,151 10		0,0240		0,049 34	
C =	0,001 551		0		0		0		0	
F_1 =	0,64		0,63		0,59		0,68		0,64	
F_2 =	9,26		6,66		6,28		7,79		8,44	
x mm	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.	y Beob.	Ber.
40									2,0	2,0
60	9,8	10,0	8,8	9,6			1,2	1,4	2,5	3,0
80	14,2	13,6	13,6	12,8	8,5	12,1	1,9	1,9	3,9	4,0
100	16,5	15,7	16,1	16,0	14,6	15,1	2,5	2,4	5,0	4,9
120	19,1	18,3	17,4	19,2	22,2	18,1	3,1	2,9	6,3	5,9
140	21,2	20,6	24,6	22,5	24,6	21,2	3,5	3,4	6,8	6,9
160	23,3	22,9	27,2	25,7	27,9	24,2	3,8	3,8	7,5	7,9
180	23,6	24,9	31,6	28,9	30,4	27,2	4,3	4,3	9,7	8,9
200	24,9	26,9	34,0	32,1	32,7	30,2	5,1	4,8	10,3	9,9
220	27,0	28,7	35,0	35,3	34,4	33,3	5,0	5,3	11,3	10,9
240	28,2	30,3	36,0	38,5	38,0	36,3	5,9	5,8		
260			39,6	41,7	36,9	39,3				
280			44,1	44,9	38,5	42,3				
Mittl. Abw. in Scalenth.	*H.a.* ± 1,0		*V.a.* ± 1,4		*V.a.* ± 2,8		*V.a.* ± 0,1		*V.w.* ± 0,3	
in Procenten	4,8 %		5,1 %		9,6 %		2,8 %		4,8 %	

	XI. Dec.13.	XII. Dec.14.	XIII. Dec.18.	XIV. Dec.18.	XV. Dec.22.	XVI. Jan.5.	XVII. Jan.5.	XVIII. Jan.8.	XIX. Jan.3.
$F_1 =$			0,66	0,68	0,70	0,71	0,75	0,68	0,70
$F_2 =$			7,72	7,84	8,38	10,53	10,33	9,36	9,13
x	y	y	y	y	y	y	y	y	y
40	7,9	4,3			0,6	5,0	7,3	10,0	18,1
50		5,1							
60		6,0	17,4	15,1	1,8	9,5	9,4	16,1	19,7
70		10,9							
80	12,2	12,3	22,0	20,6	2,6	11,2	10,0	21,1	21,5
90		14,2							
100		14,4	23,9	22,4	3,0	13,2	11,9	23,3	23,7
110		16,4							
120	13,2	17,2	23,3	23,8	3,9	13,2	14,5	25,9	25,0
130		20,5							
140		21,8	24,0	25,3	4,4	13,2	13,6	25,8	23,3
150		22,0							
160	15,4	22,2	27,1	26,4	4,2	15,1	17,3	28,7	24,4
170		21,7							
180		23,2	28,0	27,7	4,8	16,8	18,3	31,6	23,1
190		23,6							
200	19,5	23,9	27,7	26,5	5,3	20,9	19,1	31,3	19,9
210		24,7							
220			28,2	27,5	6,3		19,9	33,5	16,8
240	20,1		26,7	28,9	6,4				
	H.a.	*V.a.*	*H.a.*	*H.w.*	*V.w.*	*V.a.K.*	*V.a.K.*	*V.a.*	*H.a.K.*

Jede der angegebenen Grössen y ist das Mittel aus 3 bis 5 Ablesungen nach je 10 Umdrehungen der Walze, bei fortgesetzter und nach den Schlägen einer Secundenuhr möglichst regelmässig ausgeführter Drehung. Diese 3 bis 5 Ablesungen differirten bei den Ausschlägen bis zu 10 bis 20 Scalentheilen um Zehntel derselben, bei den grösseren um 1 bis 3 Scalentheile.

Die Grösse des Ausschlags zeigt sich auch bei derselben Stellung der beiden Spitzen und unveränderter Geschwindigkeit der Drehung und der Spannung des Riemens mit der Zeit sehr veränderlich; ein einfacher Zusammenhang mit dem Feuchtigkeitszustande der Luft lässt sich nicht erkennen. Wurden mehrere Beobachtungsreihen nach einander ausgeführt, so ergab sich eine geringe Ab-

nahme des Ausschlags, und es trat erst nach vollständiger Entfernung der Electricität von der Walze und dem Reibzeuge die anfängliche Stärke des Stromes ein. *V* resp. *H* unter einer Beobachtungsreihe bedeutet, dass die Spitze in der Nähe der Kante *V* resp. *H* fest stehen blieb. War die andere bewegliche Spitze schrittweise auf wachsende Entfernungen von der festen bis schliesslich auf die grösste Entfernung, d. i. auf eine Stelle in der Nähe der anderen Kante eingesetzt worden, so ist dies in der Tabelle mit *w* bezeichnet, war diese Spitze dagegen schrittweise auf abnehmende Entfernungen von der festen eingesetzt, so ist dies durch ein *a* angedeutet. Die Verschiedenheiten in der möglich grössten Entfernung der Spitzen sind eine Folge der verschiedenen Höhe der Befestigungsstelle des Riemens an der Glassäule.

Bei den sonst angestellten Beobachtungen der Reibungsströme wurde die Electricität des Isolators nicht abgeleitet. Geschieht dies aber mit Hülfe eines Saugkammes von der Breite des Lederriemens, der so aufgestellt wird, dass gerade die geriebenen Stellen der Walze über seine Spitzen hinweggeführt werden, so ist die Intensität des Stromes weit stärker als bei Nichtableitung der Walze, wenn sie unmittelbar nach einander verglichen werden. So war z. B. am 22. Dec., als abwechselnd die Ausschläge bei Ableitung der Walze und bei Nichtableitung derselben beobachtet wurden, das Mittel hieraus: Walze nicht abgeleitet . 10,1 Scalentheile.
Walze abgeleitet . . . 31,8 „
Um hiermit die Menge der gesammten, durch die Reibung entwickelten Electricität vergleichen zu können, wurden der selbst isolirte Saugkamm und die vordere Kante des Reibzeugs mit einander verbunden. Es erfolgte ein Ausschlag von 50,7 Scalentheilen.

In der Tabelle bedeutet *K*, dass bei der Beobachtungsreihe der ableitende Saugkamm in Anwendung gekommen war.

Berücksichtigt man, um ein Urtheil über die wahr-

scheinliche Richtigkeit dieses Gesetzes zu gewinnen, nur die 10 berechneten Beobachtungsreihen, so ergibt die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Reihen, dividirt durch die um zwei verminderte Anzahl derselben (da zwei Constante zu bestimmen waren), eine mittlere Abweichung der Beobachtung und Rechnung von 6,7 Procent.

Eine Construction sämmtlicher 19 Beobachtungscurven lässt für die 9 letzteren gemäss den 10 berechneten die mittlere Abweichung in Procenten schätzen. Setzt man hiernach diese für die 9 letzteren Reihen resp. 5, 3, 8, 6, 3, 8, 6, 5, 8, so würde die mittlere Abweichung 6,4 Procent betragen.

Die Unsicherheit der Beobachtungen selbst beträgt, gemäss den oben angegebenen Differenzen der Ablesungen nach je 10 Umdrehungen, 1 Scalentheil auf den noch etwas hoch gegriffenen Mittelwerth von 20 Scalentheilen, oder 5,0 Procent. Danach würde also die Abweichung der analytischen Curve die Beobachtungsfehler, soweit diese aus den Unregelmässigkeiten in der Drehung der Walze resultiren, um etwa 2 Procent übertreffen, und es kann deshalb, mit Rücksicht auf die der Beobachtung sich entziehende Veränderlichkeit des electrischen Verhaltens der Halbleiter, die Formel als mit den Beobachtungen in Einklang stehend angesehen werden.

Der Maximalwerth, welchen y für $x = \frac{1}{C}$ annimmt, wurde nur in den unmittelbar nach einander angestellten Beobachtungsreihen V und XIX beobachtet. Dass sich auch innerhalb enger Grenzen wenig veränderliche Ausschläge ganz gut durch die Formel darstellen lassen, zeigt Nr. I, und es steht deshalb mit den gewonnenen Resultaten auch die Beobachtung von Hrn. Zöllner[1]) nicht in directem Widerspruche, dass innerhalb gewisser Grenzen (von 1 bis 80 mm) der Abstand der beiden Spitzen von einander die Stärke des Stromes nur sehr wenig beeinflusse.

1) Pogg. Ann. CLVIII. p. 513.

Wesentlich aber ist, um regelmässige Ausschläge zu erhalten, dass der Riemen genügend gespannt ist, wie z. B. bei allen angegebenen Beobachtungen durch ein Gewicht von 1 kg. Bei zu geringer Spannung tritt eine zu ungleichmässige Reibung des Riemens ein. Aus diesem Grunde wurde auch von der Untersuchung des Einflusses verschieden grosser spannender Gewichte auf die Intensität des Reibungsstromes abgesehen, da die bei der Aenderung der Spannung zugleich eintretende Aenderung der reibenden Oberfläche sich der Beobachtung entzieht.

Eine Verwerthung der berechneten 10 Werthe von B und C zur Bestimmung einer von der Natur der an einander geriebenen Körper abhängigen Constante erschien bei der Veränderlichkeit dieser Werthe auch nach Reduction auf die Tangente des Ausschlagwinkels nicht angemessen. In den Reihen VII bis X ergab sich C nicht merklich von Null verschieden. Aus den Werthen von B für IX und X, die unmittelbar nach einander, und zwar IX (ebenso wie XV) mit halb so grosser Geschwindigkeit der Drehung wie X, ausgeführt wurden, ergibt sich, dass die Intensität des Reibungsstromes nahezu mit der Geschwindigkeit proportional wächst, wie auch in anderen Fällen beobachtet wurde.

Die Richtung des Stromes stimmte in allen Fällen, mochte die Walze abgeleitet sein oder nicht, mit der von Zöllner beobachteten überein: die Richtung der Ablenkung der Nadel war dieselbe, wie sie ein galvanischer Strom, der in der Richtung von der hinteren Kante des Reibzeugs durch den Multiplicatordraht zu der vorderen Kante strömt, hervorgebracht haben würde; oder: negative Electricität des Reibzeugs strömte von der vorderen Kante desselben zur hinteren Kante.

Das Vorzeichen der auf dem Reibzeuge befindlichen Electricität: Im Laufe der Untersuchung wurde bemerkt, dass sich an den beiden entgegengesetzten Enden des Reibzeugs keineswegs in allen Fällen Electricität mit entgegengesetztem Vorzeichen befand. Die hier-

auf bezüglichen Beobachtungen wurden zunächst mit zwei Goldblattelectroskopen angestellt. In die Nähe der vorderen und in die der hinteren Kante des Riemens wurde eine der Stahlspitzen gesteckt, jede derselben mit dem Knopfe eines der Electroskope leitend verbunden, und dann, nachdem eine geringe Drehung ausgeführt war, diese Verbindungen gleichzeitig gelöst, um die Electricitätsarten zu prüfen. Das mit der hinteren Kante verbundene Electroskop zeigte immer eine geringere Menge Electricität.

E_v, E_h bedeute das mit der vorderen, resp. hinteren Kante verbundene Electroskop. Die Zeichen (−, +) geben das Vorzeichen der Electricität an, wie sie das betreffende Electroskop angab; sie sind gemäss der Zeitfolge der Beobachtungen in den Columnen der folgenden Tabelle geordnet. Das Zeichen *A* bedeutet, dass in dem Zeitraume zwischen der unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Beobachtung die Walze ohne Ableitung der Electricität 10mal herumgedreht wurde, also eine grössere Anhäufung der + Electricität auf der Walze bewirkt wurde. *B* bedeutet eine vollständige Ableitung der Electricität der Walze durch Berührung mit der Hand vor der folgenden Beobachtung. Die Ableitung der Walze während einer Beobachtung geschah, ebenso wie bei allen folgenden Versuchen, mit Hülfe des Saugkammes, der in der obenerwähnten Stellung sich ungefähr in gleicher Entfernung von der vorderen und hinteren Kante des Reibzeugs befand.

Diese Beobachtungen (S. 477) zeigen, dass das Auftreten entgegengesetzter Electricitäten an den beiden Enden des Reibzeugs nicht die allgemeine Regel ist, sondern dass, besonders bei Ableitung der + Electricität der Walze, das Reibzeug an beiden Enden gleiche Electricität besitzen kann, und dass unmittelbar nach einer grösseren Anhäufung der + Electricität auf der Walze (*A*) sofort das Vorzeichen derselben mit der auf der hinteren Kante des Reibzeugs befindlichen übereinstimmt. Dies legt den Schluss nahe, dass diese + Electricität auf dem Reibzeuge von der Walze, die gerade an der Stelle, an

		Walze nicht abgel.		Walze abgel.		Zahl d. Vers.
		E_v	E_h	E_v	E_h	
Jan. 2.	$F_1 = 0{,}72$ $F_2 = 7{,}71$	−	+			7
				−	−	5
Jan. 3.	$F_1 = 0{,}76$ $F_2 = 8{,}82$			−	−	6
		−	−			3
	A	−	+			1
		−	−			2
	A	−	+			2
		−	−			3
	A	−	+			5
				−	+	5
	B			−	−	6
		−	+			3
Jan. 5.	$F_1 = 0{,}68$ $F_2 = 10{,}14$	−	+			5
				−	+	10

der sie das Reibzeug bei der Drehung verlässt, eine grosse Menge + Electricität besitzen muss, übergeleitet oder durch Influenz erregt wird. Die weiteren, in anderer Weise angestellten Versuche können zur Bestätigung dieser Annahme dienen. (Es mag bemerkt werden, dass dieselbe ganz wohl in Einklang mit der p. 473 angegebenen Beobachtung stehen kann, da die Differenz gleichartiger Electricitätsmengen grösser sein kann als die Summe entgegengesetzter, und dass dieses hier stattfindet, zeigt z. B., wenn auch in geringem Maasse, die Beobachtungsreihe, p. 479).

Da aber die Verbindung des Reibzeugs mit den Electroskopen noch während der Drehung der Walze unterbrochen werden musste, um die Divergenz der Goldblättchen zu erhalten (wie es auch Hr. Zöllner l. c. p. 518 angibt), so war die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Electricität in den Goldblättchen des Electroskops E_h auch durch Influenz der in der Nähe der hinteren Kante des Riemens, auf der Glaswalze angesammelten + Electricität, erregt sein konnte, und also das Vorzeichen der auf dem Riemen selbst befindlichen Electricität dadurch nicht angezeigt wurde.

Es wurde deshalb auch mit Hülfe des Galvanometers das Vorzeichen dieser Electricität geprüft. Durch die Ablenkung der Nadel bei der Verbindung der hinteren

und vorderen Kante des Reibzeugs mit dem Galvanometer (Combination $\{H, G, V\}$) war, gemäss dem oben angegebenen Resultate, die Richtung eines von der hinteren Kante durch das Galvanometer strömenden electrischen Stromes gegeben.

Es wurde dann die Verbindung der vorderen Kante mit dem Galvanometer gelöst, das so frei gewordene Ende des Galvanometerdrahtes mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt, so dass also hintere Kante, Galvanometer, Erde in leitender Verbindung standen (Combination $\{H, G, E\}$). Ebenso wurde für sich die vordere Kante des Riemens zur Erde abgeleitet. Die bei der Drehung der Walze dann beobachtete Ablenkung war also eine Wirkung der von der hinteren Kante abströmenden Electricität; und zwar musste das Vorzeichen derselben + sein, wenn die Ablenkung bei gleicher Drehungsrichtung der Walze in demselben Sinne geschah, wie bei der Combination $\{H, G, V\}$, und −, wenn der Sinn der Ablenkung entgegengesetzt war.

In dieser Weise wurde bei den Beobachtungen am 8. Jan. (Nr. VI, XVIII) verfahren, bei denen die Walze nicht abgeleitet war. Es ergab sich auf der hinteren Kante des Riemens + Electricität, erst in einer Entfernung von 50 mm von der vorderen Kante war die indifferente Stelle. Dagegen ergaben bei abgeleiteter Walze 9 Beobachtungsreihen auf dem ganzen Riemen − Electricität, und zwar eine grössere Menge an der vorderen Kante.

In dem folgenden Versuche wurde bei ungeänderter Verbindung $\{H, G, E\}$ die Walze abwechselnd durch einen Saugkamm abgeleitet, und dann dieser wieder entfernt. Das + Vorzeichen der Ablenkungen zeigt an, dass diese in demselben Sinne geschahen, wie bei den früheren Versuchen, so dass die Vorzeichen in der folgenden Versuchsreihe unmittelbar die Art der Electricität angeben, welche sich in einer Entfernung x mm von der vorderen Kante befand.

Jede der angegebenen Ablenkungen ist das Mittel aus zwei Versuchen.

1878 Jan. 10. $6^h - 6^h\,50^m$. Verbindung: *H, G, E.*

x mm von V	Nr. d. Vers.	Ablenkung in Scalentheilen. Walze abgeleitet.	Nr. d. Vers.	Walze nicht abgeleitet.
40	1	− 40,5	2	− 1,5
60	3	− 37,1	4	− 0,5
100	5	− 40,4	6	+ 0,1
120	7	− 42,0	8	+ 0,5
160	9	− 42,4	10	+ 2,5
180	11	− 42,7	12	+ 2,5
200	13	− 43,0	14	+ 3,3
220	15	− 39,8	16	+ 3,5
240	17	− 34,8	18	+ 3,0

Es verschwand also die in der Nähe der hinteren Kante auf dem Riemen auftretende + Electricität, wenn die Walze durch einen Saugkamm in der obenerwähnten Weise abgeleitet wurde.

Da die angegebene Versuchsreihe nur zur Bestimmung des Vorzeichens dienen sollte, so wurde nicht, wie es bei den folgenden geschah und bei einer fast eine Stunde dauernden Beobachtungsreihe nöthig ist, die Ablenkung in der Entfernung x von der vorderen Kante mit der Ablenkung in einer constanten Entfernung unmittelbar nach einander verglichen, und es können deshalb die oben unter „Walze abgeleitet" angegebenen Ablenkungen über die an verschiedenen Stellen des Reibzeugs zu ein und derselben Zeit befindlichen electrischen Dichtigkeiten keinen Aufschluss geben. Dazu dienen aber die beiden folgenden Versuchsreihen. Es wurden zuerst bei einer Entfernung der beiden Spitzen: $x = 240$ mm die Ablenkungen bei der Verbindung $\{H, G, V\}$, dann bei $\{H, G, E\}$ beobachtet, und zur Controle die erstere Verbindung wiederholt. Dann wurde die Stahlspitze von der hinteren Kante *H* fortge-

nommen, nach einander in verschiedenen Entfernungen x von der vorderen Kante in den Riemen eingesteckt, und für jede dieser Entfernungen die gleichen drei Beobachtungen ausgeführt, inzwischen aber zur Controle die drei für den möglich grössten Werth $x = 240$ mm wiederholt.

Die Stahlspitze an der vorderen Kante wurde immer in ihrer Stellung ungeändert gelassen. Die Ablenkungen, wie sie unter $\{H, G, V\}$ als Mittel aus zwei Versuchen in den folgenden Tabellen angegeben sind, sind also proportional den Intensitäten der „Reibungsströme“ für die Entfernung der Spitzen = 240 mm, resp. $= x$. Die unter $\{H, G, E\}$ angegebenen Ablenkungen sind proportional den — electrischen Mengen auf dem Reibzeuge in einer Entfernung von der vorderen Kante = 240 mm, resp. $= x$.

Entf. der Scala vom Spiegel = 2,70 m. Walze abgeleitet.

1878. Jan. 10. $0^h\,30^m - 1^h\,10^m$.

Nr. d. Vers.	Entf. d. Spitzen = 240 mm. Verbindung: I H, G, V	II H, G, E	Nr. d. Vers.	Entf. d. Spitzen. x	Verbindung: III H, G, V	IV H, G, E	Differenzen: I—III	II—IV
1	5,4	— 8,8	2	40	0,7	—14,2	4,7	5,4
3	7,9	—12,4	4	80	1,9	—18,5	6,0	6,1
5	8,6	—16,0	6	120	4,2	—19,2	4,4	3,2
7	8,7	—17,2	8	160	6,1	—18,3	2,6	1,1
9	9.1	—17,3	10	200	7,6	—17,3	1,5	0
			1878. Jan. 10. $3^h\,45^m - 5^h\,0^m$.					
1	13,2	—11,1	2	40	1,3	—17,7	11,9	6,6
3	14,5	—13,2	4	60	5,1	—19,9	9,4	6,7
5	13,8	—14,2	6	80	6,7	—17,9	7,1	3,7
7	11,9	—14,3	8	100	6,4	—18,2	5,5	3,9
9	10,7	—15,2	10	120	6,7	—18,0	4,0	2,8
11	9,4	—16,3	12	140	6,9	—18,5	2,5	2,2
13	8,6	—16,2	14	160	5,8	—17,7	2,8	1.5
15	7,7	—16,1	16	180	6,4	—17,5	1,3	1,4
17	6,9	—16,1	18	200	6,6	—16,4	0,3	0,3

Die Differenzen (I — III) sind proportional den Intensitäten der „Reibungsströme“ für die Entfernungen

$\{240 - x\}$ der beiden Spitzen. Die Differenzen (II – IV) sind proportional den Unterschieden der – electrischen Mengen auf dem Reibzeuge an denjenigen Stellen, in welchen die um $\{240 - x\}$ entfernten Spitzen eingesteckt sind.

Die Beobachtungen zeigen, dass beide Differenzen in demselben Sinne sich ändern, und zwar gemäss dem oben ausführlich besprochenen Gesetze mit abnehmender Entfernung der Spitzen abnehmen, so dass also die Reibungsströme in der Ausgleichung dieser Differenzen gleichartiger Electricität ihre Erklärung vollständig finden können.

Die mitgetheilten Beobachtungen ergeben also die Resultate:

Für die Entstehung der Reibungsströme ist es unwesentlich, ob die Electricität des Isolators (hier: der Glaswalze) abgeleitet wird oder nicht, ebenso unwesentlich ist das Auftreten entgegengesetzter Electricitätsmengen an den beiden Enden des Reibzeugs. Da die electroskopischen Beobachtungen, und besonders die Beobachtungen mit dem Galvanometer zeigen, dass die in ihrem Vorzeichen mit der Electricität des Isolators (hier +) übereinstimmende Electricität, welche an der hinteren Kante des Reibzeugs auftreten kann, bei der Ableitung des Isolators fast in allen Fällen zugleich verschwindet, so ergibt sich der Schluss, dass diese Electricität auf dem Reibzeuge ihren Ursprung derjenigen des Isolators verdankt und von dem Isolator zum Reibzeuge übergeleitet ist. Aus der Richtung des Stromes, der durch Verbindung der beiden Enden des Reibzeugs in dem Verbindungsdrahte beobachtet wird, folgt, dass auf der hinteren Kante des Reibzeugs eine geringere Menge negativer Electricität sich befinden muss als auf der vorderen, und da bei wechselnder Drehungsrichtung auch ein Wechsel der Stromesrichtung eintritt, so folgt, dass diese electrischen Differenzen nur eine Folge der Reibung sind. Die Abhängigkeit der Intensität jenes Stromes von der gegenseitigen Entfernung der beiden mit einander

verbundenen Stellen des Reibzeugs ergibt ferner, dass auf dem Reibzeuge bei der Reibung eine von der hinteren zur vorderen Kante stetig sich ändernde Electricitätsmenge erzeugt werden muss. Der Unterschied (y) dieser Electricitätsmengen, welche sich an zwei um die Länge x von einander entfernten Stellen des Reibzeugs befinden, kann analytisch durch die Formel dargestellt werden,

$$y = B.x.e^{-Cx}.$$

Eine genauere Untersuchung über den Einfluss der Geschwindigkeit, mit welcher Isolator und Reiber an einander vorbeigeführt werden, auf die im Reibzeuge auftretenden electrischen Differenzen soll in der nächsten Zeit ausgeführt werden.

Göttingen, 23. Jan. 1878.

Anmerkung. Hr. Prof. Riecke hatte die Güte, mich von einem in diesen Tagen eingelaufenen, an ihn gerichteten Brief von Hrn. Prof. Riess Kenntniss nehmen zu lassen. Es wird hierin der von Hrn. Prof. Zöllner angestellte Versuch erwähnt, in welchem an den entgegengesetzten Rändern eines Reibers durch ein Electroskop entgegengesetzte Electricitäten angezeigt werden.

Hr. Riess fährt dann fort:

„Diesen Versuch habe ich seiner Zeit wiederholt und gefunden, dass er bei sorgfältiger Anstellung nicht gelingt; beide Ränder geben dem Electroskope dieselbe Electricität, nämlich die, welche der Reiber besitzt."

„Berlin, 27. Januar 1878.

Mit Rücksicht auf das oben Angegebene lassen sich also diese in ihrem Erfolge verschiedenen Beobachtungen mit einander in Einklang bringen.

II. *Ueber das Gleiten electrischer Funken und über die Ausgleichungsstelle in der Schlagweite; von Karl Antolik.*

Seit meiner letzten Mittheilung über das Gleiten electrischer Funken[1]) sind von den Herren Mach und Wosyka[2]), Peters[3]), Schneebeli[4]) und Kont Versuche in ähnlicher Richtung angestellt worden. Da dieselben indess noch nicht alle Zweifel zu heben schienen, setzte ich meine Versuche weiter fort, und zwar, um womöglich die Nebenerscheinungen, die hier so störend wirken, zu beseitigen, namentlich im luftverdünnten Raume, wo sie sich, wie ich schon früher erwähnte, anders gestalten, als die beim gewöhnlichen Luftdrucke, und besonders die Ausgleichungsstelle der beiden entgegengesetzten Electricitäten in dem Funken sich gut erkennen lässt. Zu nachstehenden Versuchen gebrauchte ich sorgfältig gereinigte, gewöhnliche Fensterglasplatten von 9 cm Länge und 7 cm Breite, welche mit zwei zugespitzten, etwa 1 cm breiten Stanniolstreifchen als Electroden versehen wurden, so dass die Schlagweite dazwischen 46 mm betrug. Ferner wurden die Glasplatten mit glattem Visitenkartenpapier mittelst Gummi-Arabicum ganz überklebt, das Papier an den Stanniolspitzen mit einer Nadel durchstochen und berusst (am besten so, dass das Papier noch hindurchscheint). Eine solche Glasplatte wird auf einem mit Stanniol überzogenen Korkstück in verticaler Lage befestigt und dieses auf den Teller der Luftpumpe so gelegt, dass das Stanniol den Ring des messingenen Pumpenkanals, der unten in einen Messingknopf endende Stab der Stopfbüchse der darüber gestülpten Glasglocke die obere Electrode berührte. Der Pumpenkanal wird mit der

1) Pogg. Ann. CLIV. p. 14.
2) Pogg. Ann. CLVI. p. 407.
3) Pogg. Ann. CLVI. p. 397.
4) Carl Repert. XI. H. 6.

äusseren Belegung, die Stopfbüchse ebenso mittelst einer Messingkette und eines isolirten Handentladers nach Evacuiren der Luft auf 10 mm Druck mit der inneren Belegung der Batterie etwa von 1821 qcm Oberfläche verbunden. Bei der Entladung entsteht ein meistens sehr regelmässiges, von der Schnelligkeit der Annäherung des Entladers an die Batterie nicht wesentlich abhängiges Funkenbild auf der berussten Platte.

Taf. III Fig. 6 zeigt das gewöhnliche Funkenbild, wenn die Batterie mit positiver Electricität geladen war. Dasselbe kann in drei Theile zerlegt werden, wie auch Hr. Peters in Betreff des Blitzes angibt.

Im positiven Drittel sehen wir einen geraden inneren Streifen, der von der positiven Electrode ausgehend, in der Ausgleichungsstelle verstärkt und scharf abgeschnitten erscheint. Zu beiden Seiten dieses Streifens sind schwache Spuren von Nebenstreifen bemerkbar, die in der „Ausgleichungsstelle“ in der Mitte zu lichten Flecken anschwellen und immer die hellsten Bestandtheile des Funkenbildes sind. Diese zwei Nebenflecke haben in vielen Fällen eine hyperbolische Form, liegen in kleiner Entfernung von dem inneren Streifen und fehlen nur selten. Manchmal jedoch fliessen sie mit dem inneren Streifen zusammen und bilden dann ein gezacktes längliches Rechteck; ein anderes mal wieder treten sie in einer recht unregelmässigen Form zu beiden Seiten des inneren Streifens in der Verlängerung des Funkenbildes auf. Mit der Lupe kann man sich überzeugen, dass der innere Streifen des positiven Drittels seiner Länge nach aus zarten, parallelen, aber hier und da zerrissenen Fasern zusammengesetzt ist und gegen die Ausgleichungsstelle zu immer breiter wird. An der verstärkten Stelle verwaschen sich die Fasern vollständig. In den Nebenstreifen und Nebenflecken sind keine faserigen Spuren zu finden.

In dem kleineren oder negativen Drittel sehen wir nur sehr schwache Spuren von einem inneren, aber nicht faserigen und zwei äusseren Streifen.

Schon dieses Bild zeigt uns sehr deutlich, dass in der Ausgleichungsstelle zwei entgegengesetzte Strömungen zusammentreffen, und dass an dieser Stelle die Ausgleichung der zwei entgegengesetzten Electricitäten stattfindet.

Nur höchst selten ist in einem Funkenbild die Ausgleichungsstelle undeutlich (Taf. III Fig. 7).

Im luftverdünnten Raume von 2—3 mm sind oft nur die drei Flecke in der Ausgleichungsstelle wahrnehmbar und die Streifen sind nur spurenweise und schwer zu sehen, die Nebenstreifen verschwinden. Indess selbst in sehr verdünnter Luft kann man noch Spuren des Funkenbildes entdecken. Mit wachsender Verdünnung wächst die Regelmässigkeit der Funkenbilder.

Taf. III Fig. 8 zeigt ein regelmässiges Funkenbild, bei welchem die Batterie mit negativer Electricität geladen war. In diesem Falle ist das positive Drittel kürzer als das negative; die Vereinigungsstelle ist etwas modificirt. Die zwei Nebenstreifen treten auch hier im positiven Drittel deutlich auf, wogegen im negativen Drittel kaum einige Spuren derselben wahrnehmbar sind. Die zwei Nebenflecke sind an ihrem Orte in der Ausgleichungsstelle stärker markirt, aber auch etwas modificirt. Der innere Streifen ist auch im negativen Drittel entwickelt, aber in der Ausgleichungsstelle nicht vollständig unterbrochen, sondern blos verengt.

Bei der Erzeugung der mit positiver und negativer Ladung der Batterie gewonnenen Funkenbilder Taf. III Fig. 9 und Fig. 10 blieben alle Bedingungen dieselben, nur wurde die präparirte Glasplatte noch unter Einschieben kleiner, mit Siegellack befestigter Glasstückchen mit einer zweiten, reinen Glasplatte bedeckt, so dass zwischen beiden Platten ein Zwischenraum von 1.25 mm Dicke sich befand.

Der innere Streifen erleidet hierbei in keiner Hinsicht eine Veränderung, aber um so mehr die Nebenstreifen.

In der Regel liegt also bei positiver Ladung der Batterie die Ausgleichungsstelle näher der negativen, bei negativer Ladung näher der positiven Electrode. Indess zeigen sich hiervon häufig Ausnahmen, trotzdem die Leitungen nach beiden Belegungen, der Luftdruck, die Berussung u. s. f. möglichst gleich erhalten wurden. Während bei positiven Ladungen der Batterie das positive Drittel immer länger ist, als das negative, ist häufig bei negativen Ladungen das positive Drittel länger, als das negative; auch sind dann die Funkenbilder sehr regelmässig, die Ausgleichungsstelle nimmt gewöhnlich einen grösseren Raum ein, als sonst, und ändert zugleich ihren Charakter, wie das Taf. III Fig. 11 zeigt. Zuweilen erstreckt sich sogar die Ausgleichungsstelle bei negativen Ladungen bis sehr nahe an die negative Electrode (Taf. III Fig. 12).

Auch die zwei letzteren Bilder wurden unter denselben Bedingungen hervorgerufen, wie die Bilder der Taf. III Fig. 8, so dass der Grund dieser Ausnahmen schwer einzusehen ist.

In normalen Fällen dürfte indess wohl im allgemeinen stets das positive Drittel länger sein, als das negative, sowohl bei positiven, als auch bei negativen Ladungen. Wurde die äussere Leitung so unterbrochen, dass der Funke in freier Luft 1—50 mm durchspringen musste, so nahm (namentlich bei negativen Ladungen), die Ausgleichungsstelle einen um so grösseren Raum ein und kam um so näher der negativen Electrode zu liegen, je grösser die Unterbrechung der äusseren Leitung war. Bestreut man die frischen Russfiguren mit der Mischung von Schwefel und Mennige, so kann man damit keine Spuren von freier Electricität darauf nachweisen, da beim Gleiten der Funken auf hinlänglich dicken berussten Glasplatten eine vollständige Vereinigung der beiden entgegengesetzten Electricitäten vor sich geht. Auf sehr dünnen, auf der anderen Seite mit einem guten Leiter bedeckten Glasplatten entstehen

indess, wie ich schon früher erwähnt habe, derartige Vertheilungsfiguren[1]). Sehr schön lassen sich dieselben auf Glaskolben darstellen. Man füllt einen sorgfältig gereinigten Glaskolben von 2—3 l Inhalt mit Wasser von etwa 25—30° C., um den Niederschlag von Feuchtigkeit zu verhindern, ganz voll, oder überzieht ihn innen mit einer anderen leitenden Schicht, stellt ihn zwischen die Electroden eines Henley'schen Entladers, indem man dem letzteren eine Schlagweite von 8—10 cm gibt, und entladet hierauf eine grössere Leydener Flasche oder noch besser eine Batterie so, dass der Funke auf dem Glaskolben gleiten muss; bestreut man endlich die Funkenbahn mit dem Schwefel-Mennige-Pulver, so entsteht eine Figur, die oft die halbe Fläche des Kolbens einnimmt (Taf. III Fig. 13). Ist das Innere des Kolbens trocken, so erhält man keine Figur. Während die abgerundeten zickzackförmigen Ränder der positiven Figur von aussen strahlig und von innen glatt sind, ist das bei der negativen Figur umgekehrt. Die Ränder der positiven Figur sind mit Schwefelpulver, die der negativen mit Mennige behaftet. Vom positiven Ausgangspunkte des Funkens verlaufen bis nahe an die Ränder nach allen Richtungen hier und da, namentlich in der Mitte, von staubleeren, astartigen Zweigen durchbrochene Mennigeflächen, die gegen aussen hin ebenso gezackt sind, wie die Ränder der Figur selbst, aber die letzteren nicht berühren. Von den äusseren Schwefelrändern greifen zwischen die Mennigeflächen verengte Schwefelfransen ein, die fast bis an den Mittelpunkt der positiven Figur reichen.

Vom Mittelpunkte der negativen Figur verbreiten sich nach allen Richtungen, ziemlich radial, ausgezeichnet entwickelte Schwefelverästungen, die wieder bis nahe an die Ränder der negativen Figur sich erstrecken. Ausserdem greifen zwischen die einzelnen Schwefelverzweigungen von dem äusseren Mennigerande ausgehende Mennigefransen fast bis in die Nähe des Mittelpunktes ein. Die einzelnen

1) Vgl. Pogg. Ann. CLIV. p. 36.

Schwefeläste sind von den Mennigefransen durch grössere, staubleere Flächentheile ausserordentlich deutlich getrennt.

Die Funkenbahn selbst ist durch einen scharf begrenzten breiten Streifen bezeichnet; derselbe besteht aus zwei ungleichen Hälften, die den zwei Dritteln der Russfiguren entsprechen. Während die in der positiven Figur liegende, längere Hälfte des Funkenweges durchgehends mit Mennigestaub behaftet ist und ein runzeliges Aussehen hat, ist die in der negativen Figur mehr glatt und mit einem Gemisch von Schwefel und Mennige behaftet oder staubarm, zugleich aber mit zwei breiten Schwefelnebenstreifen umgeben. In der Vereinigungsstelle selbst sind die durchbrochenen äussersten Ränder der beiden Figuren deutlich abgeschnitten, wogegen die inneren Bestandtheile schnell in einander fliessen, und nur der innerste Streifen des Funkens ununterbrochen ist.

Ist die Funkenbahn nicht deutlich genug entwickelt, so stimmt sie in der positiven Figur mit den entsprechenden Mennigeflächen, in der negativen aber mit den entsprechenden Schwefelverzweigungen ziemlich überein, doch ist auch dann die Vereinigungsstelle deutlich zu sehen.

Sehr oft theilt sich die innere Funkenbahn in zwei oder auch in mehrere Streifen, wodurch natürlich die Vereinigungsstelle stark modificirt wird, allein sie behält ihren Hauptcharakter auch dann bei. Auch um die äussersten Ränder beider Figuren zeigen sich staubleere Umzäunungen, in den Biegungen der Mennigeränder liegen nach aussen hin kegelartige Ausläufer. Der dunkle elliptisch gestaltete Mennigefleck im Mittelpunkte der positiven Figur ist eine seltenere Erscheinung; gewöhnlich wird an dieser Stelle das Funkenbild nur stärker markirt. In der Figur sind die staubleeren Stellen hell gezeichnet.

Hält man den Kolben nur zwischen die Entladungskugeln der Holtz'schen Maschine ohne Verstärkungsflaschen, so springt kein eigentlicher Funke über, sondern es gleichen sich die an den Kugeln angesammelten Electricitäten mit den auf dem Kolben inducirten aus, und

man bekommt eine Art sehr schön und rein ausgebildeter Lichtenberg'scher Figuren. Die Figuren lassen sich auch einzeln hervorrufen und entwickeln sich ausserordentlich gut, wenn man die äussere Belegung der Batterie mit dem Wasser im Glaskolben leitend verbindet und nur den einen Knopf des Entladers an die Oberfläche des Kolbens bringt und so die Batterie durch den Kolben hindurch entladet, welcher hierbei zersprengt wird.

Die vorliegenden Versuche dürften einen neuen Beweis für die durch die Entladungen in gasverdünnten Räumen festgestellte Thatsache liefern, dass zur Entladung der positiven Electricität caet. par. eine grössere Spannung erforderlich ist, dieselbe sich also auch mit grösserer Geschwindigkeit und weiter verbreitet als die negative, so dass sich beide Entladungen etwa auf ein Drittel des Abstandes der Electroden näher an der negativen Electrode treffen.

Bei anderer Gelegenheit hoffe ich die eben erwähnte Verhältnisszahl mit grösserer Genauigkeit angeben zu können.

Arad, den 12. Januar 1878.

III. *Bemerkungen über die beim Ausströmen der Flüssigkeiten durch Röhren entstehende electromotorische Kraft; von E. Edlund.*

Meine frühere Untersuchung über die electromotorische Kraft beim Strömen von Flüssigkeiten in Röhren[1]) führte unter anderem zu den Ergebnissen, dass diese Kraft der Entfernung zwischen den Electroden direct und dem Querschnitte der Röhre umgekehrt proportional ist; sie wächst mit der Geschwindigkeit der Flüssigkeit und ist bei grös-

1) Wied. Ann. I. p. 161.

serer Geschwindigkeit annähernd ihrem Quadrat, bei kleinerer aber ihrer ersten Potenz proportional. Ferner wurde experimentell bewiesen, dass die Kraft nicht durch die Reibung der Flüssigkeiten gegen die Wände der Röhre oder gegen die Electroden verursacht werden kann. Der letztere Satz ist von Hrn. Dorn durch eine von der meinigen wesentlich verschiedene Methode bestätigt worden [1]).

Vor kurzem sind zwei neue Untersuchungen über diesen Gegenstand veröffentlicht worden, die eine von Hrn. Haga, die andere von Hrn. Clark [2]). Beide haben das Electrometer zum Messen der electromotorischen Kraft angewandt, sie haben die zu untersuchende Röhre zwischen zwei weitere Röhren eingekittet, in welchen die Electroden befestigt waren. Die Ergebnisse des Hrn. Haga unterscheiden sich nach seinen Angaben wesentlich von den von mir gefundenen. Ich will hier versuchen, den Grund der mangelnden Uebereinstimmung der gewonnenen Resultate an den Tag zu legen.

Hr. Haga hat zu seinen Versuchen absichtlich Glasröhren von solchen Dimensionen gewählt, dass das bekannte Poiseuille'sche Gesetz für die Ausflussgeschwindigkeit gültig blieb. Er hat unter anderem gefunden, dass die electromotorische Kraft dem Drucke proportional, aber von der Länge der Capillarröhre, d. h. von der Entfernung der Electroden unabhängig sei.

Hr. Haga scheint mir nicht die verschiedenen Bedingungen, die zur Entstehung der erwähnten Erscheinung mitwirken, völlig auseinandergehalten zu haben. Nachdem er die Capillarröhre zwischen zwei weitere Röhren, in welchen die Electroden befestigt waren, eingekittet hatte, liess er Wasser unter einem gewissen Drucke durch dieselbe strömen und maass die hierdurch entstandene electromotorische Kraft. Darauf verkürzte er dieselbe Röhre, z. B. zur Hälfte, kittete sie wieder zwischen die

1) Pogg. Ann. CLX. p. 56.
2) Wied. Ann. II. p. 326 und 335.

weiteren Röhren ein, beobachtete von neuem und fand jetzt eine electromotorische Kraft von ungefähr derselben Grösse wie vorhin. Als aber die Capillarröhre zur Hälfte verkürzt wurde, wurde die Ausflussgeschwindigkeit doppelt so gross als vorhin, weil, nach der Poiseuille'schen Formel, die Geschwindigkeit der Länge der Röhre umgekehrt proportional ist. Zwei Umstände, von denen die electromotorische Kraft abhängt, variirten also gleichzeitig. Meinen Beobachtungen zufolge ist die electromotorische Kraft der Entfernung zwischen den Electroden und, bei geringerer Geschwindigkeit, auch dieser direct proportional. Wendet man dies auf die Beobachtungen des Hrn. Haga an, so wird das von ihm erlangte Resultat leicht erklärlich.

Dass die electromotorische Kraft nicht von der Entfernung zwischen den Electroden, wie dies von Hrn. Haga behauptet wird, unabhängig sein kann, findet man leicht auch ohne Versuche. Man denke sich eine Röhre, in deren beide Enden, *a* und *b*, und Mitte, *c*, eine Electrode eingeschmolzen ist, von Wasser unter einem gewissen Drucke durchströmt. Der Behauptung des Hrn. Haga gemäss müsste die Potentialdifferenz der Electroden bei *a* und *b* dieselbe sein wie die der Electroden bei *a* und *c* und die der Electroden bei *c* und *b*. Dass aber dies unmöglich ist, wofern nicht die Potentialdifferenz gleich Null ist, ist einleuchtend. Ist das aber nicht der Fall, so muss die Potentialdifferenz zwischen *a* und *b* der Summe der Potentialdifferenzen zwischen *a* und *c* und zwischen *c* und *b* gleich sein.

Es war auch leicht vorauszusehen, dass Hr. Haga die electromotorische Kraft unter sonst unveränderten Verhältnissen dem Drucke proportional finden musste; denn er hat Röhren, für welche die Poiseuille'sche Formel gilt, angewandt, und dieser Formel gemäss ist die Ausflussgeschwindigkeit dem Drucke proportional. Dass die electromotorische Kraft der Ausflussgeschwindigkeit proportional ist, wenn diese, wie es bei den Versuchen des Hrn. Haga der Fall war, gering ist, folgt auch als ein Resultat aus meinen Untersuchungen.

Gegen die Angabe des Hrn. Clark, dass die electromotorische Kraft von der Länge der Röhre unabhängig sei, gelten dieselben Bemerkungen, die soeben angeführt worden. Dass diese Kraft bei seinen Versuchen desto grösser ist, je enger die Röhre, stimmt mit meinen Beobachtungen überein, nach welchen sie, unter sonst unveränderten Verhältnissen, dem Querschnitte umgekehrt proportional ist[1]). Die Behauptung aber, dass die Grösse dieser Kraft von dem Stoffe, womit die innere Seite der Röhre bekleidet ist, abhängen sollte, veranlasst mich zu den folgenden Bemerkungen.

Hr. Clark wandte hierzu zwei Röhren an, von welchen die eine circular war, einen Durchmesser von 0,7952 mm und eine Länge von 142,1 mm hatte; die andere Röhre war elliptisch, ihr grösster Durchmesser betrug 0,4363 mm, der kleinste 0,2414 mm und ihre Länge 104,9 mm. Mit der ersteren Röhre erhielt er unter einem Quecksilberdrucke von 1285 mm eine electromotorische Kraft gleich 1,179 der eines Daniell'schen Elementes. Als aber bei den folgenden Versuchen die Röhre auf der inneren Seite mit einer dünnen Schicht von Schellack, Wachs oder Fett überzogen wurde, wurden die entsprechenden electromotorischen Kräfte gleich 1,643, 1,289 und 1,631. Bei jedem Versuche wurde die in einer gewissen Zeit ausgeflossene Wassermenge gemessen, woraus die Ausflussgeschwindigkeit bestimmt werden konnte.

Wenn auch die auf der Innenseite der Röhre angebrachte Bekleidung noch so dünn war, so musste sie den Durchmesser der Röhre ein wenig verringern. Wenn man nun von dem Ergebnisse meiner Untersuchung ausgeht und also annimmt, dass die electromotorische Kraft der

1) Bei der Erwähnung meiner Untersuchung hat Hr. Clark die electromotorische Kraft mit der Stromstärke verwechselt. Dieser Untersuchung gemäss ist nicht die electromotorische Kraft, wie Hr. Clark es verstanden hat, von dem Durchmesser der Röhre und der Entfernung der Electroden unabhängig; mit der Stromstärke ist dies aber unter gewissen Umständen der Fall.

Ausflussgeschwindigkeit direct und dem Querschnitte der Röhre umgekehrt proportional ist, und wenn man danach berechnet, wie dick die Bekleidung in jedem der drei Fälle sein müsste, damit die electromotorische Kraft den Werth erhielte, zu welchem die Versuche des Hrn. Clark geführt haben, so findet man, dass die Schellackschicht 0,033 mm, die Wachsschicht 0,009 mm und die Fettschicht 0,029 mm betragen haben müsste. Die elliptische Röhre gab Hrn. Clark eine electromotorische Kraft gleich 1,4095 und, mit Schellack inwendig überzogen, gleich 1,723. Wenn man annimmt, diese Röhre verhalte sich genau wie eine circulare mit demselben Querschnitte (der Durchmesser einer solchen circularen Röhre wird 0,3245 mm), und wenn man auf dieselbe Weise wie vorhin berechnet, wie dick die Schellakschicht sein müsste, um die beobachtete Veränderung der electromotorischen Kraft zu verursachen, so findet man eine Dicke von 0,008 mm.

Hr. Clark bekleidete auch die Innenseite einer Capillarröhre mit einer dünnen Silberschicht und fand, dass die Spannungsdifferenz der Electroden dadurch auf weniger als $^1/_5$ des Werthes herabsank, welchen dieselbe Röhre unbekleidet lieferte. Es ist selbstverständlich, dass dies der Fall sein musste. Denn die Silberschicht setzte die beiden Electroden in leitende Verbindung mit einander, woraus nothwendig folgt, dass ihre Spannungsdifferenz vermindert wurde.

Aus diesen Gründen geht hervor, dass die Versuche des Hrn. Clark keineswegs darthun, dass die electromotorische Kraft von dem Stoffe, woraus die Innenseite der Röhre besteht, abhängt. Man hat daher kein Recht, sich auf diesen Versuch stützend, den Sitz der electromotorischen Kraft an die Grenzfläche des Wassers und der Röhre zu verlegen. Ich habe in meiner Untersuchung bewiesen, dass die electromotorische Kraft in dem fraglichen Falle nicht von der Reibung zwischen der Flüssigkeit und der Röhre herrührt; und Hr. Dorn hat gefunden, dass die electromotorische Kraft unverändert dieselbe

bleibt, wenn die Glasröhre inwendig mit Schellack oder Schwefel überzogen wird. Der Durchmesser der Röhre aber, welche Hr. Dorn hierzu angewandt, betrug 4 mm; daher hatte die Verengerung, die die Röhre durch den dünnen Ueberzug litt, keinen merkbaren Einfluss. Zur Ergründung der Gesetze der fraglichen Erscheinung sind, meiner Meinung nach, enge Capillarröhren durchaus unzweckmässig. Es ist schwer, wenn nicht unmöglich, zwei solche Röhren zu finden, die einander in jeder Beziehung vollkommen gleichen. Das gleichmässige Ausströmen aus einer engen Capillarröhre wird auch leichter von fremdartigen zufälligen Ursachen gestört, als wenn die Röhre weiter ist. Es ist daher erklärlich, dass man mit zwei solchen Röhren, welche anscheinend gleich sind, etwas verschiedene electromotorische Kräfte erhalten kann.

Stockholm, den 20. Januar 1878.

IV. *Tangentenbussole zum Gebrauche für Vorlesungen; von Dr. H. Buff.*

Bei der Anwendung einer Bussole mit horizontaler Nadel entsteht in Vorlesungen häufig ein grosser Uebelstand dadurch, dass die entfernter sitzenden Zuhörer die Bewegungen der Nadel nicht mehr mit hinlänglicher Deutlichkeit zu verfolgen vermögen. In manchen Fällen kann man sich dann zwar dadurch helfen, dass man die Ablenkungen der Nadel in ihrem verticalen Spiegelbilde zur Anschauung bringt. Allein dieses Verfahren eignet sich nicht zum Zwecke von Messungen kleinerer Ablenkungsbögen, die sich nicht vermeiden lassen, wenn es sich z. B. darum handelt, das Gesetz der Wirksamkeit eines Magnetstabs auf die Ferne oder die Hauptsätze des Ohm'schen Gesetzes durch experimentelle Darstellung zu begründen.

Dergleichen Anforderungen genügt nun in befriedigender Weise eine sehr einfache, leicht herzustellende Vorrichtung, deren ich mich schon seit mehreren Jahren mit Vortheil bediene; deren Beschreibung daher Lehrern der Experimentalphysik willkommen sein dürfte, um so mehr, als ich meinen Apparat, bei welchem ich auf Neuheit der Erfindung besondere Ansprüche nicht mache, bis jetzt nirgends angewendet oder beschrieben gefunden habe.

Die Grundlage desselben ist das Gauss-Weber'sche Spiegelmagnetometer, mit einigen Abänderungen jedoch, welche die Bedingung gleichzeitiger Sichtbarkeit vor vielen Personen nothwendig machten.

Nach dieser Vorbemerkung wird die umstehende Zeichnung, welche einen Querschnitt des Apparates vorstellt, genügen, um dem Leser ein deutliches Bild desselben zu verschaffen. Ein Magnetstab von hartem Stahl, von 100 mm Länge, 30 mm Breite, 10 mm Dicke, dessen magnetische Axe in der Ruhelage die Stellung *mn* behauptet, ruht in einer Art Rahmen, aus zwei Messingstreifen gebildet, die mittelst zweier Schrauben übereinandergehalten und dem dazwischenliegenden Magnetstabe, nachdem dieser die richtige Lage erhalten hat, so weit genähert werden können, dass sie denselben packen und festhalten. Den oberen Messingstreifen trägt ein cylindrischer Messingstab von 8 mm Dicke und 200 mm Höhe, um welchen der Streifen in seiner horizontalen Lage drehbar ist.

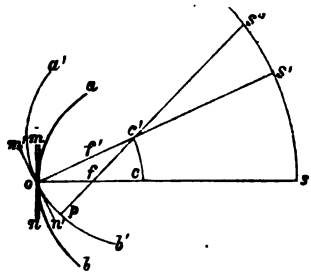
Oberhalb des Magnets sitzt an demselben Stabe, der den Rahmen trägt, ein vertical gerichteter Hohlspiegel aus übersilbertem Glase von 125 mm Durchmesser, dem ebenfalls um den Messingstab herum jede beliebige Lage gegeben werden kann.

Wenig oberhalb dieses Spiegels hängt der Messingstab an einem 0,4 mm dicken, fast 4 m langen Eisendraht. Magnet sammt Spiegel befinden sich, zum Schutze gegen Luftbewegung, in einem viereckigen Kasten von festem Holz, in dessen Deckfläche ein Einschnitt angebracht ist,

von hinlänglicher Weite, um den Draht durchzulassen. An der vorderen Seite des Kastens ist eine Scheibe von klarem Glase eingelassen, um den Strahlen einer Lichtlinie den Einfall auf den Spiegel zu gestatten.

Als Lichtquelle benutze ich eine von einem cylindrischen Blechschirm umgebene Gasflamme. Nur an einer Stelle dieser Umhüllung, in gleicher Höhe mit der Mitte des Spiegels, befindet sich ein 20 mm hoher schmaler Spalt, der so gerichtet wird, dass die Lichtstrahlen durch denselben mit möglichst grosser Intensität gegen den Spiegel einfallen.

Der Lichtspalt wird dem Brennpunkte f so nahe gerückt, dass sein Bild in möglichst grosser Entfernung, z. B. in S, auf einem Gradbogen SS' aufgefangen wird, dessen Kreismittelpunkt mit der Mitte des Spaltes, oder näherungsweise mit dem Brennpunkte f zusammenfällt.



Es sei nun c der Krümmungsmittelpunkt des sphärischen Spiegels, also $ofcs$ seine Hauptaxe. Wenn die Axe mn des Magnets einen kleinen Winkel non' beschreibt und dadurch in die Lage $m'n'$ gelangt, so muss der Spiegel in die Lage $a'ob'$ übergehen, seine Hauptaxe folglich die Lage $oc's'$ annehmen, so dass Winkel $sos' = non'$. Da die Lichtlinie ihre Stellung bei f unterdessen beibehalten hat, so ist ihr Bild, welches vorher, nach Voraussetzung, bei s stand, jetzt nach s'' vorgerückt, in der Art, dass seine Entfernung von der Lichtlinie bei f sich nicht verändert haben darf. Hieraus wird ersichtlich, warum der Brennpunkt f und nicht etwa der Punkt o den Mittelpunkt des Gradbogens bilden muss.

Unter der Voraussetzung eines sehr kleinen Winkels coc' unterscheidet sich die Linie $c'f$ kaum von cf, und können in diesem Falle beide Linien einander gleich gesetzt werden. Da nun, als Eigenschaft sphärischer Hohl-

spiegel $fc = of$, so folgt auch $fc' = of$; daher Winkel foc' $= fc'o$. Nun ist Winkel cfc' als Aussenwinkel gleich $foc' + fc'o = 2 . coc' = 2 . non'$.

Wenn demnach die Axe des Magnets einen kleinen Bogen non' beschreibt, muss das auf den Theilkreis $SS'S''$ geworfene Bild des Lichtspaltes einen Bogen von doppelter Winkelgrösse vollenden, welcher sich, wenn man immer nur den einen Rand des Lichtbildes in Rücksicht nimmt, mit ziemlich grosser Genauigkeit ablesen lässt. Das Bild besitzt übrigens hinlängliche Lichtstärke, um auch bei Tage sichtbar zu bleiben, sobald man den Theilkreis, ohne den freien Anblick desselben zu stören, in angemessener Weise beschattet.

Da die Tangenten von 1^0, von 5^0 und von 10^0 sich verhalten wie $1 : 5{,}01 : 10{,}10$, so ist ersichtlich, dass bei Ablenkungsversuchen in Vorlesungen, die über 20^0 des Theilkreises nicht hinausgehen, man schon eine sehr gute, zu Vorlesungszwecken völlig ausreichende Annäherung gewinnen kann, wenn man, anstatt die Tangenten der halben Winkel zu berechnen, sich begnügt, die direct abgelesenen Bogengrade in Rechnung zu bringen.

So oft die beschriebene Bussole benutzt werden soll und an dem geeigneten Orte aufgestellt ist, muss die gerade Linie oS (s. die Figur), welche sich vom Mittelpunkte des Magnetstabes auf dessen magnetischem Meridian rechtwinklig in der Horizontalebene erstreckt, genau bestimmt und durch einen Maasstab, ähnlich wie bei dem kleinen Weber'schen Magnetometer, unverrückbar erhalten werden. In der Zeichnung fällt diese Linie mit der Hauptaxe des Spiegels bei dessen natürlicher Ruhelage zusammen. Diese Anordnung ist aber hier nur mit Rücksicht auf Vereinfachung des Ueberblicks getroffen. Die normale Lage des Spiegels könnte ebenso gut mit der Linie $a'ob'$ zusammenfallen, oder jede beliebige andere sein, die für die Stellung des Lichtspaltes oder des Gradbogens als die angemessenste oder die bequemste erscheinen möchte.

Soll die Bussole als Galvanometer gebraucht werden,

so wird das gewählte Drahtgewinde in passender Entfernung vom Punkte *o* so aufgestellt, dass die Linie *o S* mit seiner Cylinderaxe zusammenfällt.

Um die bekannten Elementarversuche zur Demonstration der Ohm'schen Gesetze auszuführen, genügt mir ein einziger Ring von 40—50 cm Durchmesser, dessen Mittelpunkt auf 20 cm Abstand von der Mitte des Magnetstabes gerichtet wird.

Ungeachtet dass das bewegliche System dieses letzteren durch die dasselbe umgebende Hülle vor allen zufälligen äusseren Einflüssen vollkommen geschützt ist, so kommt doch die einmal in Bewegung gesetzte Nadel nur sehr langsam wieder zur Ruhe, weil eine Dämpfung fehlt, deren Anbringung, wenn auch ausführbar, doch die Kosten des Apparats bedeutend vergrössern würde. Ich pflege mir mit gutem Erfolge dadurch zu helfen, dass ich von der Mitte des kleinen Rahmens einen Draht heruntergehen lasse, der eine Messingscheibe trägt, welche in Oel oder in Glycerin eintaucht.

Durch dieses einfache Hülfsmittel werden die Schwingungen rasch gemässigt und vernichtet, ohne dass, wie ich mich überzeugt habe, die überhaupt erreichbare Genauigkeit dadurch gefährdet wird.

Giessen, am 3. Januar 1878.

V. *Ueber die Verbreitung stationärer electrischer Ströme in leitenden Flächen; von Felix Auerbach.*

Die Theorie der Verbreitung stationärer electrischer Ströme in nichtlinearen Leitern führt bekanntlich zu dem interessanten Ergebnisse, dass man jene Leiter in Gedanken ersetzen kann durch eine Schaar unendlich dünner

und unendlich benachbarter Stromlinien, welche von einander isolirt sind, zwischen den vorhandenen Electroden verlaufen, im übrigen jedoch nirgends Verzweigungspunkte aufweisen. Diese Auffassung ist zwar keineswegs selbstverständlich; allein sie beschreibt die beobachteten Erscheinungen mit einer solchen Vollkommenheit, dass keine Veranlassung vorliegt, verwickeltere Annahmen an Stelle dieser einfachsten zu setzen.

Der Behandlung specieller Probleme stellt sich jedoch in den meisten Fällen die Schwierigkeit entgegen, den Bedingungen zu genügen, welche erfüllt werden müssen, wenn die betrachteten Leiter im Endlichen gelegene Grenzen besitzen. Für unendlich dünne Platten, oder, nach Kirchhoff's Ausdrucksweise, für leitende Flächen, besteht diese Bedingung bekanntlich darin, dass die Grenzlinien Stromlinien sein müssen. Hat man das Problem für irgendeine unbegrenzte Fläche gelöst, so braucht man nur längs einer Anzahl von Stromlinien ein Stück, welches Electroden enthält, herauszuschneiden, um auch die Verbreitung eines Stromes in diesem Stücke zu kennen.

Auf Grund derartiger Betrachtungen hat zuerst Kirchhoff[1]) selbst den Fall einer kreisförmigen Ebene, später Quincke[2]) den Fall eines Quadranten der unendlichen Ebene aus dem von Kirchhoff (l. c.) behandelten Fall der unendlichen Ebene abgeleitet, neuerdings Kirchhoff[3]) in ähnlicher Weise den Fall eines Kugelflächensegmentes aus dem einer vollständigen Kugel.

2. Ich füge diesen Fällen noch einige neue hinzu.

Der Fall einer unendlichen Halbebene ergibt sich nach der von Quincke benutzten Methode der Spiegelbilder ebenfalls ohne weiteres.

Es sei die y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Grenze; rechts ($x > 0$) liege die Halbebene,

1) Pogg. Ann. LXIV. p. 497.
2) Pogg. Ann. XCVII. p. 362.
3) Berl. Monatsber. 1875. p. 487.

links ($x < 0$) ihr Spiegelbild. Der Einströmungspunkt sei der Punkt $x=0$, $y=0$, der Ausströmungspunkt der Punkt $x=d$, $y=0$. Man genügt dann allen Bedingungen, wenn man:

$$\varphi = -\frac{i}{2\pi k \varepsilon} \log \frac{r^2}{r_1 r_2}$$

setzt. Hierin bedeutet φ das electrische Potential oder die Spannung, k das Leitungsvermögen, ε die Dicke der Fläche, i die Stromstärke in dem linearen Theile der Schliessung, und r, r_1, r_2 beziehungsweise die Entfernung des Punktes, auf welchen φ sich bezieht, von dem Einströmungspunkt (welcher mit seinem Bilde zusammenfällt), dem Ausströmungspunkte und dessen Bilde. Nun ist:

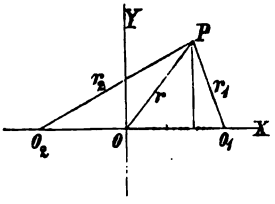


Fig. 1.

$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$r_1^2 = (x-d)^2 + y^2,$$
$$r_2^2 = (x+d)^2 + y^2.$$

Bedeutet C einen Parameter, so erhält man daher als Gleichung der Linien gleichen Potentials, oder, wie ich kurz sagen will, als Gleichung der Niveaulinien, die folgende:

$$(x^2+y^2)^2 + \frac{2C}{C-1}(y^2 - x^2) = -\frac{C}{C-1}.$$

Hier ist gleichzeitig die Längeneinheit dadurch bestimmt worden, dass $d = 1$ gesetzt wurde.

Vergleicht man diese Gleichung mit derjenigen, welche das bekannte System homofocaler Lemniscaten darstellt:

$$(x^2+y^2)^2 + 2f^2(y^2 - x^2) = e^4 - f^4,$$

worin f die halbe Focaldistanz, e^2 das constante Product der Abstände eines Curvenpunktes von beiden Brennpunkten bedeutet, so erkennt man, dass zwar jede Niveaulinie die Hälfte einer Lemniscate ist; die Focaldistanz variirt jedoch von Curve zu Curve. Für $C = \infty$, d. h. $e = 0$, ist $f = d = 1$: dies gibt die beiden isolirten Punkte, welche den Ausströmungspunkt und sein Bild darstellen. Hier ist die Spannung negativ und unendlich gross.

Nimmt C ab, so nimmt f zu; und zwar ist es proportional mit:

$$\sqrt{\frac{C}{C-1}};$$

für $C=1$ wird $e=\infty$ und $f=\infty$; diese Niveaulinie ist also eine unendlich grosse Lemniscate mit der Schleife, d. h. eine gleichseitige Hyperbel:

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{2}\,^{1}).$$

Wenn $C<1$ wird, so wird f imaginär, und zwar rein imaginär; d. h. die Brennpunkte liegen von nun an nicht mehr auf der x-Axe, sondern auf der y-Axe; von hier an wird überdies f wieder kleiner, wenn C abnimmt, und für $C=0$ wird auch $e=0$ und $f=0$; die Spannung in dem Einströmungspunkte ist also positiv und unendlich gross. Im besondern erwähne ich nur, dass in der Nähe der Electroden die Niveaulinien Kreise sind; für $y=0$ ist überall $\frac{dx}{dy}=0$; dagegen ist $\frac{d^2x}{dy^2}$ im allgemeinen von Null verschieden; es ist nämlich für $y=0$ und $\frac{dx}{dy}=0$:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\sqrt{C}-1}{x}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $C=\frac{1}{4}$ (in der That zeigt die Figur, dass ein grosser Theil dieser Niveaulinie nahezu geradlinig ist); hiernach zerfallen die Niveaulinien in drei Klassen:

1) Für $0<C<\frac{1}{4}$ wenden sie überall dem Einströmungspunkte ihre concave Seite zu.

2) Für $\frac{1}{4}<C<1$ wenden sie in der Nähe der x-Axe dem Ausströmungspunkte, in grösserer Entfernung dem Einströmungspunkte ihre concave Seite zu.

3) Für $C>1$ wenden sie überall dem Ausströmungspunkte ihre concave Seite zu. Diese Curven sind in Fig. 14 (Taf. III) dargestellt.

---

1) Man sieht hier deutlich, dass diese Curve, gleichviel in welchem Maasstabe man sie entwirft, genau genommen, keinen Doppelpunkt, sondern nur ein Maximum und ein Minimum besitzt, welche bei endlichem Maasstabe sich berühren.

Wenn man für die Curven der zweiten Klasse noch die Gleichungen für $\frac{dx}{dy}$, resp. für $\frac{d^2x}{dy^2}$ bildet, die gefundenen Werthe gleich Null setzt und mit Hülfe der Curvengleichung den Parameter C eliminirt, so erhält man die Gleichungen derjenigen Curven, auf welchen sämmtliche Wendepunkte, resp. sämmtliche Inflexionspunkte der Niveaulinien liegen; die eine gibt die Punkte an, in welchen die Electricität in der Richtung der x-Axe strömt; sie ist aus der x-Axe und einem Zweige einer gewissen Hyperbel zusammengesetzt; die zweite verbindet diejenigen Punkte der Stromlinien, in welchen die Stromdichtigkeit (längs jeder Stromlinie verfolgt) ein Minimum ist; sie besteht ebenfalls aus einem Zweige einer Hyperbel, doch will ich hierauf nicht näher eingehen.

3. Aus dem hier behandelten Falle lassen sich eine Reihe anderer nach verschiedenen Methoden ableiten. Zuerst wende ich die Methode der in kleinsten Theilen ähnlichen Abbildung an. Da nämlich die für das Potential φ geltende Differentialgleichung durch den reellen und den imaginären Theil jeder Function von $(x+yi)$ befriedigt wird, so erhält man auch aus einer Lösung $f(x, y)$ eine neue $f_1(x, y)=f(x', y')$, wenn man x' und y' so wählt, dass $(x'+y'i)$ eine Function von $(x+yi)$ wird.

Einen derartigen Fall liefert die obige Betrachtung ohne weiteres. Bildet man nämlich jene Halbebene vermöge der Gleichungen:

$$x = \sqrt{\frac{C}{1-C}} \cdot x' = x' \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2\,(y^2-x^2)+1}} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{C}{1-C}} \cdot y' = y' \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2\,(y^2-x^2)+1}} \right)$$

ab, so erhält man eine neue Halbebene. Electroden sind Punkt $x=1$, $y=0$ und der unendlich entfernte Punkt. Die Niveaulinien sind homofocale Lemniscaten. Das Potential ist:

$$\varphi = + \frac{i}{2\pi k \varepsilon} \log r_1 r_2 .$$

Denselben Werth hat es auch für den Fall, dass in eine unendliche Ebene die Electricität in zwei Punkten einströmt und in der Unendlichkeit sie wieder verlässt; nur ist dann das Zeichen umzukehren.

4. Setzt man $z=x+yi=z'^2+pz'=(x'+y'i)^2+p(x'+y'i)$, so hat man die Gleichungen:

$$x=x'^2-y'^2+px'; \quad y=2x'y'+py'.$$

Für $x=0$ erhält man:

$$x'^2-y'^2+px'=0.$$

Die Grenze des Gebietes ist also ein Zweig einer gleichseitigen Hyperbel; der Einströmungspunkt liegt im Scheitel, der Ausströmungspunkt auf der x-Axe, in der Entfernung $x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+d}$ von jenem[1]). Für $p=0$ erhält man den von Quincke untersuchten Fall eines Quadranten der unendlichen Ebene, wenn die eine der Electroden in der Ecke, die andere auf der Diagonale mündet.

5. Dass der Einströmungspunkt in dem zuerst behandelten Falle der Halbebene auf dem Rande lag, war offenbar unwesentlich; wesentlich für die Ableitung der Lösung war nur, dass die Verbindungslinie der Electroden senkrecht zum Rande gerichtet war. Um das Problem der Halbebene auch in dem Falle zu lösen, wo die eine Electrode auf dem Rande, die andere in einem beliebigen Punkte im Innern liegt, wende ich das Princip der Superposition electrischer Strömungen an. Ist nämlich φ_1 das Potential, falls gewisse Electroden vorhanden sind, φ_2, wenn gewisse andere Electroden vorhanden sind, so ist es gleich $(\varphi_1+\varphi_2)$, wenn alle jene Electroden vorhanden sind. Denn es genügt der Differentialgleichung und wird für die Electroden und nur für diese unendlich. Combinirt man z. B. die Fälle (2) und (3) derart, dass der Punkt $x=1$, $y=0$ Ausströmungspunkt für (2) und Einströmungspunkt für (3)

1) Man findet zwar bei dieser Rechnung noch andere Werthepaare; dieselben entsprechen jedoch nicht reellen, in der leitenden Fläche gelegenen Punkten.

wird, so erhält man als Potential in einer Halbebene, wenn die Electricität in einem Punkte des Randes ein- und in der Unendlichkeit ausströmt:

$$\varphi = -\frac{i}{\pi k \varepsilon} \log r.$$

In der That sind nicht nur in diesem Falle, sondern auch in dem entsprechenden für irgendeinen Sector der unendlichen Ebene die Niveaulinien Kreise, wie von vornherein einzusehen ist.

Um diese Methode auf das vorliegende Problem anzuwenden, erwähne ich, dass in einer unendlichen Ebene mit zwei beliebig gelegenen Electroden die Stromlinien nach Kirchhoff gewisse Kreise sind, zu denen auch die durch die Electroden gehende gerade Linie gehört; letztere kann daher auch Grenzlinie sein. Diesen Fall, wo beide Electroden auf dem Rande der Halbebene liegen, combinire man mit Fall (2), so dass der Ausströmungspunkt hier mit dem Einströmungspunkt in (2) zusammenfällt und i in beiden Fällen denselben Werth hat; die angedeutete Aufgabe ist dann gelöst.

6. Zwei Fälle, in welchen die Grenzen der betrachteten Leiter einander nicht decken, lassen sich freilich im allgemeinen nicht mit Strenge superponiren. Denn da die Grenze G_1 zwar von den Curven $\varphi_1 = \text{const.}$, nicht aber von den Curven $\varphi_2 = \text{const.}$ senkrecht geschnitten wird, und umgekehrt für die Grenze G_2, so wird keine der beiden Grenzen von den Curven $\varphi_1 + \varphi_2 = \text{const.}$ senkrecht geschnitten, was doch erforderlich wäre, wenn $(\varphi_1 + \varphi_2)$ die neue Lösung darstellen sollte. Ich will jedoch hier einen Fall untersuchen, in welchem trotzdem die Lösung mit grosser Annäherung befriedigt. Es soll sich um die Verbreitung des Stromes in einem unendlichen, geradlinig begrenzten Streifen von constanter Breite handeln, wenn die beiden Electroden irgendwo im Endlichen liegen.

Denkt man sich über die Halbebene (5) eine zweite gelegt, welche sich von ihrem Rande $x = +\text{ const.}$ nach der Seite der abnehmenden x erstreckt, und deren Electroden

die Coordinaten $x = d$, $y = 0$ und $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ haben, so fällt die Electrode bei $x = d$, $y = 0$ fort, sobald die Stromstärken beider Einzelfälle gleich sind; man erhält also auf diese Weise den gedachten Fall. Nun zeigt die Betrachtung des Falles (2), dass für Werthe von x, welche gegen d gross sind, φ sehr klein wird; die Curven $\varphi_1 + \varphi_2 = C$ werden daher an der Grenze $x = 0$ sehr wenig von den Curven $\varphi_1 = \text{const.}$, an der Grenze $x = +\infty$ const. sehr wenig von den Curven $\varphi_2 = \text{const.}$ abweichen; die Bedingung, dass jene Grenzen Stromlinien seien, wird daher mit einer gewissen Annäherung erfüllt sein; mit wie grosser sie es ist, will ich durch Ausführung der Rechnung in einem speciellen Falle zeigen.

7. Der Streifen sei durch die geraden Linien $x = 0$ und $x = b$ begrenzt, also seine Breite gleich b; die Electroden mögen auf den Rändern, einander gegenüber, bei $y = 0$ liegen. Man hat dann, wenn man in (2) $d = \frac{b}{2}$ setzt, die Gleichungen:

$$\varphi_1 = -\frac{i}{4\pi k\varepsilon} \log \frac{r^4}{r_1^2 r_2^2}, \qquad \varphi_2 = +\frac{i}{4\pi k\varepsilon} \log \frac{\varrho^4}{\varrho_1^2 \varrho_2^2},$$

wo die Grössen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 diejenigen sind, welche für die zweite Halbebene den Grössen r, r_1, r_2 der ersten entsprechen.

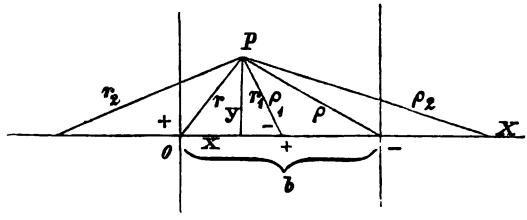


Fig. 2.

Es ist daher $r_1 = \varrho_1$ und folglich:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi = \frac{i}{4\pi k\varepsilon} \log \left(\frac{\varrho^4}{r^4} \cdot \frac{r_2^2}{\varrho_2^2} \right).$$

Die Gleichung der Niveaulinien ist daher:

$$C = \frac{\varrho^4}{r^4} \cdot \frac{r_2^2}{\varrho_2^2} = \frac{\left[\left(b - x\right)^2 + y^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 + y^2\right]}{\left[x^2 + y^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{3b}{2} - x\right)^2 + y^2\right]}.$$

Dies gibt die Gleichung sechsten Grades:

$$(x^2+y^2)^3 - 3bx(x^2+y^2)^2 + \frac{9b^2}{4}(x^2+y^2)^2$$
$$+ \frac{b^3}{1-C}x(x^2-3y^2) - \frac{3b^4}{2(1-C)}(x^2-y^2) + \frac{b^6}{4(1-C)} = 0,$$

welche, wie zu erwarten, für kleine Werthe von y und kleine oder von b wenig abweichende Werthe von x Kreise, für $x=\frac{b}{2}$ aber eine unbegrenzte, den Streifen halbirende Gerade liefert.

Differentiirt man diese Gleichung unter Voraussetzung unendlich kleiner x-Werthe nach y, so findet man für die Tangente des Winkels, unter welchem die Niveaulinien die Grenze $x=0$ schneiden (ganz analoge Betrachtungen gelten für die Grenze $x=b$) die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b(8y^2+3b^2)}{y(4y^2-b^2)}.$$

(Der Parameter C wurde mit Hülfe der Curvengleichung eliminirt.) An zwei Stellen des Randes wird also der Winkel genau einem rechten gleich; bei $y=0$, weil hier der Einfluss von φ_1 denjenigen von φ_2 unendlich überwiegt; bei $y=\frac{b}{2}$, weil hier nicht nur die Curven $\varphi_1 = \text{const.}$, sondern auch die Curven $\varphi_2 = \text{const.}$ den Rand senkrecht schneiden. Berechnet man nämlich aus dieser letzteren, oben (2) entwickelten Gleichung $\frac{dx}{dy}$ unter der Voraussetzung, dass $x=2d=b$ ist und setzt den gefundenen Ausdruck unendlich, so erhält man die Gleichung:

$$y^2 + 4d^2 = C(y^2+3d^2).$$

Andererseits ist für $x=b$:

$$y^2 = d^2 \cdot \frac{5C-4 \pm \sqrt{C(16C-15)}}{1-C};$$

man erhält also für C die Gleichung:

$$12C^3 - 39C^2 + 42C - 15 = 0,$$

und diese hat ausser den beiden unbrauchbaren Wurzeln $C=1$ noch die Wurzel $C=\frac{5}{4}$, welcher in der That der Werth $y=d$ entspricht.

An Stellen des Randes zwischen $y = 0$ und $y = \frac{b}{2}$ treffen die Niveaulinien die Grenze unter einem von 90° abweichenden Winkel. Dieser Winkel muss hier ein Minimum haben; nach der bekannten Methode erhält man dafür die Gleichung:

$$32y^8 + 108b^2y^6 + 117b^4y^4 + 38b^6y^2 - 3b^8 = 0,$$

oder einfacher: $32y^4 + 44b^2y^2 - 3b^4 = 0,$

also $y = 0{,}2551\,b$; dem entspricht ein Winkel von:

$$86^0\ 55'\ 55'';$$

die Abweichung von 90° ist also sehr unbedeutend; von der Breite des Streifens ist sie unabhängig. Jenseits der Punkte $y = \pm \frac{b}{2}$ erreicht der Winkel denselben Werth erst wieder bei $y = \pm 0{,}617\,b$. Bildet man noch den Ausdruck für die Neigung $\frac{d\xi}{d\eta}$ der Stromlinien selbst gegen den Rand und integrirt die gefundene Gleichung für kleine ξ, so findet man, wenn man die Integrationsconstante so wählt, dass für $\eta = 0$ auch $\xi = 0$ wird:

$$\xi = \frac{\eta^2}{4b} - \frac{5}{32}b \log\left(1 + \frac{8\eta^2}{3b^2}\right).$$

ξ ist also gleich Null für $\eta = 0$ und für $\eta = \pm 0{,}7705\,b$; zwischen diesen Punkten ist es negativ, und zwar am grössten bei $\eta = \frac{b}{2}$, nämlich $\xi = -0{,}028\,b$; jenseits der Punkte $\eta = \pm 0{,}7705b$ ist ξ positiv und wächst beständig; hier wird also der Streifen schmäler; dagegen wird es gestattet sein, in den meisten der Beobachtung zugänglichen Fällen seine Breite zwischen $\eta = +b$ und $\eta = -b$ als constant zu betrachten, d. h. in einer der doppelten Breite entsprechenden Länge[1]).

1) Die hier durchgeführte Bestimmung einer in ihrer exacten Form durch das Problem selbst bereits gegebenen Grenze wird manchen Leser an eine bei Gelegenheit einer akustischen Untersuchung von Helmholtz (Crelle J. LVII. p. 60) berechnete Grenze erinnern, deren Gestalt mit dieser grosse Aehnlichkeit besitzt. Dort han-

8. Diesen Fall habe ich auch experimentell untersucht. Wie Quincke an die Stelle seiner unendlichen Viertelsebene eine quadratische Platte, so musste ich bei meinen Versuchen eine rechteckige Platte an Stelle des unendlichen Streifens setzen. Diese Platte bestand aus Zinn, war kaum 1 mm dick, 25 mm hoch und 47 cm breit. Es ist also $b = 47$. Ein Coordinatensystem, welches auf der Platte eingeritzt war, hatte den doppelten Zweck der Ortsbestimmung und der Herstellung eines innigen Contactes mit den zum Galvanometer führenden Drähten. Theils der besseren Befestigung wegen, theils aus einem Grunde, welcher weiter unten von selbst ersichtlich werden wird, hatte ich die Electroden nicht bei $x = 0$ und $x = 47$, sondern eine kleine Strecke von den Rändern entfernt, bei $x = 0{,}50$ und $x = 46{,}50$ angebracht. Ihren gemeinschaftlichen Werth von y setzte ich gleich 0 und zählte beiderseits bis $\pm 12{,}5$.

In Bezug auf die Versuchsanordnung verweise ich auf Quincke's Beschreibung; man muss mit sehr exacten Apparaten arbeiten, und selbst dann noch dieselben hin und wieder gegen andere vertauschen u. s. w., wenn man zuverlässige und von fremden Einflüssen freie Mittelwerthe erhalten will; man wird das auch nicht anders erwarten, wenn man erwägt, dass es sehr schwache Zweigströme sind, welche durch das Galvanometer fliessen.

9. Die folgende Tabelle gibt die Mittelwerthe von vielen Beobachtungsreihen. Entsprechend den gezogenen Furchen bestimmte ich 22 Niveaulinien, und auf jeder, für positive und für negative y, je 6 Punkte, abgesehen von dem Ausgangspunkte, im ganzen also 13, nämlich für $y = 0$, ± 2, ± 4, ± 6, ± 8, ± 10, ± 12. Innerhalb des Gebietes, welches durch die Linien $x = 1$, $x = 46$, $y = +9$, $y = -9$ begrenzt ist, stimmt die Beobachtung genau mit der Theorie über-

---

delt es sich um die Wand, welche eine nahezu cylindrische Pfeife haben kann, wenn das Geschwindigkeitspotential und die Form der Oeffnung gegeben ist. Diese Wand ist eine kreisförmige Cylinderfläche, deren Durchmesser fast überall gleich d, im Maximum aber gleich $1{,}02\,d$ ist.

ein. Die jenseits dieser Linien stattfindenden Abweichungen erklären sich aus der Verschiedenheit des gedachten und des verwirklichten Falles. In Taf. III Fig. 15 geben die ausgezogenen Linien die Niveaulinien und Stromlinien für den gedachten, die punktirten die Abweichungen für den verwirklichten Fall. Nach der theoretischen

Tabelle der Werthe von x für Punkte der Niveaulinien.

Nr. der Curve.	$y=0$	± 2	± 4	± 6	± 8	± 10	± 12
I.	$x=2{,}50$	0,92	[imaginär; $x=0$ bei $y=2{,}42$]				
II.	4,50	4,06	2,32	[imaginär; $x=0$ bei $y=4{,}92$]			
III.	6,50	6,28	5,56	4,22	2,19	[imaginär; $x=0$ bei $y=8{,}60$]	
IV.	8,50	8,39	7,96	7,22	6,16	3,56	[imaginär; $x=0$ bei $y=10{,}55$]
V.	10,50	10,42	10,15	9,62	9,14	8,65	8,39
VI.	12,50	12,46	12,30	12,19	12,06	11,98	11,93
VII.	14,50	14,48	14,39	14,29	14,23	14,18	14,16
VIII.	16,50	16,49	16,42	16,35	16,31	16,27	16,26
IX.	18,50	18,49	18,46	18,43	18,39	18,36	18,35
X.	20,50	20,50	20,49	20,46	20,43	20,40	20,39
XI.	22,50	22,50	22,49	22,48	22,47	22,45	22,44
XII.	24,50	24,50	24,51	24,52	24,53	24,55	24,56
XIII.	26,50	26,50	26,51	26,54	26,37	26,60	26,61
XIV.	28,50	28,51	28,54	28,57	28,61	28,64	28,65
XV.	30,50	30,51	30,58	30,65	30,69	30,73	30,74
XVI.	32,50	32,52	32,61	32,71	32,77	32,82	32,84
XVII.	34,50	34,54	34,70	34,81	34,94	35,02	35,07
XVIII.	36,50	36,58	36,85	37,38	37,86	38,35	38,61
XIX.	38,50	38,61	39,04	39,78	40,84	43,44	
XX.	40,50	40,72	41,44	42,78	44,81	[wie oben]	
XXI.	42,50	42,94	44,68				
XXII.	44,50	45,08					

nahezu geradlinig.

Ableitung könnte ein Zweifel darüber entstehen, wie es sich mit der Krümmung der Niveaulinien verhält, ob es nämlich hier, wie in dem Falle der unendlichen Halbebene, Inflexionspunkte gibt.

Es könnte das nur dann der Fall sein, wenn sich herausstellte, dass zuweilen für $y=0$ $\frac{d^2x}{dy^2}$ positiv ist für $x < \frac{b}{2}$, oder negativ für $x > \frac{b}{2}$. Nun ergibt sich aber, wenn der einfacheren Rechnung halber der Punkt $x = \frac{b}{2}$, $y = 0$ zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt und $b = 1$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{y=0} = -4x \cdot \frac{(x - \sqrt{\frac{1}{2}})(x + \sqrt{\frac{1}{2}})}{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x+1)}.$$

Erwägt man, dass in dem Bereiche des Streifens x nur zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ variirt, so sieht man, dass der obige Bruch rechterhand stets negativ ist. Das Vorzeichen von $\frac{d^2x}{dy^2}$ bei $y=0$ stimmt also stets mit demjenigen von y überein; es gibt mithin nur solche Niveaulinien, welche überall dem Einströmungspunkte, und solche, welche überall dem Ausströmungspunkte die concave Seite zuwenden.

10. Anders wird dies in dem bei den Versuchen verwirklichten Fall infolge der hinzukommenden Begrenzung. Was die Stromlinien betrifft, so macht sich dieser Einfluss dahin geltend, dass zwar für jede Stromlinie die sogenannte Gesammtkrümmung dieselbe wie in dem gedachten Falle bleibt, da die Werthe von $\frac{d\xi}{d\eta}$ für $\xi = 0$ und $\xi = b$ ungeändert bleiben; diese Gesammtkrümmung drängt sich jedoch, je näher die Stromlinien dem Rande verlaufen, mehr und mehr auf zwei Stellen zusammen; und die oberhalb der Linie $y = 0$ gelegene Hälfte des Randes selbst (die ja ebenfalls eine Stromlinie ist), besitzt zwar nach wie vor die Gesammtkrümmung π, besteht jedoch aus drei geraden Linien, welche unter zwei rechten Winkeln zusammenstossen.

11. Ohne an der Gestalt der Curven etwas zu ändern, kann man den Streifen auf einer beliebigen Cylinderfläche aufwickeln. In der That änderten sich die Angaben des Galvanometers durchaus nicht, als ich die Platte derart zusammenrollte, dass aus der x-Axe ein Kreisbogen wurde. Die Niveauflächen freilich, welche auf dem electrischen Felde senkrecht stehen, sind andere geworden; waren sie vorher Cylinderflächen mit gerader Axe, so ist diese nunmehr krumm; mithin ist auch die Gleichung der Niveaulinien auf der Platte, bezogen auf den Raum, eine andere; sie ist jedoch dieselbe wie vorher, wenn man an die Stelle von x den auf der Cylinderfläche gezählten Umfang setzt, d. h. wenn man die Cylinderfläche und die Ebene auf einander abbildet.

12. Einer Erklärung dagegen bedarf die von mir constatirte Thatsache, dass, wenn man den nach und nach immer enger gewordenen Spalt der Cylinderfläche nun zulöthet, selbst dann noch, abgesehen von einem unendlich schmalen Gebiete beiderseits der Löthstelle, die Ergebnisse der Messung ungeändert die früheren sind.

Hierfür ist nur eine Erklärung denkbar. Es muss auch in dem Falle, den wir jetzt vor uns haben, die Linie $u = 0$ (wenn man den Umfang von ihr aus rechnet), aus Theilen von Stromlinien zusammengesetzt sein. Oder exacter ausgedrückt: wenn in eine Cylinderfläche Electricität in dem Punkte $u = -\varepsilon$, $y = 0$ ein- und in dem Punkte $u = +\varepsilon$, $y = 0$ aus ihr ausströmt, so muss es Stromlinien geben, von denen einzelne Theile sich der geradlinigen Gestalt mehr und mehr nähern, sobald ε unbegrenzt abnimmt. Gerade Linien sind aber auf der Cylinderfläche nur in der y-Richtung möglich; bezeichnet man daher mit ω, η die variabeln Coordinaten der Stromlinien und sucht diejenigen heraus, für welche ein beliebig angenommenes Linienelement durch die Gleichung $\frac{d\omega}{d\eta} = 0$ bestimmt ist, so muss für diese ganze Stromlinie $\frac{d\omega}{d\eta} = 0$ sein, so-

weit dieselbe im Endlichen liegt. (Die Cylinderfläche ist unbegrenzt gedacht; ist sie begrenzt, so gilt das Gesagte offenbar nur für ein Stück der gedachten Stromlinie). Geht man von den Stromlinien, da diese sich theoretisch nicht direct bestimmen lassen, auf die Niveaulinien mit den variabeln Coordinaten u, y über, so erhält man also die von der Erfahrung gestellte Forderung: für $u = \pm \varepsilon$ muss, unabhängig von dem Werthe des Parameters C, die Grösse $\frac{du}{dy}$ unendlich gross werden. Darauf hin ist die Theorie zu prüfen.

In einer Cylinderfläche verbreitet sich die Electricität, von den beiden Electroden ausgehend, offenbar genau in derselben Weise wie in einer unendlichen Ebene; nur dass je zwei Orte, welche hier um den Umfang der Cylinderfläche von einander abstehen, dort zusammenfallen. Die Spannung dort ist also die Summe unendlich vieler Spannungen hier, welche eine convergente Reihe bilden. Auf Grund dieser Betrachtungen hat zuerst Boltzmann[1]) die Rechnung ausgeführt. Für unseren Fall wird die Gleichung der Niveaulinien:

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{b} u}{e^{\frac{2\pi}{b} y} + e^{-\frac{2\pi}{b} y} - 2 \cos \frac{2\pi}{b} u} = \frac{c}{\varepsilon},$$

wo b der Umfang der Cylinderfläche und c eine im allgemeinen mit ε unendlich kleine Constante ist. Hieraus ergibt sich:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{u=\varepsilon} = C \cdot \frac{e^{\frac{2\pi}{b} y} - e^{-\frac{2\pi}{b} y}}{\varepsilon},$$

wo C eine neue, stets positive und endliche Constante bedeutet. Für endliche y ist daher in der That die Richtung der Niveaulinien bei $u = \varepsilon$ um so genauer horizontal, je kleiner ε ist. Nur in der Nähe der Electroden gilt die

1) Wien. Ber. LII. (2) p. 220.

angestellte Betrachtung nicht. Ist nämlich y von der Ordnung von $\sqrt{\varepsilon}$, so wird $\left(\frac{du}{dy}\right)_{u=\varepsilon}$ endlich; ist es von höherer Ordnung unendlich klein, so wird jener Differentialquotient sogar unendlich klein.

13. Hiernach ist der Verlauf der gedachten Stromlinie leicht zu verfolgen. Sie geht in der positiven u-Richtung vom Einströmungspunkte aus, beschreibt einen unendlich kleinen Bogen um denselben und geht allmählich in eine gerade Linie über. Ist die Cylinderfläche begrenzt, so wendet sich die Electricität an der begrenzenden Kreislinie plötzlich um und folgt dem Rande. Der Charakter der Cylinderfläche als einer zweifach zusammenhängenden Fläche tritt hier in einer Weise hervor, welche uns zwingt, das im Eingange dieser Abhandlung Gesagte einzuschränken. Es gilt hier nämlich nicht mehr der Satz, welcher bei einfach zusammenhängenden Flächen gilt, dass, wenn zwei Stromlinien an irgendeiner in endlicher Entfernung von den Electroden befindlichen Stelle einander unendlich benachbart sind, dass sie dann überall unendlich benachbart sind. Eben da, wo der Rand getroffen wird, trennen sich zwei bis dahin benachbarte Stromlinien; man kann dasselbe auch so ausdrücken: es gibt Stromlinien, welche sich verzweigen; und es ergibt sich mithin, dass das in der Einleitung Gesagte hinsichtlich dieses Punktes auf einfach zusammenhängende Flächen zu beschränken ist. Auch die Länge der Stromlinien ist hiernach bei mehrfach zusammenhängenden Flächen nicht mehr eine stetige Function ihres Parameters; in dem vorliegenden Falle findet an zwei Stellen (für positive und negative y) ein Sprung im Betrage des Umfanges b statt. Es gibt jedoch auch hier eine Grösse, welche keinen Sprung erleidet; es ist dies, wie man leicht einsieht, das Product aus der Stromlänge in den Mittelwerth der Stromdichte (an allen Punkten der betrachteten Stromlinie gemessen).

14. Auch bei endlicher, d. h. beträchtlicher Entfernung der Electroden habe ich Versuche mit der zugelötheten

Cylinderfläche angestellt; der Charakter der erhaltenen Curven ist aber ein von dem bisherigen so wenig abweichender, dass ich auf die Mittheilung der Tabellen verzichte. Diejenigen Stromlinien, welche den Rand treffen, sind nun nicht mehr geradlinig; der Sprung, welchen die Stromlänge erleidet, wird kleiner und kleiner und ist verschwunden, wenn die Entfernung der Electroden gleich dem halben Umfange geworden ist. Hier gibt es wiederum Stromlinien mit geradlinigen Theilen, wie aus der Symmetrie des Systems folgt; die Linien $u = 0$ und $u = \frac{b}{2}$ sind nämlich Stromlinien; schneidet man längs beider die Cylinderfläche auf, so kommt man wieder auf den Fall des Streifens. Diese Lösung ist genauer als die obige, weil die Ränder streng geradlinig sind; sie ist jedoch beschränkter, da hier die Electroden, einander gegenüber, auf dem Rande liegen müssen.

Schneidet man die Cylinderfläche nur längs einer der beiden geradlinigen Stromlinien auf, so erhält man den Fall eines Streifens, in welchen die Electricität in der Mitte einströmt und in zwei Punkten der Ränder wieder ausströmt; in die dort einströmende Electricitätsmenge theilen sich die letzteren zu gleichen Theilen.

Bei beliebiger Entfernung der Electroden führt das Aufschneiden längs einer geraden Linie in dem Falle zu einer neuen Lösung, wo dieselben die nämliche u-Coordinate c besitzen. In diesem Falle gibt es zwei geradlinige Stromlinien, nämlich die Linien $u = c$ und $u = c + \frac{U}{2}$, wo U den Umfang bedeutet. Man kann auf diese Weise die Bewegung der Electricität in einem unendlichen Streifen theoretisch bestimmen, erstens, wenn zwei Einströmungspunkte auf dem einen Rande, zwei Ausströmungspunkte ihnen gegenüber auf dem anderen Rande liegen, und zweitens, wenn ein Ein- und ein Ausströmungspunkt, beide auf der Mittellinie des Streifens (parallel den Rändern), vorhanden sind. Wendet man die sich ergebenden For-

meln ohne weiteres an, so hat man jedoch zu beachten, dass die durch jede Electrode ein-, resp. ausströmende Electricitätsmenge im ersten Falle nur halb so gross wie im zweiten ist.

15. Aus den hier behandelten Fällen lässt sich noch eine grosse Anzahl anderer ableiten, zumal solcher, in welchen die Begrenzung durch krumme Linien hergestellt wird. Man kann dabei sogar einigermaassen methodisch verfahren; will man z. B. die Verbreitung des Stromes in einer durch eine Parabel begrenzten Ebene kennen lernen, so liegt es nahe, in (7) $Z = X + Yi = z^2 = (x+yi)^2$ zu setzen. Als Electroden erhält man dann den Brennpunkt und den Scheitel, und man findet, dass man, ohne den Strom zu einer anderen Vertheilung zu zwingen, einen Schnitt vom Brennpunkt längs der Axe bis in die Unendlichkeit führen kann.

16. Ich schliesse mit dem Hinweis auf eine Erfahrung, welche ich bei Anstellung obiger Versuche machte; ich theile sie, ohne vorläufig erhebliches Gewicht auf sie zu legen, mit, um nichts in Bezug auf die Entstehung der obigen Tabelle zu verschweigen. Wie ich bereits erwähnte, habe ich aus vielen, unter den verschiedensten Umständen angestellten Messungen das Mittel genommen. Aber obgleich die Lage der Electroden sowohl als die Gestalt der Fläche in dem behandelten Falle in Bezug auf eine gewisse gerade Linie symmetrisch ist, und obwohl ich geglaubt hatte, dass fremde Einflüsse, insbesondere Hydroströme irgendwelcher Art, Extraströme und Thermoströme nunmehr aus dem Ergebnisse eliminirt wären, ergab sich trotzdem eine unsymmetrische Anordnung der Niveaulinien. Ich hatte einen Commutator im Stromkreise; nach Umlegung desselben erhielt ich eine neue Anordnung, nämlich das Spiegelbild der früheren. Zeichnete ich beide übereinander auf, so erhielt ich Streifen von stellenweise einigen Millimetern Breite, welche durch zwei Linien gleicher Spannung begrenzt waren, die eigentlich hätten zusammenfallen sollen. Ich habe, da diese Erscheinung jedenfalls

nicht hierher gehört, auch noch aus den Ergebnissen vor und nach Vertauschung der Electroden das Mittel genommen; dadurch wurde die obige Tabelle in Bezug auf die Linie $x = 23{,}50$ symmetrisch. Eine andere Frage ist es, ob diese Unsymmetrie in der That nur störenden Einflüssen zuzuschreiben ist, wogegen verschiedene von mir gemachte Erfahrungen sprechen. Doch darüber müssen eingehendere Versuche entscheiden.

Breslau, 5. Jan. 1878.

VI. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf das optische Drehvermögen des Quarzes und des chlorsauren Natrons; von Leonhard Sohncke.*

I. Quarz.

§. 1. Die vorliegende Arbeit könnte auf den ersten Blick überflüssig erscheinen, weil schon eine höchst sorgfältige Untersuchung von Hrn. v. Lang: „Ueber die Abhängigkeit der Circularpolarisation des Quarzes von der Temperatur" vorliegt[1]). Indessen kann der Gegenstand doch noch nicht für abgeschlossen gelten, denn der von v. Lang ermittelte Zahlenwerth des thermischen Drehungscoëfficienten (welcher angibt, um wie viel jeder Grad des Drehungswinkels zunimmt bei Temperatursteigerung um 1° C.), stimmt nicht überein mit jenem, welcher aus einigen von Fizeau mitgetheilten Beobachtungen folgt. Nämlich in seinen „Recherches sur la dilatation et la double réfraction du cristal de roche échauffé"[2]) macht Fizeau

1) Wien. Ber. LXXI. (2) p. 707—714. 1875.

2) Ann. d. chim. et phys. (4) II. p. 143—185. 1864. Auszug Pogg. Ann. CXXIII. p. 515.

folgende Angaben (p. 176): Bei 11,50° C. betrug die durch das angewandte Quarzstück bewirkte Drehung der Polarisationsebene für Natriumgelb (geliefert von einer Lampe à sel marin) 194,97°. Als das Thermometer 72,04° C. anzeigte, hatte die Drehung um 1,4° zugenommen.

Um aus diesen Beobachtungen den Werth jenes Coëfficienten abzuleiten, nehmen wir mit v. Lang an, die Zunahme der Drehung erfolge proportional der Temperaturzunahme. Bezeichnen alsdann φ^0, φ, φ' die bezüglich bei den Temperaturen 0, t, t' stattfindenden Drehungen der Polarisationsebene einer gewissen Farbe, so ist zu setzen:

$$\varphi = \varphi^0 . (1 + \alpha t),$$
$$\varphi' = \varphi^0 . (1 + \alpha t').$$

Hier bedeutet α den oben definirten Coëfficienten. Aus beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t}, \quad \text{woraus:}$$

$$\alpha = \frac{\varphi' - \varphi}{\varphi t' - \varphi' t},$$

oder, wenn $t' - t = \Delta t$ und $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$ gesetzt wird:

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\varphi . \Delta t - t . \Delta\varphi} . \tag{1}$$

Dagegen folgt durch Subtraction beider Ausgangsgleichungen:

$$\varphi' - \varphi = \varphi^0 . \alpha . (t' - t), \quad \text{woraus:}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\varphi^0 . \Delta t} . \tag{2}$$

Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) kann zur Berechnung von α benutzt werden.

Während nun v. Lang aus seinen Beobachtungen, mit Anwendung von Gl. (2), den Werth:

$$\alpha = 0{,}000\,149 \pm 0{,}000\,003$$

ableitet, erhält man durch Einsetzung der Fizeau'schen Zahlenwerthe in Gl. (1):

$$\alpha = 0.000{,}119.$$

Diese Nichtübereinstimmung veranlasste mich, eigene Beobachtungen über denselben Gegenstand anzustellen. Die dabei gewonnenen Resultate bilden den Inhalt des Folgenden; sie gewähren eine vollständige Aufklärung des Widerspruchs, und zwar in einer von vornherein nicht von mir vorhergesehenen Weise.

§. 2. Die Beobachtungen wurden nach der Broch'schen Methode, und zwar mit Sonnenlicht, angestellt. Die Einrichtung des Apparats war die schon bei einer früheren Untersuchung („Ueber die Glimmercombination von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen[1]) benutzte, die ich dort p. 19 und p. 39 beschrieben habe. Der Theilkreis des Analysatornicol's gestattete vermittelst des Nonius noch Ablesungen von ganzen Minuten; er war, von dem etwa zu oberst befindlichen Nullpunkt aus, rechts und links herum je bis 180° getheilt; es wurde an beiden Hälften beobachtet; jedoch wurden die Beobachtungen der linken Hälfte auf die rechte Seite umgerechnet, so dass sich alle im Folgenden mitgetheilten Zahlen auf die rechte Hälfte beziehen. Weil die beiden Stellungen des Analysatornicol's, bei denen ohne zwischengeschalteten Quarz die Verlöschung eintritt, (sie mögen σ_l und σ_r heissen), nicht genau um 180° verschieden sind, wie es bei einem tadellosen Apparat der Fall sein müsste, sondern wegen etwas schiefer Nicolstellung oder wegen Theilungsfehlern um 0,05° von 180° abweichen, so verfuhr ich bei der Umrechnung so: Ich trug den Winkel, um welchen die bei eingeschaltetem Quarz zur Verlöschung nöthige linksseitige Einstellung von σ_l abwich, auf der rechten Seite an σ_r an und nahm die so gefundene Zahl als die entsprechende rechtsseitige Ablesung.

Als Spectrometer diente ein Steinheil'sches. Sämmtliche Beobachtungen wurden an einem und demselben etwa würfelförmig geschliffenen linksdrehenden Quarzstück ausgeführt, dessen Dicke etwas weniger als 12,1 mm

1) Pogg. Ann. Ergbd. VIII. 1876. p. 16.

betrug. Jede der beiden gegenüberliegenden Seiten, durch die der Strahl hindurchgehen sollte, war mit schwarzem Papier beklebt, das nur in der Mitte mit einem Loch, so gross wie der Querschnitt des Strahlenbündels, versehen war. Die beiden Flächen waren nicht genau parallel, was besonders dadurch ersichtlich wurde, dass das von beiden reflectirte Sonnenlicht zwei nicht völlig zusammenfallende Bilder lieferte, auch wenn man das Strahlenbündel so gut wie möglich senkrecht auf die Vorderfläche auffallen liess. Sobald also das Strahlenbündel, infolge unvermeidlicher Unvollkommenheit des Silbermann'schen Heliostaten, eine auch noch so geringe Richtungsänderung erfuhr, ging es durch eine Quarzschicht von etwas anderer Dicke, lieferte also einen etwas anderen Drehungswinkel. (Natürlich wurde die Heliostatenstellung immer wieder sorgfältig corrigirt.) Infolge dieses Umstandes, und weil das von mir benutzte Quarzstück nur etwa $\frac{1}{3}$ so dick, als das von Hrn. v. Lang benutzte war, konnte ich nicht erwarten, dass meine Beobachtungen unmittelbar so zuverlässig wie die seinigen würden; doch suchte ich diesem Mangel dadurch abzuhelfen, dass ich eine verhältnissmässig grosse Zahl von Einzelbeobachtungen machte, und zwar eine um so grössere, je breiter und verwaschener der im Spectrum auftretende dunkle Streif war. Die Beobachtungen wurden immer erst dann begonnen, wenn das die Temperatur des Luftbades angebende Thermometer, dessen cylindrisches Gefäss sich ganz in der Nähe des Quarzwürfels und in gleicher Höhe mit ihm befand, mindestens 20 Minuten lang nahe um 100° C. geschwankt hatte. Jedesmal dicht vor Einstellung des Analysators auf Verlöschung der betreffenden Farbe wurde auch eine Thermometerablesung gemacht; aus allen diesen Ablesungen während einer Beobachtungsreihe wurde das Mittel genommen. Um die Temperatur möglichst constant zu halten, musste die Heizflamme bisweilen etwas verstellt werden. Die Temperaturschwankungen während einer Reihe betrugen indessen nicht mehr als 3° C.

Die Resultate meiner zahlreichen Messungen sind in der folgenden Tabelle 1 enthalten; und zwar gibt:

Spalte Fr. die Namen der benutzten Fraunhofer'schen Linien;

„ t die Temperaturen bei einer ersten Beobachtungsgruppe, nämlich die Zimmertemperaturen, nach 100-theiliger Scala;

„ s die Mittelwerthe der Einstellungen des Analysatornicol's zur Verdunkelung der betreffenden Linie bei der nebenstehenden Temperatur;

„ z die Zahl der Einzeleinstellungen, aus denen der unter s stehende Mittelwerth abgeleitet ist;

„ w den wahrscheinlichen Fehler dieses Mittelwerths, in Minuten.

Die mit den gestrichenen Buchstaben überschriebenen Spalten enthalten die entsprechenden, zu der höheren Temperatur t' gehörigen Grössen.

Tabelle 1.

Fr.	t	s	w	z	t'	s'	w'	z'
C	22,5°C.	51° 17′	± 3,51′	20	99,8°C.	48° 54′	± 6,31′	20
D	23,0	177° 41′	2,14	20	100,3	174° 39′	2,38	20
E	24,2	106° 23′	2,31	18	100,7	102° 46′	2,47	18
F	22,5	44° 11′	2,09	40	99,9	39° 45′	3,21	37
G	23,2	104° 8′	4,18	50	100,0	98° 2′	5,68	48

§. 3. Um vermittelst dieser Beobachtungen α nach Gleichung (1) zu berechnen, bildet man aus den Zahlen der Tabelle 1 die Grössen $t' - t = \Delta t$ und $s' - s = \varphi' - \varphi = \Delta\varphi$. Diese Werthe sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Hier enthält die letzte Spalte den wahrscheinlichen Fehler von $\Delta\varphi$ in Graden.

Endlich muss man, ausser der Zunahme des Drehungswinkels, auch noch den zu t^0 gehörigen Drehungswinkel φ selbst kennen, und zwar für alle fünf Farben. Dazu ist die Kenntniss derjenigen Stellung des Analysators nöthig, bei welcher der vom Polarisator kom-

Tabelle 2.

Fr.	t	Δt	$\Delta\varphi$	w
C	22,5° C.	77,3° C.	2,38°	± 0,12°
D	23,0	77,3	3,03	0,05
E	24,2	76,5	3,62	0,06
F	22,5	77,4	4,43	0,06
G	23,2	76,8	6,10	0,12

mende Strahl, ohne den Quarz zu durchsetzen, möglichst vollständig ausgelöscht wird. Dies tritt bei Einstellung auf 79° 52′ ein, wie sich als Mittel aus 20 einzelnen Einstellungen mit einem wahrscheinlichen Fehler von ± 0,8′ ergab. Bezeichnet nun wieder s die bei eingeschaltetem Quarz zur Verlöschung einer gewissen Farbe nöthige Einstellung, und setzt man vorübergehend $s - 79° 52′ = \varepsilon$, so ist der Drehungswinkel der betreffenden Polarisationsebene in dem angewandten linksdrehenden Quarz gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \varphi &= n.180° - \varepsilon \\ &= n.180° + 79° 52′ - s, \end{aligned} \tag{3}$$

wo n eine vorläufig unbekannte, ganze Zahl (oder 0) ist, die sich aber für jede der benutzten fünf Farben leicht angeben lässt, weil die Grösse der Drehung des Quarzes von 1 mm Dicke für die verschiedenen Farben anderweitig bekannt ist; man braucht diese Kenntniss sogar nur für eine Farbe, z. B. für die Linie *D*.

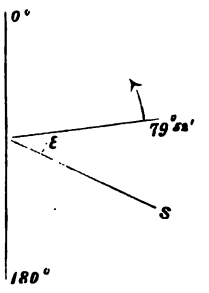


Fig. 1.

Indem nämlich bei gewöhnlicher Zimmertemperatur die Drehung für *D* in 1 mm Quarz 21,67° beträgt, so muss das vorliegende Quarzstück von etwa 12,1 mm Dicke eine Drehung von etwa 262° 12′ hervorbringen. Nun ist für *D* beobachtet (vgl. Tab. 1) $s = 177° 41′$, also muss für ein ganzzahliges n mit Näherung die Gleichung bestehen:

$$262° 12′ = n.180° + 79° 52′ - 177° 41′.$$

In der That geht die rechte Seite für $n = 2$ in 262° 11′ über. Folglich hat man in der Gleichung (3) $n = 2$ zu setzen, um den wahren Drehungswinkel φ zu erhalten.

Ebenso muss bei Anwendung von Gl. (3) auf die Farben E und F $n = 2$ gesetzt werden; für C dagegen kann n nur $= 1$ sein, weil nur so ein kleinerer Drehungswinkel als für D herauskommt; und für G ist $n = 3$ zu nehmen, damit sich — wie es ja nöthig ist, — ein grösserer Drehungswinkel als für F ergibt. Also hat man, nach Gl. (3), folgende Beziehungen:

$$\varphi_C = 1 . 180^0 + 79^0\,52' - 51^0\,17',$$
$$\varphi_D = 2 . 180^0 + 79^0\,52' - 177^0\,41',$$
$$\varphi_E = 2 . 180^0 + 79^0\,52' - 106^0\,23',$$
$$\varphi_F = 2 . 180^0 + 79^0\,52' - 44^0\,11',$$
$$\varphi_G = 3 . 180^0 + 79^0\,52' - 104^0\,8'.$$

Diese Werthe sind in der folgenden Tabelle 3 zusammengestellt:

Tabelle 3.

Fr.	t	φ	w
C	22,5° C.	208,58°	± 0,06°
D	23,0	262,18	0,04
E	24,2	333,48	0,04
F	22,5	395,68	0,04
G	23,2	515,73	0,07

Entnimmt man dieser Tabelle die Werthe von t und φ, und der Tabelle 2 diejenigen von Δt und $\Delta\varphi$, so liefert Gl. (1) für die fünf Fraunhofer'schen Linien folgende Werthe von α:

	C	D	E	F	G
α	0,000 148°	0,000 150°	0,000 142°	0,000 145°	0,000 155°

Der wahrscheinliche Fehler von α übersteigt nicht 0,000 007°, ja bei dreien dieser Farben bleibt er unter

0,000 003°. Indessen ist die Genauigkeit der Resultate wohl nicht so gross, als aus diesen Werthen der Fehler hervorzugehen scheint, indem nämlich die Theilung des Kreises nicht genauer untersucht war, und auch, bei der Bildung der wahrscheinlichen Fehler, die jedesmaligen Temperaturen als absolut genau vorausgesetzt wurden, was natürlich nicht der Fall ist. Aus den Werthen von α für die fünf Farben ergibt sich der Mittelwerth:

$$\alpha = 0{,}000\,148^{0}.$$

Indem die den einzelnen Farben zukommenden Werthe von α um höchstens 7 Einheiten der letzten Decimalstelle von dem Mittelwerthe aller abweichen, und diese Abweichungen für die aufeinanderfolgenden Farben auch keinerlei Regelmässigkeit erkennen lassen, ist man befugt, mit v. Lang zu schliessen, dass der Coëfficient α für alle Farben denselben Werth besitzt; und zwar ist der aus meinen Beobachtungen abgeleitete Werth 0,000 148 in befriedigendster Uebereinstimmung mit dem v. Lang'schen Werthe 0,000 149.

§. 4. Nachdem somit die vorzügliche Zuverlässigkeit der v. Lang'schen Beobachtungsergebnisse constatirt war, konnte ich mich doch nicht entschliessen, die Fizeau'schen Zahlenangaben ohne weiteres für fehlerhaft zu halten; daher stellte ich die Beobachtungen nun möglichst in Uebereinstimmung mit Fizeau an, d. h. ich erhitzte nur bis ungefähr 72°. Auch war die Zimmertemperatur jetzt um etwa 7° niedriger wie bei den vorigen Beobachtungen, aber freilich noch nicht so niedrig als Fizeau's Anfangstemperatur. Das Quarzstück, welches bisher eine unveränderte Stellung behalten hatte, war fortgenommen worden und wurde nun von neuem so sorgfältig als möglich eingestellt. Wegen seiner schon erwähnten unvollkommenen Planparallelität sind die jetzigen Drehungswinkel nicht direct vergleichbar mit den früheren; aber auf den aus der neuen Beobachtungsreihe abzuleitenden Werth des Coëfficienten α kann die neue Einstellung keinen merklichen Einfluss haben. Beobachtet wurde jetzt nur die Verlöschung der

D-Linie. Die Resultate sind in folgender Tabelle 4 zusammengestellt, deren Ueberschriften wie bei Tab. 1 zu verstehen sind.

Tabelle 4.

t	s	w	z
15,5° C.	178° 12,5′	± 0,06°	15
72,1	176° 22,0′	0,04	30

Hieraus folgt: $\Delta t = 56{,}6°$; $\Delta\varphi = 1{,}84°$; und der zu $t = 15{,}5°$C. gehörige Werth des Drehungswinkels $\varphi = 261{,}66°$. Einsetzung dieser vier Zahlenwerthe in Gl. (1) liefert:

$$\alpha = 0{,}000\,124.$$

Diese Zahl stimmt mit der aus Fizeau's Angaben folgenden 0,000 119 innerhalb der Fehlergrenzen überein; die Abweichung beträgt nur 5 Einheiten der letzten Stelle. Hiermit ist bewiesen, dass sowohl die Fizeau'schen, als die v. Lang'schen Angaben richtig sind, und dass ihr Widerspruch nur ein scheinbarer sein kann. Aus einer Verschiedenheit des von beiden Beobachtern benutzten Materials kann er nicht erklärt werden, denn meine beiden Arten wiederholender Versuche wurden an demselben Quarzstück angestellt; als einzige Ursache bleibt nur die Verschiedenheit der Temperaturgrenzen übrig, innerhalb deren beide beobachtet haben. Es zeigt sich, dass die Zunahme der Drehung bei Temperatursteigerung um 1° kleiner ist bei niedrigeren Temperaturen als bei höheren; mit anderen Worten: Die Annahme, „dass die Zunahme der Drehung proportional mit der Temperaturzunahme erfolge", ist unzulässig. Es gibt gar keinen, für alle Temperaturen constanten thermischen Drehungscoëfficienten α.

§. 5. Hiernach erwächst die Aufgabe, diejenige Function zu ermitteln, welche, für ein und dasselbe Quarzstück, die Abhängigkeit des Drehungswinkels von der Temperatur darstellt. Zu dem Zwecke ist vor allem die Kenntniss der Drehung für eine grössere Zahl von Temperaturen

erforderlich. Ich stellte also neue Beobachtungen über die Verlöschung der *D*-Linie bei noch vier anderen Temperaturen an, die so gewählt waren, dass, von der Zimmertemperatur angefangen, jede folgende Temperatur etwa 40° höher war als die vorhergehende. Weil das Quarzstück unverändert stehen gelassen war, wie bei den Beobachtungen des vorigen Paragraphen, so sind die dortigen Beobachtungen ohne weiteres mit den jetzigen vergleichbar und daher in Tabelle 5 mit aufgenommen; die Bedeutung der Ueberschriften ist dieselbe wie bei Tabelle 1; die letzte Spalte ($\varphi_t - \varphi_{15,5}$) enthält die Ueberschüsse der bei t^0 C. vorhandenen Drehung über die Drehung bei der Anfangstemperatur 15,5° C.

Tabelle 5.

t	s	w	z	$\varphi_t - \varphi_{15,5}$
15,5° C.	178° 12,5′	± 0,06°	15	0°
54,4	176° 54′	0,05	17	1,31
72,1	176° 22′	0,04	30	1,84
94,2	175° 24′	0,04	20	2,81
135,2	173° 30′	0,04	20	4,71
173,4	171° 37′	0,05	27	6,59

Stellt man die Ergebnisse dieser Tabelle graphisch dar, indem man die Temperaturen als Abscissen, die Zahlen der letzten Spalte ($\varphi_t - \varphi_{15,5^0}$) als Ordinaten aufträgt, so übersieht man unmittelbar, dass die Zunahme der Drehung nicht proportional der Temperaturzunahme ist, sondern schneller erfolgt (vgl. Fig. 2). Aus den unter s angegebenen Einstellungen zur Verlöschung der *D*-Linie ergeben sich, wie in §. 3, die absoluten Drehungen φ der Polarisationsebene dieser

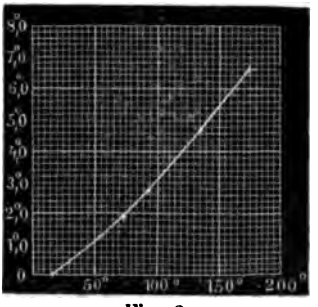


Fig. 2.

Farbe beim Durchgang durch das benutzte Quarzstück. Sie finden sich in der folgenden Tabelle 6 unter „φ beobachtet". Diese Drehungen lassen sich als Function der Temperatur t befriedigend durch eine Interpolationsformel von der Gestalt:

(4) $$\varphi = \varphi^0 + at + bt^2$$

darstellen, welche sich mit Einführung anderer Constanten α und β (so dass $\varphi^0 . \alpha = a$ und $\varphi^0 . \beta = b$ ist), auch so schreiben lässt:

(5) $$\varphi = \varphi^0 . \{1 + \alpha t + \beta . t^2\} .$$

Die drei Constanten φ^0, a, b habe ich nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt, indem ich die zu den sechs Temperaturen gehörigen Werthe von φ (vgl. folgende Tabelle 6 „φ beobachtet") in Gl. (4) einführte. Ich fand:

$$\varphi^0 = 261{,}257^0 \qquad a = 0{,}026\,11 \qquad b = 0{,}000\,083\,12,$$

folglich $\alpha = 0{,}000\,099\,9$ und $\beta = 0{,}000\,000\,318$.

Setzt man diese Werthe der Constanten in Gl. (4) oder Gl. (5) ein und berechnet φ für jede der sechs Temperaturen, so erhält man Werthe, die mit den beobachteten sehr gut übereinstimmen. Dies geht aus Tabelle 6 hervor, in welcher die beobachteten und berechneten Werthe von φ nebeneinandergestellt sind. Die Differenzen stehen unter Δ, während unter w die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Drehungen, in Graden, angegeben sind.

Tabelle 6.

t	φ beobachtet.	w	φ berechnet.	Δ
15,5° C.	261,66°	± 0,06°	261,68°	− 0,02°
54,4	262,97	0,05	262,92	+ 0,05
72,1	263,50	0,04	263,57	− 0,07
94,2	264,47	0,04	264,45	+ 0,02
135,2	266,37	0,04	266,31	+ 0,06
173,4	268,25	0,05	268,28	− 0,03

Hiermit ist bewiesen, dass sich die Drehung der Polarisationsebene im Quarz, zunächst für das Licht der *D*-Linie, durch folgende Interpolationsformel als Function der Temperatur darstellen lässt:

$$(6) \qquad \varphi = \varphi^0 . \{1 + 0{,}000\,099\,9\,t + 0{,}000\,000\,318\,t^2\} .$$

Hier bedeutet φ^0 die Drehung des gegebenen Quarzstückes bei 0° C.

§. 6. Schliesslich bleibt noch zu ermitteln, ob dieselbe Formel für die verschiedenen Farben Geltung behält, oder ob die Coëfficienten von t und t^2 etwa andere Werthe bekommen. Für das Temperaturintervall 20 bis 100° wird man unbedenklich dieselbe Gleichung (6) mit unveränderten Coëfficienten als für alle Farben geltend erklären müssen, denn sowohl Hrn. v. Lang's Beobachtungen mit Anwendung von drei Farben, als meine auf fünf Farben ausgedehnten Beobachtungen (§. 2 u. 3) lehren, dass bei Temperatursteigerung von der Zimmertemperatur bis gegen 100° C. die Einheit des anfänglichen Drehwinkels für alle Farben denselben Zuwachs erlitten hat. Dies folgt aus der Gleichheit des Coëfficienten α für alle fünf Farben (§. 3). Es könnte nur noch zweifelhaft erscheinen, ob dasselbe auch stattfindet bei noch weiterer Temperaturerhöhung. Zur Entscheidung dieser Frage wurde noch für die Farben *C* und *F* die Drehung bei etwa 100° und 170° C. ermittelt. Wegen der neuen Aufstellung des Quarzstücks (vgl. §. 4) konnten die in Tab. 1 angegebenen Einstellungen behufs Verlöschung von *C* und *F* bei 100° hier nicht benutzt, sondern sie mussten von neuem ermittelt werden. Ich fand:

Tabelle 7.

Fr.	t	s	z	t'	s'	z'
C	99.5° C.	49,28°	10	172,2° C.	46,58°	10
F	99,7	39,62	18	169,8	34,35	16

Aus diesen Zahlen bildet man $t' - t = \Delta t$, $s' - s = \Delta\varphi$, und, wie in §. 3, φ. Daneben wird für *D* aus Gl. (6) ge-

bildet $\varphi_{99,6} = 264{,}68^0$; als obere Temperatur aber nimmt man für D 173,4°, wozu der in Tab. 6 enthaltene Werth von φ gehört. So findet man:

Tabelle 8.

Fr.	$t' - t$	$s' - s$	$\varphi_{99,6}$
C	72,7° C.	2,70°	210,59°
D	73,8	3,60	264,68
F	70,1	5,27	400,25

Die Grösse $\frac{s' - s}{\varphi}$ oder $\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ stellt die Zunahme jedes Grades des Anfangsdrehungswinkels vor; dividirt man sie durch Δt, so erhält man die mittlere Zunahme jedes Grades des Anfangsdrehungswinkels (bei 99,6° C.) für jeden Temperaturgrad. Diese Grösse $\frac{\Delta\varphi}{\varphi \cdot \Delta t}$ heisse α'; man findet für sie folgende Werthe:

	C	D	F
α'	0,000 177	0,000 184	0,000 188

Diese Werthe weichen von ihrem Mittelwerthe:

0,000 183

so wenig ab, dass man berechtigt ist, α' für unabhängig von der Farbe zu halten. Also ist die relative Zunahme des Drehungswinkels der Polarisationsebene bei Temperatursteigerung für alle Farben merklich dieselbe; bewiesen bis 170° C.; und die Drehung der Polarisationsebene im Quarz lässt sich für alle Farben als Function der Temperatur darstellen durch die Formel:

$$\varphi = \varphi^0 . \{1 + 0{,}000\,099\,9 . t + 0{,}000\,000\,318 . t^2\},$$

wo φ^0 die Drehung desselben Quarzstücks bei 0° C. bedeutet.

II. Chlorsaures Natron.

§. 7. Es schien mir von besonderem Interesse, bei einem im regulären Systeme krystallisirenden, optisch activen Körper zu untersuchen, ob seine Drehungswirkung von der Temperatur abhängt. Die Doppelbrechung der nicht regulär krystallisirenden Körper ändert sich bekanntlich mit der Temperatur; z. B. erleidet bei den optisch zweiaxigen Krystallen der Winkel der optischen Axen zum Theil sehr starke Veränderungen, und bei dem einaxigen Quarz ist der Temperatureinfluss soeben gemessen. Aber diese Veränderungen sind stets von Aenderungen der Winkel der betreffenden Krystalle begleitet; und man könnte beiderlei Veränderungen für nothwendig mit einander verknüpft halten. Unter dieser Voraussetzung dürfte ein optisch activer regulärer Krystall, dessen Winkel ja bei Temperaturänderungen constant bleiben, keine Aenderung des Drehungsvermögens zeigen. Ob diese Vermuthung begründet ist oder nicht, kann bei unserer Unkenntniss von der eigentlichen mechanischen Ursache des Drehungsvermögens nur durch Versuche entschieden werden. Ich habe solche am chlorsauren Natron angestellt, von dem mir mehrere, von Würfelflächen begrenzte Krystalle von mässigen Dimensionen und leidlicher Klarheit zur Verfügung standen. Das Material war freilich nicht ganz so brauchbar, wie ich es gewünscht hätte, indessen genügte es, um wenigstens die Hauptfrage unzweideutig zu entscheiden[1]).

1) Ich benutze diese Gelegenheit, um die Resultate einiger Messungen des Drehungsvermögens des chlorsauren Natrons von 1 mm Dicke für sieben Fraunhofer'sche Linien bei 21° C. mitzutheilen. Zu denselben diente ein rechtsdrehendes, von Würfelflächen begrenztes Stück, bei welchem der Abstand eines Würfelflächenpaares 11,375 mm, der eines anderen Paares 6,630 mm betrug. Für jede Farbe wurden in jeder der beiden Richtungen 8 bis 20 verschiedene Messungen gemacht. Die aus beiderlei Beobachtungen für 1 mm Dicke abgeleiteten Drehungsbeträge wichen um weniger als 2% von einander ab. Die aus beiden gebildeten Mittelwerthe (wobei die Beobachtungen bei der grösseren Dicke mit doppeltem Gewichte eingeführt sind) sind folgende:

Bei Anwendung der in §. 2 angegebenen Methode tritt nicht ein deutlich begrenzter schwarzer Streif auf, sondern vielmehr eine sehr breite Verdunkelung mit allmählichem Uebergang ins Helle. Die einzelne Einstellung auf das Maximum der Verdunkelung ist daher sehr unsicher, und zwar um so mehr, je näher am violetten Ende des Spectrums die verlöschte Farbe liegt, weil wegen der stärkeren Dispersion dieser Farben der Streifen hier noch breiter und ausserdem die Empfindlichkeit des Auges für diese Farben auch geringer ist. Während daher Beobachtungen über die Drehung der Linie *D*, bei 3 verschiedenen Temperaturen, an einem Krystall von etwa 9,1 mm Dicke ausgeführt werden konnten, mussten zu den Beobachtungen mit der Linie *F* zwei Stücke hintereinander gestellt werden, in der Gesammtdicke von etwa 17,9 mm, um einen einigermaassen deutlichen Streifen zu geben. Vor den Beobachtungen der Linie *b* wurden die Endflächen des Präparats nochmals neu geschliffen und polirt, wodurch die Dicke auf etwa 17,1 mm sank. Die mitzutheilenden absoluten Drehungswinkel für die drei Farben sind also, als verschiedenen Dicken zugehörig, nicht unmittelbar vergleichbar. Alle benutzten Krystalle waren linksdrehend. Die Mittelwerthe zahlreicher Einzeleinstellungen sind in der folgenden Tabelle 9 enthalten, deren Ueberschriften wie bei Tab. 1 zu verstehen sind.

Die wahrscheinlichen Fehler der unter *s* aufgeführten Mittelwerthe sind sehr viel grösser als bei den Beobach-

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2,38°	2,52°	3,16°	3,96°	4,61°	5,89°	6,86°.

Um auch die Drehung in irgendeiner anderen Richtung zu untersuchen, schliff ich ein paralleles Flächenpaar so an, dass es die Lage von Pyramidenwürfelflächen hatte und gegen eine Würfelfläche unter 56° geneigt war; der Abstand dieser zwei Flächen betrug 5,855 mm. Die jetzt für die Farben *C, D, E, F, G* ermittelten Drehungsbeträge für 1 mm durchstrahlter Schicht wichen von den vorigen wieder um weniger als 2% ab. Die Gleichheit des Drehungsvermögens längs der verschiedenen Richtungen eines regulären Krystalls ist hierdurch also lediglich bestätigt.

Tabelle 9.

Fr.	t	s	z	t'	s'	z'	t''	s''	z''
D	16,2° C.	50,90°	25	100,2° C.	49,47°	25	147,6° C.	48,63°	15
b	24,4	9,60	30	100,0	5,62	30	—	—	—
F	24,5	177,65	30	102,5	174,60	15	—	—	—

tungen am Quarz; sie betragen gegen $\frac{1}{2}°$. — Vermittelst der Zahlen dieser Tabelle bildet man $\Delta t = t' - t$ (resp. $= t'' - t$); $\Delta\varphi = s' - s$ resp. $= s'' - s$); und den Drehungswinkel φ wie in §. 3; er ist bei D und $b = 79° 52' - s$, bei $F = 180° - (s - 79° 52')$. Nimmt man nun in erster Annäherung an, die Zunahmen der Drehung und der Temperatur seien einander proportional, so lässt sich der thermische Drehungscoëfficient α nach Gleichung (1) berechnen. Die so gefundenen Werthe von α stehen in der letzten Spalte der folgenden Tabelle 10.

Tabelle 10.

Fr.	t	Δt	φ	$\Delta\varphi$	α
D	16,2° C.	84,0° C.	28,97°	1,43°	0,000 59
D	16,2	131,4	28,97	2,27	0,000 60
b	24,4	75,6	70,27	3,98	0,000 76
F	24,5	78,0	82,22	3,05	0,000 48

Hier gelten die ersten zwei Zeilen für die Drehungszunahme von D bei Temperatursteigerungen von 16,2° auf 100,2°, resp. auf 147,6°. — Wenn nun auch den absoluten Werthen von α für die drei Farben wenig Gewicht zugestanden werden kann, so lehren sie doch zweifellos, dass die Drehung der Polarisationsebene im chlorsauren Natron mit steigender Temperatur zunimmt, und zwar stärker als im Quarz.

Als Mittelwerth des thermischen Drehungscoëfficienten des chlorsauren Natrons findet man aus obigen 4 Werthen:

$$\alpha = 0{,}000\,61.$$

Karlsruhe, Januar 1878.

VII. *Zur Fresnel'schen Theorie der Diffractionserscheinungen; von W. Voigt.*

Zur Erklärung der Erscheinungen der Diffraction hat Fresnel[1]) und nach ihm Schwerd[2]) u. a. einen Grundgedanken benutzt, der vielleicht folgendermaassen am praecisesten ausgesprochen werden kann.

Solange die Ausbreitung des Lichtes von einem leuchtenden Punkte aus ungehindert geschieht, zeigt die Beobachtung, dass die Art der Fortpflanzung sich von der geradlinigen nicht merklich unterscheidet. Nicht mehr hingegen, wenn ein Hinderniss (ein undurchsichtiger Schirm oder dergleichen) entgegensteht. Um, was dann geschieht, zu beurtheilen, betrachtet nach dem Huygens'schen Princip Fresnel diejenige Wellenfläche, Schwerd eine beliebige Oberfläche, die den leuchtenden Punkt umschliesst und zugleich den dunkeln Schirm enthält, als leuchtend an Stelle der eigentlichen Lichtquelle. Die Intensität und Phase an jeder Stelle derselben bestimmt sich, indem bis zu ihr hin das Gesetz der geradlinigen Fortpflanzung anwendbar ist. Auch jenseits der leuchtenden Fläche ist die Ausbreitung des Lichtes ungehindert, das genannte Gesetz also gültig; die von allen Flächenelementen nach irgendeiner Stelle gesandten Schwingungen ergeben dort eine Resultirende, die sich nach dem Princip der Interferenz bestimmt.

Die Beobachtungen, die die Lage der Intensitäts-Maxima und -Minima betrafen, haben in einer geradezu vollkommenen Weise Uebereinstimmung mit den Resultaten der hierauf basirten Theorie gezeigt. Von einer ähnlichen Prüfung der Intensitäten derselben hat vielleicht ausser der Schwierigkeit derartiger Beobachtungen auch

1) Mém. sur la diffraction. Mém. de l'Acad. de Paris V. Pogg. Ann. XXX. p. 100.

2) Die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

eine Lücke der Fresnel'schen Theorie abgehalten; es ist bisher das Gesetz unbekannt, nach welchem die Strahlung jener leuchtenden Flächen in verschiedenen Richtungen geschieht. Obgleich nämlich dessen Kenntniss, wie Fresnel gezeigt hat, zur Vergleichung der Intensitäten verschiedener Stellen desselben Diffractionsbildes nicht nöthig ist, so wird es doch einflussreich bei der Vergleichung verschiedener Bilder, wie sie z. B. durch verschiedene Stellung desselben Schirmes erhalten werden können. Die theoretische Ableitung dieses Gesetzes und, soweit sie möglich ist, seine Prüfung durch die Beobachtung bilden den einen Gegenstand dieser Abhandlung.

Indess, wenn auch weitere Beobachtungen der Lichtstärken in dieser Hinsicht ebenfalls vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie ergeben sollten, wäre damit der Beweis für die Zulässigkeit der Fresnel'schen Anschauungen noch nicht vollständig geführt.

Es führt nämlich bezüglich der Phase der fortgepflanzten Schwingungen die Fresnel'sche Theorie auf unlösbare Widersprüche. Sie ergibt, wenn man ohne Zwischenstellen eines Schirmes durch eine Lichtquelle einen beliebigen Punkt bestrahlen lässt, für dessen Bewegung eine um $\frac{\lambda}{4}$ verschiedene Phase, je nachdem man die Bestrahlung direct oder durch Vermittelung einer der obenerwähnten leuchtenden Flächen geschehen lässt. Noch mehr: da wir die Fortpflanzung der Vibrationen durch eine beliebige Anzahl einander einschliessender Oberflächen, deren jede von der nächstinneren bestrahlt wird, vermittelt denken können, und jede einzelne eine Verzögerung um $\frac{\lambda}{4}$ ergibt, so lässt die Fresnel'sche Theorie die Phase um ein beliebiges Vielfache von $\frac{\lambda}{4}$ willkürlich; und dies deutet jedenfalls auf eine Unzulässigkeit der Grundvorstellung. Auch lässt sich zeigen, worin das Fehlerhafte liegen muss, wenngleich schwieriger, was an die Stelle desselben zu setzen ist.

Der Verlust von $\frac{\lambda}{4}$ ist nämlich gänzlich unabhängig von der Gestalt und Grösse der als leuchtend betrachteten Oberfläche, sowie von dem Gesetz, nach dem man die Ausstrahlung stattfindend annimmt (— dies nachzuweisen, soll der erste Gegenstand des Folgenden sein —,) er bleibt bestehen, wenn man diese Fläche in die Oberfläche der Lichtquelle selbst fallen lässt, die man, wenngleich gewöhnlich leuchtender „Punkt" genannt, doch als einen kleinen Körper ansehen muss, dessen Oberflächenpunkte in Vibration sind, (andernfalls das Gesetz für die fortgepflanzten Intensitäten umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung in seiner unmittelbaren Nähe unmöglich wird, zudem auch nicht absehbar ist, wie durch die Vibration eines Theilchens unendlich viele mit endlicher Amplitude in Bewegung gesetzt werden können.) Demnach gibt die Fresnel'sche Vorstellung auch eine andere Phase, je nachdem man die Lichtpuelle als einzelnen Punkt oder als äusserst kleinen Körper (d. i. Punktsystem) auffasst. Der Fehler liegt also nicht in der Anwendung des Huygens'schen Principes, das auch als ganz unzweifelhaft anzusehen ist, sondern in der Methode zur Bestimmung der Resultirenden aus den einzelnen Erschütterungen, welche die Theilchen eines continuirlichen Mediums fortpflanzen. Fresnel lässt diese Theilchen ebenso vibriren und ihre Vibrationen fortpflanzen, als wären sie durch endliche Räume getrennt, in welchem Falle das Princip der Coexistenz durch die Beobachtung nachgewiesen ist. Dass aber diese Annahme unzulässig ist, ergeben folgende zwei Ueberlegungen: Eine Wellenoberfläche hat die Eigenschaft, rückwärts keine Vibrationen auszusenden; diesen Satz, den Fresnel[1]) annahm, gestattet seine Vorstellung nicht abzuleiten, es sei denn, dass man statt der Wellenfläche eine Schicht von der bestimmten Dicke $\frac{\lambda}{2}$ ausstrahlend wirken lässt, und das hat sein Bedenkliches

1) Mém. de l'Acad. de Paris. V. Pogg. Ann. XXX. p. 150.

schon wegen der Abhängigkeit von der Farbe, hebt übrigens den oben besprochenen Verlust von $\frac{\lambda}{4}$ für die vorwärts fortgepflanzten Schwingungen nicht auf, wäre also anzunehmen wenig rationell. Ferner fordert der Umstand, dass die fortgepflanzte Amplitude unabhängig davon erscheinen muss, ob die Bewegung durch leuchtende Oberflächen vermittelt wird oder nicht, die Annahme, dass die von der Wellenfläche ausgestrahlte Amplitude umgekehrt proportional der Entfernung abnimmt, und dies Gesetz gibt in der unmittelbaren Nähe unendliche Werthe. Dabei ist es nutzlos, das Gesetz für kleine Entfernungen modificiren zu wollen, denn es ist uns gestattet, unendlich viele und also unendlich nahe Oberflächen vermittelnd anzunehmen, so dass das Gesetz stets nur auf unendlich kleine Entfernungen anzuwenden wäre.

Man wird hiernach die Fresnel'sche Theorie der Diffractionserscheinungen, streng genommen, als eine geistreich errathene Regel zur Berechnung der Intensitäten ansehen müssen. Um sie auch für die Bestimmung der Phasen anwendbar zu machen, wird man die verlorene Viertelwellenlänge zufügen müssen. Als eine Ergänzung dieser Regel wird man endlich das Gesetz der Ausstrahlung der leuchtenden Flächen anzusehen haben, das nach erfolgtem Nachweis der vorstehenden Behauptung abgeleitet werden soll. Es entspricht demselben wahrscheinlich nichts Objectives, da überhaupt eine Ausstrahlung auch nur in einer ähnlichen Weise, wie Fresnel sie angenommen, wohl nicht existirt.

Die fast wunderbare Genauigkeit der Fresnel'schen Regel soll im zweiten Theil dieses Aufsatzes dargethan werden, indem ihre Uebereinstimmung mit denjenigen Formeln gezeigt wird, welche die Theorie der Elasticität für diese Erscheinungen ergibt. Diese Formeln bestätigen indess andererseits die Unhaltbarkeit der Fresnel'schen Grundvorstellung, indem sie den Verlust von $\frac{\lambda}{4}$, den wir als ungehörig nachweisen, nicht zeigen.

Wir werden unter I. für den Fall, dass, nach Fresnel, eine Wellenoberfläche (Kugel) an Stelle des leuchtenden Punktes als Lichtquelle eingeführt wird, nachweisen, dass unabhängig von dem Gesetz, nach welchem die Ausstrahlung geschieht, die Fresnel'sche Theorie stets den Verlust von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge ergibt; danach dasselbe für eine beliebig gelegene Ebene (Schwerd) durchführen, dann die Mittel angeben, das gleiche unter gewissen Voraussetzungen für eine beliebige Oberfläche zu thun, und endlich die hierbei gefundenen Formeln zur Bestimmung des obenerwähnten Ausstrahlungsgesetzes benutzen.

Unter II. folgt die Ableitung der Diffractionsformeln aus den Gleichungen der Elasticität.

I.

Die strenge Bestimmung der durch die Ausstrahlung einer beliebigen Stelle erzeugten Bewegung ist selbstverständlich nicht möglich, solange das Gesetz der Ausstrahlung unbekannt ist. Die Genauigkeit, welche wir erreichen wollen, ist von der Art, dass die Wellenlänge λ gegenüber allen vorkommenden Entfernungen als unendlich klein erster Ordnung gilt.

Für die Durchführung der Rechnung machen wir folgende Annahmen: die Lichtschwingungen sind transversal. Die Lichtquelle, die wir als leuchtenden Punkt L (Taf. IV Fig. 1) bezeichnen, habe die Eigenschaft, dass die fortgepflanzten Schwingungen Amplituden besitzen, deren Grösse mit der Ausstrahlungsrichtung in einer gewissen Weise stetig variirt.[1]) Ist die Richtung eines Strahles von der Lichtquelle L aus gegeben, durch die Winkel ψ und φ (geogr. Länge und Breite), φ gerechnet von dem directen Strahl von L nach dem beobachteten Punkt P, so sei die in die Entfernung 1 fortgepflanzte Amplitude $A.F(\varphi, \psi)$, und F mit allen seinen Differentialquotienten nach φ endlich.

Ist der Radius der Kugelwelle $= r$, so folgt an einer

1) Daraus folgt das Analoge für die Schwingungsrichtung.

durch φ und ψ bestimmten Stelle derselben die fortgepflanzte Amplitude $\frac{A.F}{r}$. In dem allgemeinsten Falle, dass das ausgestrahlte Licht elliptisch polarisirt ist, haben wir dasselbe in zwei Componenten u und v zu zerlegen, von denen die eine parallel einer gewissen, durch E gelegenen Ebene sein mag, die zweite normal dazu, und für jede die obige Betrachtung anzustellen. Es kommt dann auf der Wellenfläche noch eine zweite Componente von der Amplitude $\frac{B.F_1}{r}$ hinzu.

Die von einem beliebigen Flächenelement df der Kugelwelle nach P über die Entfernung ϱ hin fortgepflanzte Amplitude ist dann nach Fresnel proportional mit df, mit $\frac{AF}{r}$ $\left(\text{resp. } \frac{BF_1}{r}\right)$ und mit $\frac{1}{\varrho}$, ausserdem abhängig von der Neigung ν von ϱ gegen df und der Neigung μ resp. μ_1 gegen die Vibrationsrichtung, wir setzen sie:

$$\frac{AF}{r.\varrho}.df.\varkappa.f(\nu,\mu), \quad \text{resp. } \frac{BF_1}{r,\varrho}.df.\varkappa.f(\nu,\mu_1),$$

wo $\varkappa$ eine Constante und $f(\nu,\mu)$ das unbekannte Ausstrahlungsgesetz bezeichnet; dasselbe ist von Fresnel für $\nu=\frac{\pi}{2}$ Null gesetzt und sei $=1$ für $\nu=0$. Dann ist also $a.\varkappa df$ die von einem Element, dessen Theile die Amplitude a haben, in der Richtung der Normale in die Entfernung 1 fortgepflanzte Amplitude. In Bezug auf die Endlichkeit von $f(\nu,\mu)$ und aller seiner Differentialquotienten nach ν machen wir die analoge Annahme wie über F.

Die Oscillation, welche in L proportional mit $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)$, resp. mit $\sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$ stattfand, ist über den Weg $(r+\varrho)$ fortgepflanzt und demnach, soweit sie von df herrührt, in P gegeben durch:

$$\frac{A.F.f.\varkappa}{r.\varrho}\,df.\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right),$$

$$\text{resp. } \frac{B.F_1.f_1.\varkappa}{r.\varrho}\,df.\,\sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right).$$

Analoges gilt für alle Flächenelemente df, die dem Punkte P ihre äussere Seite zukehren, denn nach Fresnel's Annahme pflanzt sich rückwärts keine Bewegung fort. Indess, da alle Verrückungen transversal, also normal zu dem betreffenden ϱ sind, so liegen die in P eintreffenden nicht sämmtlich parallel.

Wir bilden die Componenten parallel der oben fest angenommenen Ebene durch E und normal dazu, durch Multiplication mit gewissen trigonometrischen Ausdrücken, die wir nur durch die Abkürzung c, s und c_1, s_1 andeuten wollen, und erhalten, indem wir die parallelen summiren:

$$\left.\begin{aligned} U = \frac{Ax}{r}\int df.\frac{F.f.c}{\varrho}.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right) \\ + \frac{Bx}{r}\int df.\frac{F_1 f_1 s_1}{\varrho}.\sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} J_1 \\ + J_2\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} V = \frac{Ax}{r}\int df.\frac{F.f.s}{r}.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right) \\ + \frac{Bx}{r}\int df.\frac{F_1 f_1 c_1}{\varrho}.\sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} J_3 \\ + J_4\end{aligned}\right.$$

Darin haben für $\varphi = 0$ s und s_1 die Werthe 0, c und c_1 die Werthe 1 und sind im übrigen stetige Functionen von φ mit allen Differentialquotienten nach dieser Grösse. Die dritte Componente W, parallel der Richtung E enthält nur statt c und s zwei Functionen, die beide für $\varphi = 0$ verschwinden.

Wir unterziehen der Berechnung nur das erste Integral J_1.

$$J_1 = \frac{Ax}{r}\int df.\frac{F.f.c}{\varrho}.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\varrho}{\lambda}\right),$$

die Summe ausgedehnt über das innerhalb des von P aus construirten Tangentenkegels liegende Stück der Kugelfläche. Da $df = r\,d\varphi.\sin\varphi\,d\psi$ ist und:

$$\varrho^2 = r^2 + E^2 - 2rE.\cos\varphi,$$

so erhält man leicht die Form:

$$J_1 = \frac{Ax}{E}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{E-r}^{\sqrt{E^2-r^2}} d\varrho \,.\, \Phi \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\varrho}{\lambda}\right),$$

wo $\Phi = F.f.c$ eine Function ist, die nebst allen ihren Differentialquotienten im ganzen Integrationsgebiet endlich ist. Theilweise Integration ergibt:

$$J_1 = \frac{A.x}{E}\int_0^{2\pi} d\psi \left\{\left[\frac{\lambda}{2\pi}\,\Phi \,.\, \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\varrho}{\lambda}\right)\right]_{E-r}^{\sqrt{E^2-r^2}}\right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{d\Phi}{d\varrho} \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\varrho}{\lambda}\right)\right]_{E-r}^{\sqrt{E^2-r^2}} + \ldots\right\}.$$

Da wir aber angenommen haben, λ sei gegen ϱ unendlich klein, und alle Differentialquotienten von Φ endlich, so ist unser Resultat bis auf die geforderte Genauigkeit dargestellt durch das erste Glied. Dieses verschwindet für die obere Grenze, denn der Annahme nach ist die parallel dem Flächenelement fortgepflanzte Amplitude $= 0$, und bleibt demnach allein:

$$J_1 = -\frac{Ax\lambda}{2\pi E}\int_0^{2\pi} d\psi \,.\, F(o)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r-E+r}{\lambda}\right),$$

denn f und c ist für $\varrho = E-r$ oder $\varphi = 0$ der Einheit gleich. Wegen der an Stelle von c stehenden Coëfficienten s und s_1 verschwindet J_2 und J_3 vollständig, demnach ist U und V allein durch J_1 und J_4 gegeben; aus gleichem Grunde ist die dritte Componente $W=0$. F ist für $\varphi=0$ auch von ψ unabhängig. Daher folgt unmittelbar:

$$U = -\frac{Ax\lambda F(o)}{E}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{E}{\lambda}\right) \text{ oder:}$$

$$= +\frac{Ax\lambda F(o)}{E}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{E+\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right).$$

Analog:

$$V = +\frac{Bx\lambda.F_1(o)}{E}\,.\,\sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{E+\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right).$$

Setzt man, wie Fresnel[1]) gethan, $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$, so ergibt sich die in P erzeugte Amplitude $\frac{A.F(o)}{E}$, resp. $\frac{B.F_1(o)}{E}$ genau wie bei der Annahme directer Einwirkung des leuchtenden Punktes L, die Phase aber um $\frac{\lambda}{4}$ verzögert.

Wir gehen sogleich zur Betrachtung der Ebene über und können uns nun auf Andeutungen beschränken. Die Lage der Ebene sei bestimmt durch den Winkel γ zwischen ihr und der Richtung von E_2 (Taf. IV Fig. 2). Ein Punkt in df oscillire nach dem Gesetz:

$$u_1 = \frac{A.F}{\varrho_1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_1}{\lambda}\right), \qquad v_1 = \frac{B.F_1}{\varrho_1} \sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{\varrho_1}{\lambda}\right).$$

Beide Componenten werden über die Entfernung ϱ_2 nach P fortgepflanzt, z. B. ergibt u_1 daselbst:

$$u = \frac{A.F.f.\varkappa}{\varrho_1\,\varrho_2}\, df. \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\lambda}\right).$$

Zur Bestimmung der Resultirenden zerlegen wir sie, wie oben, in Componenten, parallel der festen Ebene, der die u_1 parallel sind, und normal dazu, durch Multiplication mit gewissen trigonometrischen Functionen c, s, c', s' und erhalten dieselbe Form, wie oben, für die Summen der parallelen Componenten:

$$U = J_1 + J_2, \qquad V = J_3 + J_4.$$

W ergibt sich, wie früher, verschwindend klein.

Wir bestimmen wiederum den Werth nur des ersten Integrales, welches sich ergibt, wenn wir df in Polarcoordinaten vom Punkte 0 ausdrücken.

$$J_1 = A\varkappa \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r} \frac{r\,dr.F.f.c}{\varrho_1\,\varrho_2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\lambda}\right),$$

r ist der Grenzwerth, für welchen die nach P gestrahlte Intensität verschwindet; es bezeichnet die Länge des Ra-

1) Ann. d. chim. et phys. X. Den Factor $\frac{1}{E.\lambda}$, den Hr. J. Fröhlich ableitet (Wied. Ann. III. p. 377) ergibt bereits die Fresnel'sche Theorie.

diusvector von der Stelle 0 bis zur Schnittellipse der Ebene mit einer um $E_1 + E_2 = E$ als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Es werde nun $\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho$ gesetzt und die erste Summation in eine in Bezug auf ϱ verwandelt; und zwar soll bei derselben ψ constant, demnach ϱ einzig als Function von r angenommen werden. Wir setzen:

$$\frac{r\frac{dr}{d\varrho}.F.f.c}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \Phi(\varrho)$$

und integriren partiell; es findet sich:

$$J_1 = Ax.\int_0^{2\pi} d\psi \left\{\left[\frac{\lambda}{2\pi}\Phi.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right)\right]_{\varrho=E}^{\varrho=\infty} - \frac{\lambda}{2\pi}\int_E^\infty d\varrho.\frac{d\Phi}{d\varrho}.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right)\right\}.$$

Das zweite Integral wie früher zu behandeln ist misslich, weil über das Endlichbleiben aller Differentialquotienten von Φ hier schwerlich etwas zu sagen ist. Indess lässt sich auf andere Weise zeigen, dass bis auf den angegebenen Grad der Genauigkeit der Werth von J_1 im ersten Glied allein enthalten ist; dieselbe führt auch im allgemeinen Falle am bequemsten zum Ziele. Wir sondern in Φ die bekannten und unbekannten Theile:

$$\Phi = \Psi.(F.f.c),$$

wo also $\Psi = \frac{r\frac{dr}{d\varrho}}{\varrho_1\varrho_2}$ ist, und betrachten das 2. Integral für sich:

$$i = A.x.\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_E^\infty d\varrho.\left(\Psi.\frac{d(F.f.c)}{d\varrho} + F.f.c.\frac{d\Psi}{d\varrho}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Hierin seien die Theile wieder mit i_1 und i_2 bezeichnet. Es lässt sich dann schreiben:

$$i_1 = A.x.\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi.\int_0^r dr.\frac{r}{\varrho_1\varrho_2}.\frac{d(F.f.c)}{d\varrho}.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Vergleicht man dies mit J_1, so findet sich fast völ-

lige Uebereinstimmung; i_1 kann aufgefasst werden als diejenige Verrückung, die in P durch den leuchtenden Punkt L erzeugt wird, wenn derselbe eine um $\frac{T}{2}$ andere Phase hat, als oben angenommen, wenn statt des Ausstrahlungsgesetzes $A.F.f.c$ nun gilt $A.\frac{\lambda}{2\pi}\frac{d(F.f.c)}{d\varrho}$ und statt der parallelen Componenten die vollständigen Verrückungen summirt werden. Dies ist aber, da der Annahme nach $\frac{d(F.f.c)}{d\varrho}$ immer endlich ist, unendlich klein erster Ordnung gegen jenes, daher also i_1 zu vernachlässigen.

Zur Bestimmung von i_2 hat man $\frac{d\Psi}{dr}$ zu berechnen. Es lässt sich dasselbe schreiben:

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r}{\varrho_1\varrho_2\frac{d\varrho}{dr}}\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\frac{d^2\varrho}{dr^2}}{\frac{d\varrho}{dr}}\right) - \left(\frac{2}{\varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dr} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dr}\right)\right].$$

Dies ist dann in i_2 einzusetzen und wie oben die einzelnen Terme mit J_1 zu vergleichen, um nachzuweisen, dass sie von der Ordnung $\frac{\lambda}{2}$ sind. Ich zeige dies nur am ersten, der eine kleine Schwierigkeit darbietet:

$$i_2'' = \frac{A\varkappa\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r} dr . \frac{r}{\varrho_1\varrho_2\frac{d\varrho}{dr}}\left(\frac{1}{r} - \frac{\frac{d^2\varrho}{dr^2}}{\frac{d\varrho}{dr}}\right).F.f.c.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Die Vergleichung mit J_1 zeigt, dass i_2'' dieselbe Form hat, wie eine von L nach P fortgepflanzte Oscillation unter Annahme eines eigenthümlichen Ausstrahlungsgesetzes. Es ist zu bemerken, dass die Klammer für die untere Grenze des Integrales die Form $\infty - \infty$ annimmt, berechnet aber den Werth 0 gibt, dass ferner $\frac{d\varrho}{dr}$ für $r=0$ Null wird, $\frac{r}{\frac{d\varrho}{dr}}$ aber endlich ist. Wir gewinnen die übersichtlichste Form, wenn wir in J_1 einen Mittelwerth ein-

führen für $r.F.f$, welches eine für Werthe von r zwischen 0 und $\bar{r}$ zuerst von 0 an wachsende, dann wieder bis 0 abnehmende Grösse ist, und analog in i_2' verfahren mit $r.\frac{F.f.E}{\frac{d\varrho}{dt}}\left(\frac{1}{r}-\frac{\frac{d^2\varrho}{dr^2}}{\frac{d\varrho}{dr}}\right)$, von dem etwas ähnliches gilt, das also einen Mittelwerth geben muss, der von derselben Ordnung ist, wie der von $r.F.f$. Dann unterscheidet sich i_2' von J_1 nur durch den Factor $\frac{\lambda}{2\pi E}$, ist also als unendlich klein zu vernachlässigen.

Gleiches gilt von dem zweiten Gliede i_2''.

So bleibt für J_1 der Werth:

$$J_1 = A.\varkappa\int_0^{2\pi} d\psi\left[\frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{r\frac{dr}{d\varrho}.F.f.c}{\varrho_1\varrho_2}.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho}{\lambda}\right)\right]_{r=0}^{r=\bar{r}}.$$

Das von der oberen Grenze herrührende Glied verschwindet. An der unteren wird $r=0$, $c=1$, $\varrho_1=E_1$, $\varrho_2=E_2$, $F=F(o)$, $f=f(o)$ (nicht $=1$, denn das war nur für den vorigen Fall, wo die Wellenoberfläche selbst ausstrahlte, festgesetzt). $r\frac{dr}{d\varrho}$ wird $0.\infty$ und gibt berechnet:

$$r\frac{dr}{d\varrho}=\frac{1}{\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\sin^2\beta},$$

worin β den Winkel zwischen r und E_2 bezeichnet.

Da ferner $E_1+E_2=E$ ist, und $\varkappa=\frac{1}{\lambda}$ gesetzt wurde, (p. 540) endlich J_2 ebenso wie oben verschwindet, so ist der ganze Werth von U:

$$U=-\frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(o).f(o)}{E\sin^2\beta}\,d\psi.\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{E}{\lambda}\right).$$

Noch ist in Bezug auf ψ zu summiren; $F(o)$, $f(o)$ und E sind davon unabhängig, welche Lage der unendlich feine Kreissector gehabt hat, über welchen die erste Summation genommen ist; nicht so ist $\beta=\gamma$ zu setzen erlaubt, sondern ist einzuführen: $\cos\beta=\cos\gamma.\cos\psi$, also:

$$U = + \frac{A}{2\pi E} \cdot F(o) f(o) \int_o^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - \cos^2\gamma \cdot \cos^2\psi} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E + \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{A_1 F(o) \cdot f(o)}{E \sin\gamma} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E + \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right).$$

Genau ebenso folgt:

$$V = \frac{B \cdot F_1(o) \cdot f_1(o)}{E \cdot \sin\gamma} \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau}{T} - \frac{E + \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right).$$

Es zeigt sich in diesen Resultaten derselbe Verlust von $\frac{\lambda}{4}$, wie bei der vorigen Betrachtung; es ist also hier wie dort, um zu derselben Phase zu gelangen, die die directe Fortpflanzung von L nach P geben würde, der Schwingungszustand auf den als leuchtend eingeführten Flächen durch Hinzufügung von $\frac{\pi}{2}$ zu der Phase, wie sie sich daselbst durch directe Einwirkung des Punktes L ergibt, zu ändern.

Die Verallgemeinerung der Betrachtungen auf beliebige Flächen hat keine Schwierigkeiten.

Man wähle dann für die in die Gleichung für U einzusetzenden Flächenelemente df diejenigen Stücke, die aus der Oberfläche ausgeschnitten werden durch unendlich viele durch E gelegte Ebenen, deren Winkelabstand $d\psi$ sei, und unendlich viele um E construirte Kreiscylinder, deren gegenseitiger Abstand dr sei; dann ist an einer Stelle der Oberfläche, wo deren Normale den Winkel ν mit der Richtung von E macht:

$$df = \frac{r \cdot dr \cdot d\psi}{\cos\nu}.$$

Dieser Nenner ist das einzige, wodurch sich die Formel für U von der obigen unterscheidet; daraus folgt, dass dasselbe Verfahren anwendbar ist auf alle Oberflächen, für die $\cos\nu$ nirgends verschwindet und $\frac{d(\cos\nu)}{dr}$

überall endlich ist, d. h. also, die keine Flächenelemente parallel mit E, keine Ecken und keine Kanten, die die Richtung der r schneiden, besitzen.

Für solche gelten denn auch die abgeleiteten Resultate: eine Verzögerung der Phase um $\frac{\pi}{2}$, entsprechend einem Verluste von $\frac{\lambda}{4}$, und ein Werth der Amplitude:

$$\alpha = \frac{A \cdot F(o) \cdot f(o)}{E \sin \gamma},$$

wo γ den Winkel des an der Stelle 0 gelegenen Flächenelementes mit E bezeichnet. Es hängt dies damit zusammen, dass von der Wirkung jener Flächen nur die einer kleinen, unmittelbar an E liegenden Zone bleibt, die innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen als eben anzusehen ist.

Fassen wir in dem obigen Resultat die in P hervorgebrachte Amplitude α ins Auge, so zeigt sich nicht, wie bei der Einführung der Kugelfläche, derselbe Werth, den die directe Fortpflanzung vom Punkte L ergeben würde, sondern ein von der Lage der Ebene abhängiger, wenn nicht die unbekannten Functionen die Eigenschaft haben, den Nenner $\sin \gamma$ hinwegzuheben. Und sie müssen diese Eigenschaft haben, denn die in P eintreffende Intensität muss von der Gestalt und Lage der hülfsweise eingeführten Fläche unabhängig sein. Da nun F nach seiner Bedeutung gar nicht mit der Einführung der Hülfsfläche in Zusammenhang steht, so ergibt sich in einem speciellen Falle der Werth von f, d. h. des Ausstrahlungsgesetzes der leuchtend angenommenen Fläche.

Wenn nämlich das Flächenelement df erfüllt ist mit Theilchen, deren Oscillationen die Amplitude a haben, und deren Schwingungsrichtung (gleichviel, wie im übrigen gelegen,) normal zur betrachteten Fortpflanzungsrichtung steht, deren Winkel mit dem Flächenstück γ ist, so ist die in die Entfernung 1 fortgepflanzte Amplitude:

$$\alpha = a \cdot \varkappa \cdot df \cdot \sin \gamma$$

oder, $\frac{\pi}{2} - \gamma = \zeta$ gesetzt, wo ζ der Winkel zwischen der Normalen auf df und der Ausstrahlungsrichtung ist:

$$\alpha = a \,.\, \varkappa \,.\, df \,.\, \cos\zeta.$$

Sie ist demnach also ebenso gross, als wirkte statt des gegebenen Flächenstückes df dessen Projection auf die Wellenfläche $df \,.\, \cos\zeta$, denn, wie oben gezeigt, ist $a \,.\, \varkappa \,.\, (df \,.\, \cos\zeta)$ die von diesem Stück in der Richtung der Wellennormale fortgepflanzte Amplitude. Zu bemerken ist, dass dies nur für unendlich kleine Flächenstücke gültig ist; innerhalb solcher kann man, wie sie auch immer gegen die Wellenfläche geneigt sind, alle Theilchen als in gleicher Phase schwingend betrachten; denn da die Wellenlängen als sehr gross (unendlich 1. Ordnung) gegen die Abstände der Theilchen angenommen werden, so ist es stets möglich, Flächenelemente so klein zu wählen, dass sie, obgleich eine grosse Anzahl Theilchen, doch nur solche in fast völlig gleichen Schwingungszuständen enthalten.

Obiges Resultat ist sehr einleuchtend und fast zu errathen, doch aber nur durch eine durchgeführte Berechnung der Intensität beweisbar.

Nehmen wir zu demselben hinzu, dass longitudinale Schwingungen sich gar nicht oder nur in unmerklicher Stärke fortpflanzen, so haben wir die Mittel, auch im allgemeinsten Falle das Gesetz der Ausstrahlung zu bestimmen.

Wir nehmen zunächst den einfachsten Fall: die Schwingungen sind linear polarisirt, und das Flächenstück gehört einer Wellenoberfläche an. Zur leichteren Uebersicht in den complicirteren Fällen werde auf einer Kugelfläche (Centrum C) construirt (Taf. IV Fig. 3):

der Schnitt der Ebene des ausstrahlenden Elementes mit der Kugelfläche $\overline{WW}$,

der der Schwingungsrichtung u und der Normalen dazu v,

der der Wellennormale N und

der Strahlungsrichtung P, letztere bestimmt durch die drei Winkel ξ, η, ζ.

Die Schwingung $u = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ ist dann zu zerlegen in eine Componente normal zu $\overline{CP}$ (gegeben in Taf. IV Fig. 3 durch den Punkt u_1) und eine parallel; letztere wird nicht fortgepflanzt. Erstere hat den Werth:

$$u_1 = u \,.\, \sin \xi,$$

sie wird nach dem Obigen, in der Richtung P fortgepflanzt, in der Entfernung $= 1$ die Bewegung veranlassen:

$$U = u \varkappa \, df \sin \xi \,.\, \cos \zeta.$$

Die Schwingungen geschehen in der Ebene $\widehat{Pu}$, zugleich normal zu $\overline{PC}$. Hieraus folgt also in der Richtung P eine Intensität $= a^2 \varkappa^2 df^2 \sin^2 \xi \cos^2 \zeta$, denn dieselbe wird gemessen durch das Quadrat der Amplitude.

Ist zweitens das Licht elliptisch polarisirt (Taf. IV Fig. 3), so legt man die u- und v-Axe parallel den Hauptaxen der Bahnellipse durch das Flächenelement und kann dann die Schwingungen ersetzen durch die 2 Componenten:

$$u = a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad v = b \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

beide können gesondert betrachtet werden und geben daher in P die Componenten:

$$U = u \varkappa \, df \,.\, \sin \xi \,.\, \cos \zeta, \qquad V = v \varkappa \, df \,.\, \sin \eta \,.\, \cos \zeta.$$

Die Schwingungen V geschehen in der Ebene $\widehat{Pv}$ (s. Taf. IV Fig. 3) und zwar normal zur Richtung $\overline{CP}$, also im allgemeinen nicht normal zu U. Der Winkel χ zwischen beiden ist auf der Kugelfläche dargestellt durch $\angle uPv$ und gegeben durch:

$$\cos \chi = - \operatorname{ctg} \xi \,.\, \operatorname{ctg} \eta.$$

Zur Beurtheilung der Art der eintretenden Oscillation ist es gut, zwei auf einander rechtwinklige Componenten zu haben; wir legen also eine Ebene normal zu der in der Figur durch $\widehat{Pu}$ gegebenen durch $\overline{CP}$ — dargestellt durch $\widehat{Pw}$, nennen die Componente der Bewegung in dieser B, in $\widehat{Pu}$ aber A, so ist:

$A = U + V\cos\chi$, $\qquad B = V\sin\chi$, also

$A = \frac{\varkappa\, df\,.\cos\zeta}{\sin\xi}\,(u\sin^2\xi - v\cos\eta\cos\xi)$, $\qquad B = \frac{\varkappa\, df\,.\cos^2\zeta}{\sin\xi}\,.\,v.$

Hieraus folgt, dass in allen Richtungen das fortgepflanzte Licht ebenfalls elliptisch polarisirt ist, in keiner linear, es sei denn, dass die Theilchen des Flächenelementes selbst linear polarisirt schwingen; dann aber ist alles fortgepflanzte Licht auch linear polarisirt. In zwei Richtungen ist aber im allgemeineren Falle das in P ankommende Licht circular polarisirt, nämlich je nachdem $a \gtrless b$ ist, an einer Stelle der $\widehat{uN}$- oder $\widehat{vN}$-Ebene, für die $\cos\zeta$ resp. $= \frac{b}{a}$ oder $= \frac{a}{b}$ ist.

Der Ausdruck für die Intensität wird besonders einfach, wenn die ausstrahlenden Oscillationen circular polarisirt sind, also für $a = b$, dann ergibt sich:

$$J = \frac{a^2\varkappa^2}{2}\, df^2 \cos^2\zeta\,(1 + \cos^2\zeta).$$

Natürliches Licht ist als linear polarisirtes mit äusserst schnell wechselnder Polarisationsebene aufzufassen. Wir wollen auch für solches die ausgestrahlte Intensität (proportional dem Quadrat der Amplitude) bestimmen.

Es war $U = a\,.\varkappa\,.\,df\sin\xi\,.\cos\zeta\,.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)$, also wird bei fortwährend wechselndem ξ eine Intensität eintreten, die gleich einem Mittelwerth aller möglichen ist. Hierzu setzen wir für $\sin\xi$ seinen Werth (Taf. IV Fig. 3) durch Einführung des Winkels φ von u gegen eine feste Richtung $\overline{cd}$:

$$\sqrt{1 - \sin^2\zeta\cos^2\varphi}$$

und bilden also:

$$J = \frac{a^2\varkappa^2\,.\,df^2}{2\pi}\cos^2\zeta\int_0^{2\pi}(1 - \sin^2\zeta\cos^2\varphi)\,d\varphi,$$

$$= a^2\varkappa^2\,df^2\cos^2\zeta\,(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\zeta) = \frac{a^2\varkappa^2}{2}\,df^2\cos^2\zeta\,(1 + \cos^2\zeta).$$

Dies ist die von einer Wellenfläche unter dem Winkel ζ gegen die Normale gestrahlte Intensität, vorausgesetzt,

dass die Lichtquelle natürliches Licht sendet (beiläufig identisch mit dem für circularpolarisirtes Licht gefundenen Werth).

Gehört das ausstrahlende Stück keiner Wellenoberfläche an, so liegen die Oscillationen nicht in seiner Ebene. Die Bestimmung der nach verschiedenen Richtungen fortgepflanzten Schwingungen ist dann auf dieselbe Weise, wie oben, durchführbar, ergibt nur weniger einfache Formeln, die hier als von nebensächlichem Interesse fortbleiben mögen. Für die Anwendung zur Berechnung der Diffractionserscheinungen genügt in allen Fällen das zuerst gefundene Resultat, dass ein solches beliebiges Flächenelement wirkt wie seine Projection auf die dasselbe schneidende Wellenoberfläche. Denn in diesen Fällen betrachtet man die Strahlung stets in Richtungen, die nur ganz unmerklich von der Wellennormale abweichen, und für diese selbst ist der Beweis des Satzes vorstehend geführt Die Prüfung des Resultates durch die Beobachtung kann daher auch nur diesen ersten Satz betreffen. Seine Benutzung bei der Berechnung der Intensitäten der nach Fraunhofer'scher Weise erhaltenen Diffractionserscheinungen ergibt dieselben proportional mit dem Quadrat der Projection der benutzten Oeffnungen auf die Wellenebene, demnach bei Drehung des die Oeffnungen tragenden Schirmes variirend proportional mit dem Quadrat des Cosinus des Neigungswinkels. Diese starken Veränderungen habe ich durch Beobachtungen am Mittelbild der Diffractionserscheinung, wie sie ein einzelner, in Stanniol geschnittener Spalt liefert, photometrisch verfolgt. Die Uebereinstimmung mit dem ausgesprochenen Gesetz zeigte sich, wie unten an einigen Beispielen gezeigt ist, vollständig, und kann demnach, da etwas anderes in der Ableitung kaum hypothetisch sein dürfte, angesehen werden als Bestätigung der Annahme Fresnel's, dass die fortgepflanzte Amplitude der Grösse des ausstrahlenden Flächenelementes proportional ist, die Intensität also quadratisch wächst. So müsste ein Fernrohr mit Ob-

jectiv von doppelter Grösse die vierfache Lichtstärke liefern.

Zu der Beobachtung wurden zwei Methoden angewandt. Bei der ersten wurde durch einen aufgestellten dunkeln Schirm mit sehr kleiner Oeffnung ein Lichtpunkt von der hellsten Stelle des mittelsten Diffractionsbildes abgesondert und verglichen mit einem auf genau messbare Weise in seiner Intensität veränderlichen von ganz gleicher Grösse, der durch einen passend aufgestellten Spiegel unmittelbar neben dem ersteren erschien. Die künstliche Veränderung der Helligkeit wurde durch zwei hintereinander aufgestellte gegeneinander drehbare Nicol's hervorgebracht; der beobachtete Drehungswinkel des einen gegen den anderen, der nöthig war, um die zwei Lichtpunkte gleich hell erscheinen zu lassen, ergab durch seinen Cosinus die Wurzel aus der Lichtstärke, darum ist im Folgenden mit diesem beobachteten Werthe der aus der abgelesenen Stellung des Schirmes berechnete Werth zusammengestellt. Diese ersteren Beobachtungen sind ungenau, weil bei ihnen noch nicht der Kunstgriff benutzt war, den zur Vergleichung dienenden Lichtpunkt durch dieselbe Flamme zu erleuchten wie den Spalt für die Diffractionserscheinung. Sodann zeigte sich, dass bei der schiefsten Stellung des Schirmes (75° Neigung gegen die Wellenebene) seitwärts diffuses Licht auf die als Objectiv dienende Cylinderlinse fiel, das also die letzte Beobachtung zu gross erscheinen lässt. Der mittlere Fehler am Photometer betrug 1 bis 2° bei Drehungswinkeln zwischen 0 und 80°:

I.	beob.	1,02	0,93	0,89	0,79	0,61	0,54	0,47,
	ber.	1,00	0,95	0,90	0,78	0,62	0,52	0,42.
II.	beob.	1,06	0,96	0,85	0,73	0,62	0,47,	
	ber.	1,00	0,97	0,90	0,78	0,62	0,42.	
III.	beob.	1,01	0,90	0,81	0,61,			
	ber.	1,00	0,94	0,78	0,62.			

Bei der zweiten Methode wurden die Lichtmengen — die von bekannter und die von unbekannter Intensität — nach

der Neumann-Wild'schen Methode senkrecht zu einander polarisirt und gemischt auf einen Bergkrystall fallen gelassen; das Verschwinden der Farbenstreifen zeigte die Gleichheit beider Intensitäten an, war aber hier schwierig zu beobachten, weil das Mittelfeld des Diffractionsbildes in seiner Ausdehnung nicht gleiche Intensität besitzt; die Beobachtung einer recht breiten Spalte durch ein feines Gitter würde mehr zu rathen sein. Doch zeigte sich schon so eine Verminderung des mittleren Fehlers bis auf $^1/_2{}^0$ am Theilkreis des Photometers. Behufs Erzielung grösserer Genauigkeit wurde der Einfluss der Stanniolдicke auf die scheinbare Breite des Spaltes experimentell ermittelt. Ich theile nur eine Beobachtungsreihe mit, da die anderen ganz denselben Charakter haben.

beob.	1,000	0,982	0,934	0,854	0,628	0,482,
ber.	0,995	0,988	0,938	0,856	0,614	0,495.

II.

In seinen Vorlesungen über „partielle Differentialgleichungen" (Braunschweig 1869) p. 290 hat Riemann folgenden Satz bewiesen.

Genügt in einem unbegrenzten elastischen Medium zu jeder Zeit die Condensation s der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

und ist ihr Werth zur Zeit $t = 0$ gegeben für alle Stellen des unbegrenzten Raumes:

$$s_0 = f(x, y, z),$$

desgleichen der ihres Differentialquotienten nach der Zeit:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 = F(x, y, z),$$

so ist ihr Werth zu jeder beliebigen Zeit t an jeder Stelle x_1, y_1, z_1 gegeben durch die Summe der zwei Theile s'' und s', welche lauten:

$$s'' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t.F\Big((x_1 + at\cos\vartheta),\ (y_1 + at\sin\vartheta\cos\varphi),$$
$$(z_1 + at\sin\vartheta\sin\varphi)\Big).\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$s' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t.f\Big((x_1 + at\cos\vartheta),\ (y_1 + at\sin\vartheta\cos\varphi),$$
$$(z_1 + at\sin\vartheta\sin\varphi)\Big).\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Dies ergibt die Regel zur Bestimmung der Condensation zur Zeit t an einer Stelle x_1, y_1, z_1: man nehme den Mittelwerth der anfänglichen „Geschwindigkeit“ $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$ auf einer Kugel um die Stelle x_1, y_1, z_1 vom Radius at, wo a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, und füge hinzu den Differentialquotienten nach der Zeit von dem entsprechenden Mittelwerth der anfänglichen Condensation.

Es ist bemerkenswerth, dass die von dem Anfangszustand fortgepflanzten Verrückungen in der Formel nicht vorkommen. Die ausgesprochene Regel gilt für jeden beliebigen Anfangszustand, sei er eine stetige Function des Ortes oder nicht.

Sie gestattet eine überraschend einfache Anwendung zur Bestimmung der Diffractionserscheinungen. Dazu ist zunächst zu untersuchen, inwieweit die zu Grunde gelegten Differentialgleichungen mit den für den Aether geltenden übereinstimmen. Für die Verrückungscomponenten u, v, w eines Punktes x, y, z eines elastischen Mediums gelten folgende Gleichungen, wenn man die räumliche Dilatation $= \Delta$ setzt, die zwei Elasticitätsconstanten, wie gewöhnlich, mit A und B, die Dichtigkeit mit ε bezeichnet uud äussere Kräfte nicht wirken lässt:

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{A-B}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{A+B}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial x},$$

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{A-B}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{A+B}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial y},$$

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{A-B}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{A+B}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial z}.$$

Das letzte Glied ist beim Lichtäther äusserst klein und wird für gewöhnlich gleich Null, der Aether also als absolut incompressibel angenommen. Die Verschiedenheit des Vorzeichens liegt darin, dass Riemann die Dichtigkeitsänderung positiv nimmt, welche identisch mit Condensation ist, demnach $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ positiv, wenn längs der x-Axe die Theilchen je dichter und dichter beisammen liegen, und wir dann umgekehrt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ negativ nennen, denn das setzt voraus, dass die ferneren geringere Verschiebungen erlitten haben, als die näheren.

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Riemann'sche Satz benutzt werden kann zur Bestimmung der Verrückungs- und Geschwindigkeitscomponenten an beliebiger Stelle zu beliebiger Zeit, wenn nur deren anfängliche Werthe im ganzen Raume gegeben sind. Indess ist noch zu bedenken, dass, indem wir die für den Lichtäther charakteristische Annahme eines verschwindend kleinen Δ zur Vereinfachung der Differentialgleichungen benutzt haben, noch keineswegs erreicht ist, dass jedes durch diese Gleichungen sich ergebende System Verrückungen mit der erwähnten Bedingung übereinstimmt. Doch lässt sich zeigen, dass letzteres wirklich stets eintritt, wenn der Anfangszustand der Bedingung $\Delta = 0$ genügt.

Differentiiren wir nämlich die allgemeinen drei Gleichungen, resp. nach x, y und z, und summiren sie sodann, so folgt:

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = A\left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2}\right),$$

demnach für Δ dieselbe Gleichung wie oben für s; es gilt also zur Bestimmung der räumlichen Dilatation an jeder Stelle und zu jeder Zeit der Riemann'sche Satz, und folgt daraus, dass, wenn für $t = 0$ überall $\Delta = 0$ und $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$ war, Δ auch immerdar gleich Null sein muss. Mit anderen Worten: genügte der Anfangszustand der

Bedingung der Incompressibilität, so gilt dasselbe für jeden durch denselben erregten späteren, q. e. d.

Für die Ableitung der Diffractionserscheinungen setzen wir das auch in der Elasticitätstheorie unbestritten anerkannte Huygens'sche Princip voraus, nach welchem eine Anfangsverrückung und Geschwindigkeit ersetzt werden kann durch den durch ihre Fortpflanzung hervorgebrachten Zustand des Mediums zu beliebiger Zeit. So werden wir die eigentliche Lichtquelle, die vorläufig unendlich weit angenommen sei, durch die als leuchtend eingeführte Oeffnung des dunkeln Schirmes ersetzen, der die Diffractionserscheinungen veranlassen soll. Es sei der Schirm zunächst der Wellenebene parallel, also die Verrückung aller Theilchen der Oeffnung die gleiche. Die Fläche der Oeffnung nennen wir A und bestimmen ihre Wirkung auf eine beliebige Stelle P, die ihrer Lage nach gegeben sein mag durch die Länge e des Perpendikels von P auf die Ebene von A und die Lage seines Fusspunktes in derselben (Taf. IV Fig. 5).

Nach unseren Vorstellungen vom Wesen der Lichtoscillationen findet nun in der Oeffnung eine Bewegung statt, deren Verrückungscomponenten in zwei auf einander senkrechten Richtungen sind:

$$u = a \sin 2\pi \frac{t_0}{T}, \qquad v = b \sin 2\pi \frac{\tau + t_0}{T},$$

und also die Geschwindigkeiten:

$$u' = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t_0}{T}, \quad v' = \frac{2\pi b}{T} \cos 2\pi \frac{\tau + t_0}{T}.$$

Auf diese stetig veränderlichen Zustände sind aber die Riemann'schen Formeln nicht anwendbar, wir müssen sie also je die unendlich kleine Zeit dt_0 constant und dann ruckweise verändert annehmen, also etwa setzen:

$$u_0 = a \sin 2\pi \frac{n \cdot dt_0}{T}, \qquad v_0 = b \sin 2\pi \frac{\tau + n dt_0}{T},$$

$$u_0' = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{n \cdot dt_0}{T}, \qquad v_0' = \frac{2\pi b}{T} \cos 2\pi \frac{\tau + n dt_0}{T}.$$

Damit ist dann die stetige Curve, die wirklich die Veränderung von u_0 (resp. u_0') mit der Zeit wiedergibt (Taf. IV Fig. 4a), ersetzt durch die Treppenlinien (Taf. IV Fig. 4b), deren Stufen die Breite dt_0 haben. Dies dt_0 ist willkürlich; seine Annahme bestimmt aber zugleich, in welcher Dicke wir die Schicht A bewegt annehmen müssen. Damit die einzelnen Verrückungen einander ohne Pause folgen, muss nämlich sein $\Delta = m dt_0$, wenn m die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, wie sich durch die Betrachtung der Bewegung, die in P durch nur eine Anfangsverrückung in A erregt wird, leicht zeigt.

Jede der durch obige Gleichungen für u_0, v_0, u_0', v_0' gegebenen Verrückungen und Geschwindigkeiten ist als ein zur Zeit $t_0 = n dt_0$ in A vorhandener Anfangszustand mittelst der Riemann'schen Formeln zu behandeln und von den in P zur Zeit t eintretenden parallelen Verrückungen:

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2$$

die Summe zu nehmen:

$\sum_{t_0} u_1 = U_1$, $\sum_{t_0} v_1 = V_1$ u. s. f., wo dann:
$U_1 + U_2 = U$, $V_1 + V_2 = V$ die Resultanten sind; also z. B.:

$$U_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{t_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (t - t_0)\, u_0' \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (t - t_0)\, u_0 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Wir gehen zunächst zur Berechnung von U_2 über.

u_0' hat den von der Stelle auf der Fläche A unabhängigen Werth $\frac{2\pi a}{T} \cos\frac{2\pi t_0}{T}$. Wir schreiben also, indem wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes m einführen:

$$U_2 = \frac{a}{2Tm} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sum_{t_0} \cos\frac{2\pi t_0}{T} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} m\,(t - t_0) \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Ich erinnere an die Bedeutung der Integration nach ϑ und φ in den Riemann'schen Formeln: auf einer Kugel vom Radius $m(t-t_0)$ um P soll der Mittelwerth der Anfangsgeschwindigkeit genommen werden; die Integration in Bezug auf ϑ gibt, falls wir dasselbe von der Normalen e aus zählen, den Mittelwerth auf einem Meridiankreise. u_0' hat aber nur in der Schicht A einen endlichen Werth, darum ist die Integration in Bezug auf ϑ nur so weit zu nehmen, als der Meridiankreis in die Schicht A fällt. Es sei dies für $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ und für die Meridiane, welchen entspricht $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Dann hat das Integral den Werth A oder Null, je nachdem der betreffende Meridiankreis die Schicht A schneidet oder nicht; dies hängt vom Radius $\varrho = m(t-t_0)$ ab, mit welchem er beschrieben worden ist, also da t, der Moment, in welchem wir den Zustand von P untersuchen, constant ist, von t_0[1]). Der früheste Anfangszustand, der zur Zeit t noch auf P wirkt, ist derjenige, der mittelst des grössten Meridiankreises (vom Radius ϱ_2, s. Taf. IV Fig. 5), der die Schicht A noch schneidet, in Rechnung gezogen wird, der späteste, der dem kleinsten möglichen Radius ϱ_1 entspricht.

Die Summation über t_0 gibt also nur einen Betrag, soweit sie Werthe t_0 betrifft, welche innerhalb der angedeuteten Grenzen liegen. Wir können sie leicht in eine über alle Kreisradien ϱ verwandeln, da $m(t-t_0) = \varrho$ ist. $-m\,dt_0 = d\varrho$ und auch $m\,dt_0 = A$ (s. oben). Der Summation vom kleinsten bis zum grössten t_0 entspricht eine vom grössten bis zum kleinsten ϱ, oder auch die umgekehrte mit negativem Zeichen, also:

$$U_2 = \frac{a}{2Tm}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{mT}\right) d\varrho,$$

1) Für zwei Werthe ϱ, den kleinsten und grössten, kann sich auch ein nur theilweises Schneiden der Schicht A und demnach ein Integralwerth $< A$ ergeben. Diese Grenzfälle haben aber auf den Werth der ganzen Summe keinen Einfluss.

und da $mT = \lambda$ ist:

$$U_2 = \frac{a}{2\lambda}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right) d\varrho.$$

Jetzt können wir ϱ nur als Radius vector von P nach einer beliebigen Stelle von A betrachten, die innerhalb eines beliebigen, durch $\angle\, \varphi$ gegebenen Meridianschnittes von A liegt, und dadurch leicht den Uebergang zu einem Integral über alle Flächenelemente von A finden. Denn da $\varrho^2 = e^2 + r^2$ (s. Taf. IV Fig. 5) und $df = r\, dr\, d\varphi$ ist, folgt sogleich:

$$U_2 = \frac{a}{2\lambda}\int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Nicht ganz so einfach bestimmt sich U_1. Indem wir bedenken, dass u_0 auf der ganzen Fläche A denselben Werth hat, können wir schreiben:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi m}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sum_{t_0} . u_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} m\,(t - t_0) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Denn die Integration über φ und ϑ gibt nur so weit einen Werth, als u_0 von 0 verschieden ist, demnach nur innerhalb der Schicht A. Die dadurch sich ergebenden Integrationsgrenzen sind durch φ_1, φ_2 und ϑ_1, ϑ_2 angedeutet. Der Werth des Integrales:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} m\,(t - t_0) \sin\vartheta\, d\vartheta$$

ist abhängig von dem betreffenden t_0. Von dem jedem einzelnen entsprechenden Anfangszustand u_0 ist der Mittelwerth zu nehmen auf einer Kugelfläche vom Radius $\varrho = m\,(t - t_0)$. Vorstehendes Integral bezieht sich auf die Bestimmung des Bogenelementes, welches ein Meridian einer solchen Kugel, der der geographischen Länge φ auf derselben entspricht, innerhalb der Schicht A hat.

Je nach dem Werthe t_0, und demnach ϱ, kann dieser

Meridian 1) beide Grenzflächen α und β der Schicht A schneiden, 2) nur die vordere β, 3) nur die hintere α.

Im ersten Falle hat das Integral den constanten Werth Δ, sein Differentialquotient nach ist also Null.

Im zweiten Falle ist der Werth abhängig von der Zeit und im allgemeinen auch von der seitlichen Begrenzung der Schicht A.

Indess wissen wir, dass ϱ mit der Zeit t wächst, der Kreisbogen sich also mit gleichförmiger Geschwindigkeit m über die Schicht A hinschiebt, dass er nach der Zeit dt_0 um die Länge $\Delta = m\,dt_0$ fortgerückt ist, und können daraus einen mittleren Werth des Ausdrucks:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int m\,(t - t_0)\,\sin\vartheta\,d\vartheta$$

sogleich bestimmen. Da das Integral nämlich während der Zeit dt_0 von 0 bis Δ zunimmt, so setzen wir seinen Differentialquotienten $= \frac{\Delta}{dt_0} = m$.

Dieser Werth ist zu nehmen für den kleinsten Kreisradius ϱ_1, der innerhalb einer bestimmten Meridianebene die Schicht A schneidet, demnach also für einen Anfangszustand u_0, der zur Zeit $t_0 = t - \frac{\varrho_1}{V}$ stattfand und folglich den Werth hatte $u_0 = a\,.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_1}{\lambda}\right)$.

Die ganz gleiche Betrachtung stellen wir nun für die dritte Gattung Kreise an, die nur die Schicht α schneiden; beim Wachsen ihrer Radien nimmt der Werth des Integrales $\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} m\,(t - t_0)\,\sin\vartheta\,d\vartheta$ ebenso ab, wie bei der zweiten Gattung zu, und wir erhalten demnach den Werth seines Differentialquotienten $= -m$, während zugleich $u_0 = a\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_2}{\lambda}\right)$ ist.

So bleibt von der Summe nur das erste und letzte Glied, und es wird:

$$U_1 = \frac{a}{4\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \left(\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_1}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho_2}{\lambda}\right)\right).$$

Darin bedeutet, wie gesagt, ϱ_1 und ϱ_2 den kleinsten und den grössten Radius vector, der innerhalb eines bestimmten Meridianes von P aus nach der Schicht A gezogen werden kann, U_1 ist also durch ein Randintegral um die Fläche A gegeben. Ist ϱ ein beliebiger zwischen beiden liegender Radius vector, so lässt sich schreiben:

$$U_1 = \frac{a}{2\lambda}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} d\varrho \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right),$$

und dies ist genau gleich dem oben abgeleiteten U_2, also wie jenes auf die Form eines Flächenintegrales zu bringen. Demnach folgt die vollständige eintretende Verrückung:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2, \\ &= \frac{a}{\lambda}\int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Dabei war die parallele Verrückungscomponente in der Fläche A gegeben durch:

$$u_0 = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Zugleich würde sich aus der angenommenen zweiten Componente:

$$v_0 = b \sin 2\pi \frac{t+\tau}{T}$$

ergeben:

$$V = \frac{b}{\lambda}\int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . \cos 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Hiermit vergleichen wir die Fresnel'schen Formeln:

$$U = ax\int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . f(\nu,\mu) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right),$$

$$V = bx\int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . f(\nu,\mu) \sin 2\pi\left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Es fällt zunächst auf, dass von einer Verschiedenheit der ausgestrahlten Intensität in verschiedenen Richtungen, wie sie nach den Entwickelungen des ersten Theiles in die Fresnel'schen Formeln einzuführen ist, die unserigen nichts zeigen. Darauf werde ich später näher eingehen, und mache jetzt nur darauf aufmerksam, dass das ganze Phänomen der Diffraction entweder bei sehr kleinen Oeffnungen erscheint und dann nur so nahe der Wellennormale, dass $f(\nu, \mu) = 1$ gesetzt werden kann, oder aber bei einseitig durch einen Schirm begrenzten Wellenflächen, wo bei Ausführung der Integration nur Terme bleiben, die sich auf die dem Rand unmittelbar anliegenden Stellen beziehen, sodass auch hier kein Einfluss des Ausstrahlungsgesetzes $f(\nu, \mu)$ merklich werden kann. Hiernach ist dieser Unterschied keine Ursache zum Misstrauen gegen eine der beiden Formeln.

Hingegen zeigt sich eine überraschende Bestätigung der Fresnel'schen Annahme $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$, so wie vollständige Uebereinstimmung in den Intensitäten, — nur die Phase zeigt nach Fresnel jene Verzögerung um $\frac{\pi}{2}$, der uns schon oben Beweis gegen die Haltbarkeit der Fresnel'schen Grundvorstellung war.

Die den vorstehenden analogen Untersuchungen für Kugelwellen anzustellen statt für ebene, hat wenig Interesse, weil nur in ganz speciellen Fällen die Oeffnungen, mittelst deren man Diffractionserscheinungen hervorbringt, eine solche Gestalt haben, dass man für sie ein Stück einer Kugelwelle einführen kann.

Betrachtet man hingegen eine beliebige ebene Oeffnung als durch eine im Endlichen befindliche Lichtquelle L in Bewegung gesetzt, so ist, obgleich die Theilchen dann in verschiedener Phase schwingen, das obige Verfahren völlig anwendbar, solange man nur die Annahme macht, dass die Oeffnung klein genug sei, und die Lichtstrahlen von L aus so nahe parallel der Normalen

auffallen, dass man den Cosinus des Neigungswinkels $= 1$ setzen kann. Denn dann ist in der ganzen Dicke der Schicht A der Anfangszustand als constant anzunehmen, so wie die Amplitude auf der ganzen Fläche A, wenngleich die Phase von Stelle zu Stelle wechselt. So gelangt man zu denselben Ausdrücken für U und V, wie oben, nur ist auf jedem Flächenelement die Phase eine andere; nämlich wenn $u_0 = a \sin 2\pi \frac{t_1}{T}$, resp. $v_0 = b \sin 2\pi \frac{t_1 + \tau}{T}$ das Schwingungsgesetz der Lichtquelle L, und ihre Entfernung von df gleich ϱ_1 ist, folgt:

$$U = \frac{a}{\lambda . \varrho_1} \int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . \cos 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{\varrho_1 + \varrho}{\lambda} \right),$$

$$V = \frac{b}{\lambda . \varrho_1} \int_{(A)} df . \frac{1}{\varrho} . \cos 2\pi \left(\frac{t_1 + \tau}{T} - \frac{\varrho_1 + \varrho}{\lambda} \right).$$

Da die Amplitude auf der ganzen Fläche A constant ist haben wir $\frac{1}{\varrho_1}$ vor das Integral genommen; es bedeutet dort die Entfernung der Lichtquelle L von einem beliebigen Flächenelement von A.

Diese Formeln enthalten auch die sogenannten Fraunhofer'schen Diffractionserscheinungen. Aus dem oben angeführten Grunde sind sie ebenso wie auf sehr kleine Oeffnungen auch anwendbar auf sehr grosse, nach einer oder mehreren Richtungen hin nahezu unbegrenzte.

Endlich ist noch die Modification zu untersuchen, die sich ergibt, wenn man die Ebene des Schirmes mit der Oeffnung A gegen die Verbindungslinie der Lichtquelle L und des betrachteten Punktes P, nämlich $\overline{LP}$, neigt, etwa um den Winkel γ, wie dies im ersten Theil auch mit den Fresnel'schen Formeln vorgenommen worden ist. Wir machen wiederum die Annahme, dass die Richtungen ϱ von P nach allen Flächenelementen von A so nahe parallel mit $\overline{LP}$ sind, (A also so klein gegen ϱ,) dass die Cosinusse ihrer Neigung $= 1$ gesetzt werden können. (Umgekehrt

führt sich die Betrachtung für ausserordentlich grosse Oeffnungen auch leicht durch.)

Dann sind die obigen Berechnungen völlig unverändert anwendbar, nur ist jetzt die parallel der Wellennormale gemessene Dicke der Schicht A nicht mehr Δ, sondern $\frac{\Delta}{\sin\gamma}$, und daher auch nicht mehr $m dt_0 = \Delta$, sondern $m dt_0 = \frac{\Delta}{\sin\gamma}$. Hierdurch erhält sowohl U_1 als U_2 und demnach U selbst (ebenso V) den Factor $\sin\gamma$. Z. B. also:

$$U = \frac{a \sin\gamma}{\lambda} \int_{(A)} df \cdot \frac{1}{\varrho} \cos 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{\varrho + \varrho_1}{\lambda} \right).$$

Die aus der Fresnel'schen Vorstellung abgeleiteten Formeln unterscheiden sich, abgesehen vom Unterschiede der Phase, hiervon nur dadurch, dass vor dem Integral nicht $\sin\gamma$, dafür aber unter demselben $f(\nu, \mu)$ steht. Da für Oeffnungen von der angenommenen Kleinheit $f(\nu, \mu)$ als constant vor das Integral zu ziehen ist, so bestimmt uns die Elasticitätstheorie seinen Werth in dem vorliegenden speciellen Falle $= \sin\gamma$, genau wie dies oben (p. 545) auf andere Weise geschehen ist. Sie bestätigt dadurch auch die aus demselben gezogenen Folgerungen. (Die Anwendung der Formel auf unendlich grosses A ergibt dasselbe.)

Wir wollen nun die von der Oeffnung rückwärts entsandte Bewegung ins Auge fassen. Nach den zu Grunde gelegten Vorstellungen ist gar kein Zweifel, dass wir nach beiden Seiten von A hin ganz die gleichen Werthe der Intensität für entsprechende Punkte erhalten müssen; die bewegte Schicht A verhält sich nach beiden Seiten vollständig identisch. Dies ist auch gar nicht zu verwundern, denn was bisher über sie angenommen wurde, ist nur, dass sie wie eine leuchtende vibrirt (es sind also bis jetzt den Fresnel'schen Vorstellungen sehr ähnliche über die Bewegung der Fläche A benutzt worden); was aber die Bedingung ist, damit die rückwärts gesandten Bewegungen sich vernichten, ist bisher noch gar nicht be-

nutzt worden und ist, wie die Elasticitätstheorie zeigt und hier sich noch einmal ergeben wird, für die vorwärts fortgepflanzte Bewegung ohne Einfluss: dass die Bewegung in der Schicht A ihrerseits von einer Lichtquelle dorthin fortgepflanzt ist. Dies ist offenbar in der obigen Annahme, welche allen Theilchen der Schicht die gleiche Verrückung und Geschwindigkeit ertheilt, nicht ausgesprochen.

Wir wollen die Abänderungen der vorigen Betrachtungen, die sie auch für die rückwärts fortgepflanzte Bewegung anwendbar machen sollen, nur für den ersten behandelten Fall durchführen, dass die Oeffnung A parallel einer Wellenebene ist.

Die in derselben vorhandene Bewegung soll eine fortgepflanzte sein; wir denken sie uns dadurch hervorgebracht, dass eine Sinuscurve mit gleichförmiger Geschwindigkeit m in der Strahlenrichtung durch die Schicht A sich fortbewegt, und die innerhalb A liegenden Curvenelemente die jeweilige Lage der ursprünglich in der Abscissenaxe liegenden Theilchen darstellen.

Damit dann die Oscillationen der Theilchen gerade nach dem gewünschten Gesetz:

$$u_0 = a \sin 2\pi \frac{t_0}{T}$$

stattfinden, muss die Curve die Gestalt haben:

$$\eta = a \,.\, \sin 2\pi \frac{\xi_0 - \xi}{\lambda} \,.$$

Ist dann $\xi_0 = mt$, so wird in der That die Bewegung die gewünschte sein.

Indess können wir die Riemann'schen Formeln nur auf einzelne Zeitmomente anwenden und wählen sie im Abstande:

$$dt_0 = \frac{\Delta}{m},$$

damit die Wirkungen aufeinanderfolgender ohne Pausen sich in P ablösen. Während dieser Zeit ist die Sinuscurve (Taf. IV Fig. 6) gerade um die Länge Δ vorge-

rückt, also das dem vorher in A befindlichen direct folgende Bogenelement innerhalb A gelangt. Dadurch haben wir aber eine Reihe fest bestimmter, in gleichen Zeiten dt_0 aufeinanderfolgender Anfangszustände erhalten, die wir mittelst der Riemann'schen Formeln in Berechnung ziehen können. Indessen haben diese einzelnen noch keine Eigenschaft, die sie als fortgepflanzte charakterisirte, im Gegentheil wird für unendlich kleines Δ die Verrückung in der ganzen Schicht constant wie zuvor.

Damit jeder einzelne dieser Zustände der Schicht A als ein fortgepflanzter gelten könne, muss er die ergriffenen Theilchen, nachdem er über sie weggeschritten ist, in die ursprüngliche Lage zurückführen, und das zwingt uns, die Treppenlinie, in die sich für unendlich kleines Δ die Sinuscurve verwandelt, durch die in Taf. IV Fig. 6 angedeuteten Linienpaare in eine Reihe einzelner Curvenstücke zu zerschneiden. Innerhalb eines äusserst kleinen Raumes δ (selbst unendlich klein gegen Δ) möge jedes einzelne Stück von 0 aus seine grösste Abscisse erreichen.

Diese Curven in der angedeuteten Weise bewegt, liefert uns eine Reihe Anfangszustände in A, die die charakteristische Eigenschaft der fortgepflanzten Wellen zeigen, dass nämlich die Theile der Schicht successive von der Bewegung ergriffen werden, und repräsentirt uns doch im Grenzfall ($\Delta = 0$) die stetige Bewegung, von der wir ausgingen[1]):

$$u_0 = a \sin 2\pi \frac{t_0}{T}.$$

Die Berechnung der nur von u_0 selbst abhängenden Grösse U_1 geschieht ganz in derselben Weise wie oben; denn dass in der unendlich dünnen Oberflächenschicht von A die Theilchen nicht die volle Elongation $u_0 = a \sin 2\pi \frac{n dt_0}{T}$ haben, wirkt auf die Summe über alle nicht ein. Hingegen ist U_2 auf wesentlich andere Weise zu finden. Die

1) Diese Anschauungsweise ist nicht die einzige, zum Ziele führende, doch aber vielleicht die einleuchtendste.

entwickelte Vorstellung ergibt nämlich einen ganz bestimmten Werth der Geschwindigkeit in der Schicht A.

Da die Curve (Taf. IV Fig. 6) mit der Geschwindigkeit m sich durch A hinschiebt, wird jedes Theilchen gehoben mit einer Geschwindigkeit u_0', welche ist $= -m\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$. Dies hat aber in der ganzen Dicke Δ den Werth 0, nur in den beiden Oberflächenschichten von der Dicke Δ einen anderen, und zwar in α:

$$(u_0')_\alpha = -\frac{ma}{\delta}\sin 2\pi\frac{\xi}{\lambda},$$

und in β:

$$(u_0')_\beta = +\frac{ma}{\delta}\sin 2\pi\frac{\xi}{\lambda},$$

denn wir können innerhalb derselben unsere Curve als geradlinig ansehen[1]). Dies ist in die Formel für U_2 einzusetzen, dabei auch zugleich $(\xi_0 - \xi)$ mit mt_0 und λ mit mT zu vertauschen, also in:

$$U_2 = \frac{1}{4\pi}\sum_{t_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(t-t_0)\,u_0'\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Die Integration über ϑ und φ gibt nur in so weit einen Werth, als u_0' nicht $= 0$ ist, demnach nur auf den Bogenelementen, die in die zwei Grenzschichten α und β fallen (Taf. IV Fig. 5). Demnach haben wir:

$$= \frac{1}{4\pi m}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sum_{t_0}\left\{(u_0')_\alpha\int_\alpha m(t-t_0)\sin\vartheta\,d\vartheta + (u_0')_\beta\int_\beta m(t-t_0)\sin\vartheta\,d\vartheta\right\}.$$

$m(t-t_0)$ ist der Radius ϱ, mit dem um den Punkt P Meridiankreise gezogen sind, um auf ihnen den Mittelwerth des Anfangszustandes u_0', der zur Zeit t_0 stattfand, zu berechnen.

Je nach der Zeit t_0 werden diese Kreise beide Oberflächenschichten α und β von A schneiden, oder nur α,

1) Im Grenzfall $\Delta = 0$ wird u_0' in den Schichten α und β unendlich; aber noch vorher schwindet die Dicke δ zu 0, so dass nur ein Theilchen diese unendliche Geschwindigkeit, und zwar in seiner Eigenschaft als Grenztheilchen zugleich in entgegengesetzten Richtungen bekommt, also ruht.

oder nur β. Das Integral $\int_{\alpha} m(t-t_0)\sin\vartheta d\vartheta$ gibt in jedem Fall δ, zugleich ist aber $(u_0')_\alpha = -(u_0')_\beta$, und darum geben alle jene Kreise der ersten Gattung keinen Antheil zum Werth der Summe. Es bleibt also nur ein Kreis, der die Schicht α, einer, der die Schicht β schneidet. (Dass dies in demselben Meridian nicht mehrere sein können, erhellt daraus, dass der Abstand der beiden Schichten α und β $= \Delta$ ist, ebenso der aufeinanderfolgender Kreise, und wir die beiden Schichten α und β gleich ausgedehnt annehmen müssen.) Sie entsprechen dem grössten und dem kleinsten der Kreise, die überhaupt in dem bestimmten Meridian die Schicht schneiden, — welcher von beiden aber nur α, welcher nur β schneidet, hängt davon ab, auf welcher Seite sich der Punkt P befindet. Es sei $P^{(1)}$ ein rückwärts gelegener Punkt, so gilt für ihn (wenn ϱ_2 der grösste, ϱ_1 der kleinste mögliche Radius ist):

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi m}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \,.\, m\,a\left(\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho_2}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho_1}{\lambda}\right)\right).$$

Hingegen für den vorwärts gelegenen Punkt P:

$$U_2 = \frac{1}{4\pi m}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \,.\, m.a\left(\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho_1}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho_2}{\lambda}\right)\right).$$

Also $U_2^{(1)} = -U_2$.

Dieser letztere Werth U_2 ist aber identisch mit der auf Seite 559 ohne Annahme über die Lage von P abgeleiteten Formel für U_1; es gibt also die neue Betrachtungsweise in allen vorwärts gelegenen Punkten die obigen, mit den Fresnel'schen verglichenen Werthe, in allen rückwärts gelegenen aber verschwindende Intensitäten, in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, im Widerspruch mit Fresnel.

Nur was die Vergleichung mit der früher getroffenen Bestimmung über das Gesetz der Ausstrahlung eines Flächenelementes nach verschiedenen Richtungen betrifft, geben

unsere Elasticitätsformeln andere und, wie es scheint, widersprechende Resultate. Die Betrachtung der Wellenebene gab Uebereinstimmung mit Fresnel unter der Annahme $f = 1$, die einer beliebigen unter der Annahme $f = \sin\gamma$.

Noch schärfer tritt die Sonderbarkeit hervor, wenn wir nur ein Element der Wellenfläche ausstrahlen lassen, das sogar sehr klein gegen λ ist; es gibt dies:

$$U = \frac{a \cdot df}{\lambda \cdot \varrho} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right),$$

also nach allen Richtungen vorwärts in der gleichen Entfernung die gleiche Intensität, und zwar, da nur die zwei Componenten U und V fortgepflanzt werden, überall Schwingungen parallel der Wellenebene.

Aufklärung erhalten wir, wenn wir untersuchen, inwieweit dies fortgepflanzte System Bewegungen vereinbar mit der Annahme der Incompressibilität des Aethers ist. Es zeigt sich dann, dass dies nur stattfindet in unmittelbarer Nähe der Normale auf dem Element, ja, wenn das Princip als ganz streng gelten soll, nur in der Normale selbst. Da wir aber gar keine Veranlassung haben, den Lichtäther als absolut incompressibel zu betrachten, vielmehr die Analogie mit anderen Körpern darauf hinweist und vorstehende Untersuchung zu fordern scheint, dass dies nur nahezu erfüllt ist, so werden wir glauben, dass obige Betrachtungen wirklich in der Nähe der Wellennormale durch die leuchtenden Flächenstücke die Vorgänge darstellen. (Beiläufig dürfte auch für seitwärts gelegene Punkte die Bestimmung des Verhältnisses $\frac{dt_0}{\Delta}$ unmöglich werden.)

Dass die Resultate der Rechnung nicht im ganzen Raume der Bedingung der Incompressibilität genügen, ist sehr erklärlich, weil der angenommene Anfangszustand damit selbst nicht stimmt, solange ein begrenztes Stück der Wellenfläche als allein vorhanden betrachtet wird. Indess ist trotzdem die angestellte Betrachtung nicht nutz-

los; zwar wird der Zustand der Theilchen einer durch eine einfallende Welle in Schwingungen gesetzten Oeffnung nicht vollständig mit dem angenommenen übereinstimmen, indessen ist es höchst wahrscheinlich, dass er sich nur in unmittelbarer Nähe der Ränder des festen Schirmes merklich von dem supponirten unterscheidet; das wird auch durch die glänzende Uebereinstimmung der Fresnel'schen Formeln mit der Beobachtung bestätigt, die ja, wie die unseren, ohne ausserordentliche Betrachtung der Randtheilchen abgeleitet sind.

Eine theoretische Untersuchung von deren Bewegung liegt noch gänzlich ausser unserem Vermögen; sie würde unzweifelhaft die Natur der Ränder in Betracht ziehen müssen und damit Umstände, die bisher auf die eintretenden Erscheinungen nicht den geringsten Einfluss gezeigt haben. Und da endlich die Beobachtung die Diffractionserscheinungen nur in einem eben so engen Bereiche zeigt, als unsere Theorie sie unanfechtbar ergibt, so werden wir uns vorläufig mit dieser Ableitung ihrer Gesetze aus den elastischen Differentialgleichungen genügen lassen können.

Königsberg i/Pr., Februar 1878.

VIII. *Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes; von Dr. J. Fröhlich in Budapest.*

1.

Die Theorie der Diffraction bestimmt die Abhängigkeit der Intensität des gebeugten Lichtes vom Beugungswinkel und, in einzelnen Fällen[1]), diese Intensität selbst im Verhältnisse zu derjenigen des einfallenden Lichtes.

1) Wied. Ann. III. p. 376.

Nur die erste dieser theoretischen Folgerungen wurde bisher experimentell untersucht und von einer ganzen Reihe von Beobachtern vollständig und strenge verificirt. Die Intensität ist noch nicht messend untersucht worden, obwohl der Werth der Amplitude ebenso wichtig ist, wie ihr Zusammenhang mit dem Beugungswinkel.

Die vorliegende Arbeit sollte dieses Ziel anstreben, doch beschränkte ich mich vorläufig auf Diffractionserscheinungen mit kleinem Beugungswinkel.

Die Beobachtungen geschahen nach folgender Methode. Im Brennpunkte einer als Collimator dienenden achromatischen Linse LL von 107 mm Oeffnung und 702 mm Brennweite befand sich ein verticaler, 1 mm hoher Spalt S, mit veränderlicher Breite, durch welchen eine in einer Duboscq'schen Lampe stetig brennende Natriumflamme homogenes Licht sandte. Der untere Theil des aus der Linse LL austretenden parallelen Strahlenbündels ging durch ein Diaphragma DD und ein doppeltbrechendes, compensirtes Prisma N_1, welches den ordentlichen Strahl nur unbedeutend ablenkte, und gelangte so zur unteren Objectivhälfte eines Heliometers [1]) von 78 mm Oeffnung, dessen Axe mit derjenigen von LL nahe zusammenfiel, und dessen Objectivhälften parallel zu ihrem Schnitte, senkrecht zur Axe verschiebbar sind. Der obere Theil des Strahlenbündels geht durch die Oeffnung OO direct zur oberen Objectivhälfte; im Brennpunkte jeder der Hälften H_1 und H_2 entsteht ein deutliches Bild des Spaltes von S; durch eine entsprechende Verschiebung der Objectivhälften kann man diese Bilder nebeneinanderstellen, zur genauen Berührung bringen und so ihre Intensität vergleichen.

Es wird hier nur das Bild beobachtet, welches von dem aus N_1 austretenden ordinären Lichtbündel herrührt; das extraordinäre Bündel wird durch die Diaphragmen des Heliometers abgeblendet.

---

1) Dies Instrument ist von Fraunhofer verfertigt worden und wurde bei Zerstörung der Ofener Sternwarte i. J. 1849 gerettet.

Bei dieser Anordnung ist die relative Intensität der beiden beobachteten Bilder, von der Intensität der Lichtquelle S gänzlich unabhängig.

Bezeichnen wir die Oberfläche der Oeffnung OO mit F; die Gestalt derselben ist quadratisch, ihre Seiten liegen horizontal und vertical, das Verhältniss der Grösse der Oeffnungen OO und DD ist so gewählt, dass die Intensität des von dem durch OO gehenden Bündel herrührenden Bildes etwas geringer war, als diejenige des durch N_1 dringenden, polarisirten Bündels. Vor das Ocular wurde das Nicol'sche Prisma N_2 befestigt; drehte man N_2, so änderte sich die Intensität des polarisirten Lichtes, während die Helligkeit des aus natürlichem Lichte bestehenden Bildes constant blieb. Musste nun N_2 um den Winkel η_0, gerechnet von der erwähnten parallelen Lage seines Hauptschnittes zu N_1, gedreht werden, damit die Intensität des polarisirten Bildes so weit geschwächt wurde, dass dieselbe derjenigen des natürlichen Bildes gleichkam, dann war die relative Intensität beider Bilder: $1 : \cos^2 \eta_0$.

Nun wurde vor die Oeffnung OO ein Drahtgitter befestigt, dessen brauchbarer Theil grösser als diese war, so dass dadurch die ganze Fläche F in ein Gitter mit vollständig undurchsichtigen Zwischenräumen verwandelt wurde, dessen Fläche senkrecht zur optischen Axe, und deren Oeffnungen mit ihrer Längsrichtung vertical zu stehen kamen. Es entsteht im Brennpunkte des Heliometers auf der Horizontalen eine ganze Reihe von aus natürlichem Licht bestehenden Beugungsbildern, deren mittleres die Stelle des früheren natürlichen einnimmt.

Zur Vergleichung der Intensitäten wurde durch Verschiebung der einen oder auch der beiden Objectivhälften das polarisirte Bild neben irgendeines der soeben erwähnten Bilder gestellt und in genaue Berührung mit demselben gebracht. Bei Ausführung der Beobachtungen wurde jedoch nur die untere Objectivhälfte verschoben, dabei blieb die Beleuchtung der oberen Oeffnung OO vollkommen constant während die Intensität des polarisirten Bündels nur

sehr wenig geändert wurde, da das Diaphragma *DD* und das Prisma N_1 auf einem, mit dem Heliometer in keiner Verbindung stehenden Stativ befestigt waren, und durch Verschiebung von H_2 nur insofern Aenderungen der Intensität eintreten konnten, als das Bündel einen mehr oder weniger dicken Theil der Linse H_2 durchlaufen musste; dieser Einfluss jedoch, besonders bei den hier vorkommenden, verhältnissmässig geringen Verschiebungen, kann gänzlich ausser Acht gelassen werden. Ist η_1 der Winkel, bei welchem die Intensität des polarisirten Bildes bis zu derjenigen eines beliebigen Beugungsbildes abgeschwächt ist, so ist deren Intensitätsverhältniss: $1 : \cos^2 \eta_1$; daher ist die Intensität des Beugungsbildes im Verhältniss zu derjenigen des natürliches Bildes, welches bei Entfernung des Gitters aus dem bei *OO* einfallenden Lichte entsteht, gleich $\frac{\cos^2 \eta_1}{\cos^2 \eta_0}$.

Um die Vergleichung mit grösserer Sicherheit vornehmen zu können, wurde der in *S* befindliche Spalt für jedes Gitter so breit gemacht, dass das polarisirte Bild genau den Raum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hauptbeugungsbildern einnahm, daher dessen Breite der halben Entfernung zweier Hauptmaxima gleichkam. Bei der eigentlichen Messung wurde nun N_2 so weit gedreht, bis das polarisirte und das zu messende Beugungsbild eine einzige, zusammenhängende, gleichmässig erleuchtete Fläche zu bilden schienen; bei diesem Vorgange ist das Auge für Intensitätsunterschiede am empfindlichsten [1]).

Die zur theoretischen Bestimmung der Intensität der Beugungsbilder in meiner citirten Arbeit gegebenen Ausdrücke würden genügen, wenn in *S* nur eine unendlich kleine leuchtende Fläche sich befände, aber nach dem Vorhergehenden hat dieser Spalt obwohl sehr kleine, so doch endliche Dimensionen, und dieser Umstand ändert wesentlich die Intensität, da die Maxima erster Ordnung zu denjenigen der zweiten Ordnung hinzutreten.

---

1) Helmholtz, Physiologische Optik, p. 327.

Zur genauen Erforschung dieses Einflusses untersuchen wir im Folgenden für einen beliebigen Punkt des Raumes die Intensität, wobei sich in S eine parallelogrammförmige leuchtende Oeffnung von den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ befinde, und das von derselben ausgehende Licht durch ein aus einer grossen Anzahl von Oeffnungen bestehendes Gitter gebeugt wird.

2.

Wir wählen die optische Axe der Linsen zur Z-Axe und legen die X-Axe horizontal, die Y-Axe vertical durch den Mittelpunkt des Gitters. Sei b die Höhe der Gitteröffnungen, a die Breite derselben, die Brennweite der Collimatorlinse ϱ_1, die der Heliometerobjective ϱ; schliesslich falle die im Mittelpunkte der leuchtenden Oeffnung $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ errichtete Normale mit der Z-Axe zusammen.

Jeder Punkt dieser Oeffnung in S schwingt unabhängig von den anderen, und es ist somit die im gebeugten Lichte auftretende Intensität gleich der Summe der durch die einzelnen oscillirenden Flächenelemente entstehenden Intensitäten.

Bezeichnen wir das Quadrat der Amplitude des vom Flächenelemente $\partial x_1\, \partial y_1$ austretenden Lichtes in der Entfernung 1 durch $\mathfrak{A}_0^2\, dx_1\, dy_1$, dann bedeutet $\frac{\mathfrak{A}_0^2\, dx_1\, dy_1}{\varrho_1^2}$ dasselbe in Bezug auf das auf die Collimatorlinse fallende Licht; indem letzteres durch die Linse dringt, wird die Amplitude geschwächt, und ebenso beim Durchgange durch die obere Objectivhälfte H_1; es tritt jedoch infolge dessen nur eine Constante zu $\mathfrak{A}_0$, welche wir stillschweigend als in $\mathfrak{A}_0$ enthalten annehmen, so dass $\frac{\mathfrak{A}_0 (dx_1\, dy_1)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1}$ dieselbe Bedeutung hat, wie in der citirten Arbeit $\mathfrak{A}$, d. i. die Amplitude des vom Flächenelement $\partial x_1\, \partial y_1$ herrührenden auf das Gitter fallenden Lichtes. Daher ist auch die entsprechende gebeugte Amplitude:

$$\mathfrak{A}_0 \frac{(dx_1 dy_1)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1} \frac{ab}{\varrho\lambda} \frac{\sin\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi dn(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\sin\frac{\pi d(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi b(\psi_0-\psi_1)}{\lambda}}{\frac{\pi b(\psi_0-\psi_1)}{\lambda}},$$

wobei φ_1, ψ_1, φ_0, ψ_0 sich auf die Richtung des einfallenden, resp. gebeugten Strahles beziehen.

Wir suchen jedoch die Summe aller Amplitudenquadrate, welche von sämmtlichen Flächenelementen herrühren, denn nur diese ist der resultirenden Intensität proportional; beachten wir ferner, dass das im Brennpunkte der Linse LL befindliche Flächenelement mit seinen Grenzstrahlen, welche von seinem Rande nach dem optischen Mittelpunkte von LL gezogen werden, die Winkel $\partial\varphi_1$ und $\partial\psi_1$ bildet, und somit $dx_1 = \varrho_1 \partial\varphi_1$, $dy_1 = \varrho_1 \partial\psi_1$ ist, ferner, dass die Grenzen der leuchtenden Oeffnung $\varphi_1{}^0 = \frac{a}{2\varrho_1}$, $\psi_1{}^0 = \frac{b}{2\varrho_1}$ sind, so erhält man für die oben erwähnte Summe:

$$A^2 = \mathfrak{A}_0{}^2 \frac{a^2 b^2}{\varrho^2 \lambda^2} \int_{-\varphi_1{}^0}^{+\varphi_1{}^0} \frac{\sin^2\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi nd(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi d(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}} \partial\varphi_1 \int_{-\psi_1{}^0}^{+\psi_1{}^0} \frac{\sin^2\frac{\pi b(\psi_0-\psi_1)}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b(\psi_0-\psi)}{\lambda}\right)^2} \partial\psi_1.$$

Dies ist die Intensität eines gebeugten Strahles, dessen Richtung durch φ_0 und ψ_0 gegeben ist; somit wäre die kinetische Energie des gebeugten Lichtes, welches auf eine durch die Winkel φ_0', φ_0'', ψ_0', ψ_0'' begrenzte Fläche des Schirmes fällt:

$$\mathfrak{A}_0{}^2 \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \int_{\varphi_0'}^{\varphi_0''} \partial\varphi_0 \int_{-\varphi_1{}^0}^{+\varphi_1{}^0} \frac{\sin^2\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi nd(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi d(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}} \partial\varphi_1 \int_{\psi_0'}^{\psi_0''} \partial\psi_0 \int_{-\psi_1{}^0}^{+\psi_1{}^0} \frac{\sin^2\frac{\pi b(\psi_0-\psi_1)}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b(\psi_0-\psi_1)}{\lambda}\right)^2} \partial\psi$$

dabei kann ψ_0', ψ_0'' eine Function von φ_0 sein.

Bei den hier gebrauchten Gittern war die Länge der Gitteröffnungen b sehr gross gegen die Wellenlänge (20 mm); daher hat der nach ψ_1 zu integrirende Factor der Gleichung (1) nur so lange einen endlichen Werth,

als ψ_1 zwischen den Grenzen $+\psi_1^0$ und $-\psi_1^0$ liegt, ausserhalb dieser, obwohl sehr kleinen, so doch endlichen Grenzen ist das Integral verschwindend klein; da wir im Folgenden nur das auf der X-Axe liegende gebeugte Licht untersuchen, so ist dabei $\psi_0 = 0$, und man kann für die Grenzen $+\psi_1^0$ und $-\psi_1^0$ ohne merklichen Fehler $+\infty$ und $-\infty$ setzen. Das erwähnte Integral erhält dann den Werth $\frac{\lambda}{b}$ und daher ist die Intensität:

$$A^2 = \mathfrak{A}_0^2 \frac{ab}{\varrho^2} \cdot \frac{a}{\lambda} \int_{-\varphi_1^0}^{+\varphi_1^0} \frac{\sin^2 \frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi d n(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d(\varphi_0-\varphi_1)}{\lambda}} \partial\varphi_1.$$

Führen wir nun die in der mehrfach citirten Arbeit benutzten Abkürzungen auch hier ein, indem wir setzen: $\omega_1 = \frac{\pi a \varphi_1}{\lambda}$, $\omega_1^0 = \frac{\pi a \varphi_1^0}{\lambda}$, $\omega_0 = \frac{\pi a \varphi_0}{\lambda}$, $m = \frac{d}{a}$; beachten wir ferner, dass die beugenden Oeffnungen zusammen die Oberfläche abn besitzen, und dass die Summe der Flächen der beugenden Oeffnungen und der zugehörigen undurchsichtigen Zwischenräume $dbn = F$ ist, und somit $ab = \frac{F}{mn}$, so erhält man für die Intensität folgende Form:

$$A^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2 F}{\varrho^2} \frac{1}{\pi n m} \int_{-\omega_1^0}^{+\omega_1^0} \frac{\sin^2(\omega_0-\omega_1)}{(\omega_0-\omega_1)^2} \cdot \frac{\sin^2 n m(\omega_0-\omega_1)}{\sin^2 m(\omega_0-\omega_1)} \partial\omega_1.$$

Zur weiteren Entwickelung zerlege man dies Integral in eine Reihe von Integralen mit näher aneinanderliegenden Grenzen, welche sich auf je ein Maximum erster oder zweiter Ordnung beziehen; bei der wirklichen Ausrechnung ist ausserdem für ω_1^0 ein bestimmter numerischer Werth zu substituiren. Bei den in der Beschreibung der Beobachtungsmethode erwähnten Fällen war angenommen: $\omega_1^0 = \frac{1}{4}\frac{\pi}{m}$, d. i. die Breite der Hauptbilder ist gleich der Hälfte ihrer gegenseitigen Entfernung; die Zerlegung ergibt:

$$\int_{-\omega_1^0}^{+\omega_1^0} = \int_{-\frac{1}{4}\frac{\pi}{m}}^{+\frac{1}{4}\frac{\pi}{m}} = \int_{-\frac{n}{4}\cdot\frac{\pi}{nm}}^{\left(1-\frac{n}{4}\right)\frac{\pi}{nm}} + \int_{\left(1-\frac{n}{4}\right)\frac{\pi}{nm}}^{\left(2-\frac{n}{4}\right)\frac{\pi}{nm}} + \ldots + \int_{\left(\frac{n}{4}-1\right)\frac{\pi}{nm}}^{\frac{n}{4}\frac{\pi}{nm}}.$$

Es ist nun n eine grosse Zahl, und folgen die Maxima erster Ordnung sehr dicht aufeinander, so dass man annähernd annehmen kann, in jedem Punkte des Raumes beginnt oder endet ein solches Maximum; für solche jedoch ist: $\omega_0 = \mu_0 \frac{\pi}{nm}$, unter μ_0 eine ganze Zahl verstanden. Bedeutet μ' eine zwischen $-\frac{n}{4}$ und $+\frac{n}{4}$ liegende ganze Zahl, so ist $\omega_0 - \omega_1 = (\mu_0 - \mu')\frac{\pi}{mn}$; im Falle $\mu_0 - \mu'$ die Werthe 0, n, $2n$, $3n$ u. s. w. erhielte, sind die beiden Integrale, in welchen dieser specielle Grenzwerth von μ' vorkommt, zu vereinigen und bilden dann ein dem Hauptmaximum entsprechendes Integral, dessen Integration in der citirten Arbeit durchgeführt ist. Der Näherungswerth der übrigen Integrale lässt sich folgendermaassen bestimmen: Die Differenz der Grenzen ist $\frac{\pi}{nm}$, und da n gross ist, so kann man $(\omega_0 - \omega_1)$, $\sin(\omega_0 - \omega_1)$ $\sin m(\omega_0 - \omega_1)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nahezu als constant betrachten und in denselben den Mittelwerth dieser Grenzen substituiren, so dass man hat, $\mu_0 - \mu' = \mu''$ gesetzt:

$$\int_{\mu'\frac{\pi}{nm}}^{(\mu'+1)\frac{\pi}{nm}} \frac{\sin^2(\omega_0-\omega_1)}{(\omega_0-\omega_1)^2} \cdot \frac{\sin^2 nm(\omega_0-\omega_1)}{\sin^2 m(\omega_0-\omega_1)} \partial\omega_1 = \frac{\sin^2\frac{2\mu''+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{2\mu''+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(2\mu''+1)\frac{\pi}{2n}} \times$$

$$\int_{\mu'\frac{\pi}{nm}}^{(\mu'+1)\frac{\pi}{nm}} \sin^2 nm\cdot(\omega_0-\omega_1)\,\partial\omega_1 = \frac{2nm}{\pi}\frac{1}{(2\mu''+1)^2} \frac{\sin^2\frac{2\mu''+1}{m}\frac{\pi}{2n}}{\sin^2(2\mu''+1)\frac{\pi}{2n}}.$$

Diese Formel gilt für jedes μ'', mit Ausnahme von $\mu''=0,\ n-1,\ n,\ 2n-1,\ 2n,\ 3n-1,\ 3n$ u. s. w., in diesen Fällen ist das obenerwähnte Verfahren zu benutzen.

Will man z. B. für die Richtung $\varphi_0=0,\ \psi_0=0$ die Intensität bestimmen, so erhält man:

$$A^2 = A_b^2\left\{\frac{1}{m^2}0{,}791711+\frac{4}{\pi^2}\sum_{\mu''=1}^{\mu''=\frac{n}{4}}\frac{1}{(2\mu''+1)^2}\frac{\sin^2\frac{2\mu''+1}{m}\frac{\pi}{2n}}{\sin^2(2\mu''+1)\frac{\pi}{2n}}\right\},$$

wobei aus einem gleich zu erwähnenden Grunde $\frac{\mathfrak{A}_0^2 F}{\varrho^2} = A_b^2$ gesetzt ist.

Dies ist zugleich auch der grösste Werth der Intensität und entspricht der Mitte des mittleren Hauptbildes. Suchen wir z. B. die Intensität in der Mitte zwischen diesem und dem nächsten Hauptbilde, so ist $\varphi_0=\frac{\lambda}{2d}$, $\psi_0=0$, und man hat:

$$A^2 = A_b^2\frac{2}{\pi^2}\sum_{\mu''=\frac{n}{4}}^{\mu''=\frac{3n}{4}}\frac{1}{(2\mu''+1)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{2\mu''+1}{m}\frac{\pi}{2n}}{\sin^2(2\mu''+1)\frac{\pi}{2n}}.$$

Die den Maximis erster Ordnung entsprechenden, unter dem Summenzeichen auftretenden Ausdrücke besitzen zusammengenommen einen geringeren Werth, als ein in A etwa vorkommendes Integral, welches einem Maximum zweiter Ordnung entspricht.

Entfernen wir aber das Gitter, so dass das Licht ungehindert durch die Fläche F dringen kann, so tritt nur eine zu vernachlässigende Diffraction ein[1]); die Amplitude des von $\partial x_1\,\partial y_1$ ausgehenden und auf F fallenden Lichtes ist, wie vorhin: $\frac{\mathfrak{A}_0\,(dx_1\,dy_1)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1}$, erleidet durch die Linsen LL und H_1 dieselbe Schwächung, wie vorhin, wir vereinigen die dadurch entstehende Constante, wie früher, mit $\mathfrak{A}_0$

1) Die Beachtung derselben macht die Beobachtungsresultate a. f. Tab. etwas kleiner und führt zu einer um geringes besseren Uebereinstimmung der Beobachtung und der Theorie.

und behalten dieselbe Bezeichnung bei. Diese einfallende Amplitude besitzt für jeden Punkt von F denselben Werth; daher ist die Intensität des vom Elemente $\partial x_1 \partial y_1$ herrührenden, durch F dringenden Lichtes: $C\mathfrak{A}_0^2 F \partial\varphi_1 \partial\psi_1$; im Heliometer entsteht jedoch ein scharfes Bild von $\partial x_1 \partial y_1$, dessen Dimensionen eben durch die Winkel $\partial\varphi_1$, $\partial\psi_1$ gegeben sind, dessen Fläche ist somit $\varrho^2 \partial\varphi \partial\psi$, da hier $\partial\varphi_1 = \partial\varphi_0$ und $\partial\psi_1 = \partial\psi_0$ sein muss. Sei nun A_b die Amplitude des Lichtes, welches dieses Bild hervorbringt, so ist, weil sämmtliches von $\partial x_1 \partial y_1$ ausgehendes und durch F dringendes Licht zur Erzeugung dieses Bildes verwendet wird:

$$CA_b^2 \varrho^2 \partial\varphi_0 \partial\psi_0 = C\mathfrak{A}_0^2 F \partial\varphi_1 \partial\psi_1,$$

$$A_b^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2 F}{\varrho^2};$$

es ist somit A_b die Amplitude des im Heliometer entstehenden Bildes, wenn das Licht ungehindert durch F einfällt.

Aus den eben gegebenen Formeln folgt zunächst, dass die einzelnen Beugungsbilder der leuchtenden Oeffnung ab, strenge genommen, keine constante Amplitude besitzen, sondern dass dieselbe an den Rändern schwächer ist als in der Mitte des Bildes, ferner dass der zwischen diesen Hauptbildern enthaltene Raum eine, obzwar schwache, so doch zu beachtende Beleuchtung erhält.

Will man streng verfahren, so bleibt nichts anderes übrig, als die numerische Ausrechnung jedes einzelnen unter dem Summationszeichen stehenden Ausdruckes von $\mu''=1$ bis z. B. $\mu''=n-2$; dadurch sind wir in den Stand gesetzt, die Intensität für jeden Punkt des mittleren Hauptbildes und des zu seinen Seiten liegenden dunkleren Raumes zu bestimmen.

Das Auge des Beobachters ist nicht im Stande, die Ungleichförmigkeit der Beleuchtung der Hauptbilder und der dunkleren Stellen wahrzunehmen; daher wurde bei der Berechnung die Beleuchtung dieser Räume als gleichförmig angenommen und für die Intensität ein Mittelwerth berechnet.

Es bezeichne A_M den durch Vereinigung der Amplituden verschiedener Punkte eines Hauptbildes entstandenen Mittelwerth, A'_M dasselbe für den dunkelen Raum zwischen diesem und dem folgenden, schwächeren Hauptbilde; bei der praktischen Ausführung der Beobachtung fällt das aus dem polarisirten Lichtbündel entstandene Bild auf den letzterwähnten dunkleren Raum, genau zwischen beide Hauptbilder; wird nun durch Drehung von N_2 die Intensität des polarisirten Bildes mit der des helleren Hauptbildes gleichgemacht, so ist, wenn man die grösste Amplitude des polarisirten Bildes durch A bezeichnet:

$$A^2 \cos^2\eta_1 + A'^2_M = A^2_M;$$

wir hatten jedoch schon früher $A_b^2 = A^2 \cos^2\eta_0$; und wenn wir setzen:

$$A^2_M = A_b^2 M^2; \quad A'^2_M = A_b^2 M'^2,$$

wobei M und M' die entsprechenden Mittelwerthe der oben entwickelten Summen sind:

$$\frac{\cos^2\eta_1}{\cos^2\eta_0} = M^2 - M'^2.$$

Die linke Seite der Gleichung enthält die bei den Intensitätsmessungen erhaltenen Beobachtungsdaten; die rechte Seite lässt sich, wie gezeigt, theoretisch berechnen, sobald die wesentlichen Charakteristika der Gitter, d. i. n und m gegeben sind; auf Grund dieser Gleichung können somit die Resultate des Experimentes mit den theoretischen Folgerungen verglichen werden.

Es wurden nun zwei hypothetische Gitter angenommen, für welche $m = 3$, $n = 20$; und: $m = {}^9/_8$, $n = 40$ (diese Daten entsprechen nahezu den Gittern V und I der unten mitgetheilten Tabelle), für dieselben wurde die Rechnung mit aller Strenge durchgeführt; es zeigte sich dabei, dass $(A^2_M - A'^2_M)$, wie dies schon von vornherein zu erwarten war, nur wenig vom Werthe des entsprechenden Hauptmaximums differirte; doch war dieser Ausdruck beim ersten Gitter um 6,3 %, beim zweiten um 7,1 % grösser, als das Maximum. Mit Hülfe der durch diese Rechnungen

gewonnenen Erleichterungen wurden für sämmtliche benutzten Gitter die verschiedenen Amplitudenwerthe berechnet.

3.

Die benutzten Gitter, mit Ausnahme von Nr. II, welches von Plössl herrührt, habe ich selbst mit Hülfe einer Perreaux'schen Theilungsmaschine verfertigt; ihre Dimensionen sind in der Tabelle enthalten. Das Polarisationsazimuth η_1, welches durch die Lage des vor das Ocular des Heliometers befestigten Nicol's N_2 gegeben war, wurde an dem am Ocularende befindlichen Positionskreis abgelesen; da nun zufolge der Eigenthümlichkeit der Beobachtungsmethode die durch N_2 gehenden Strahlen mit dessen Drehungsaxe nicht zusammenfielen, so geschah die Ablesung in zwei entgegengesetzten Quadranten, damit der dadurch entstehende Fehler eliminirt werde[1]).

An jedem Beobachtungstage wurde zu Anfang und zu Ende der Beobachtung die Nullstellung von N_2 in Bezug auf N_1 und der Winkel η_0 sorgfältig gemessen. Darauf wurde das polarisirte Bild z. B. zwischen dem zweiten und dritten linksseitigen Hauptbilde eingestellt, und in jedem der beiden Quadranten fünf Ablesungen gemacht; genau so wurde mit den rechtsseitigen Bildern verfahren, so dass die Intensität jedes Hauptbildes durch 20 Ablesungen bestimmt wurde.

Die Intensität der aufeinanderfolgenden Hauptbilder nimmt schnell ab, besonders bei kleinen Werthen von m; die kleinste beobachtete Intensität war ungefähr ein Tausendtel derjenigen des einfallenden Strahles; natürlich ist dann die Genauigkeit der Messung theils wegen des geringen Werthes von η_1, theils wegen der geringen Empfindlichkeit des Auges nicht sehr gross.

Die Ergebnisse der Beobachtung und der Berechnung, ferner die wichtigsten Daten der Gitter sind in umstehender Tabelle enthalten.

1) Bakhuyzen, Pogg. Ann. CXLV. p. 278.

Hauptbild.	I. $m=1{,}1502$, $d=0{,}500$ mm, $n=40$.			II. $m=1{,}504$, $d=0{,}3703$ mm, $n=54$.			III. $m=1{,}953$, $d=0{,}750$ mm, $n=26$.			IV. $m=2{,}252$, $d=0{,}500$ mm, $n=40$.		
Nr.	A. R. [1]	Beob. [2]	S. R. [3]	A. R.	Beob.	S. R.	A. R.	Beob.	S. R.	A. R.	Beob.	S. R.
0	0,5985	0,6890	0,6404	0,3496	0,3759	0,3741	0,2064	0,2442	0,2202	0,1561	0,1680	0,1663
1	0,0130	0,0171	0,0139	0,0603	0,0666	0,0645	0,0801	0,0909	0,0853	0,0778	0,0765	0,0828
2	0,0109	0,0137	0,0117	0,0149	0,0126	0,0159	0,0002	0,0000	0,0002	0,0024	0,0022	0,0025
3	0,0080	0,0081	0,0086	—	—	—	0,0088	0,0079	0,0093	0,0066	0,0048	0,0070
4	0,0049	0,0026	0,0052	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Hauptbild.	V. $m=2{,}806$, $d=1{,}000$ mm, $n=20$.			VI. $m=3{,}261$, $d=0{,}750$ mm, $n=26$.			VII. $m=3{,}730$, $d=0{,}500$ mm, $n=40$.			VIII. $m=7{,}500$, $d=0{,}750$ mm, $n=26$.		
Nr.	A. R.	Beob.	S. R.	A. R.	Beob.	S. R.	A. R.	Beob.	S. R.	A. R.	Beob.	S. R.
0	0,1006	0,1140	0,1071	0,0745	0,0833	0,0790	0,0569	0,0614	0,0603	0,0141	0,0159	0,0150
1	0,0650	0,0728	0,0692	0,0541	0,0610	0,0574	0,0447	0,0464	0,0474	0,0133	0,0139	0,0142
2	0,0124	0,0152	0,0132	0,0176	0,0219	0,0187	0,0197	0,0207	0,0210	0,0111	0,0121	0,0118
3	0,0004	0,0000	0,0004	—	—	—	0,0037	0,0035	0,0039	0,0079	0,0078	0,0084
4	0,0047	0,0043	0,0050	—	—	—	—	—	—	0,0050	0,0041	0,0053
5	0,0013	0,0009	0,0014	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1) Approximative Rechnung. 2) Beobachtung. 3) Strengere Rechnung.

Die Gitter sind nach der relativen Breite ihrer Oeffnungen geordnet; bei der approximativen Rechnung wurden die Hauptbilder als einfache Maxima zweiter Klasse betrachtet, die strengere Berechnung geschah nach dem unter 2. mitgetheilten Vorgange; schliesslich enthält die Rubrik „Beobachtung" den Quotienten $\frac{\cos^2 \eta_1}{\cos^2 \eta_0}$, d. i. die mittlere Intensität des Hauptbildes im Verhältniss zu derjenigen des Bildes, welches nach Entfernung des Gitters aus dem durch $OO = F$ dringenden Bündel entsteht.

Beachten wir, dass bei diesen Beobachtungen das Auge wohl kaum mehr als $^1/_{50}$ der ganzen Intensität zu unterscheiden vermag, und dass bei den kleineren Intensitäten die Empfindlichkeit des Auges noch weit geringer ist, beachten wir ferner die fast unausweichlichen geringen Unregelmässigkeiten in der Construction der Gitter, und schliesslich, dass die ganze, hier angewandte Rechnungsmethode nur annähernd genau ist, so kann diese Uebereinstimmung der Beobachtungsresultate mit den Folgerungen aus der Theorie jedenfalls als sehr befriedigend angesehen werden.

Somit wäre ein Theil einer Frage, welche für die ganze theoretische Optik von fundamentaler Bedeutung ist, erledigt; der andere Theil dieser Frage, d. i. die Messung der Amplitude des gebeugten Lichtes bei grösseren Diffractionswinkeln ist späteren Untersuchungen vorbehalten.

Fassen wir die Resultate vorliegender Untersuchung zusammen:

1) Die relativen und absoluten (d. i. mit dem einfallenden Lichte verglichenen) Intensitäten der Beugungshauptbilder entsprechen sehr nahezu den theoretischen Forderungen; daraus folgt:

2) Der absolute Werth der Amplitude des gebeugten Lichtes, welcher der theoretischen Berechnung zu Grunde gelegt wurde, ist richtig; somit stimmt auch die Voraussetzung, aus welcher wir diese

Amplitude (in der mehrfach citirten Arbeit) hergeleitet, mit der Wirklichkeit überein, oder:

3) Bei kleineren Beugungswinkeln tritt die gesammte einfallende Bewegungsenergie auch nach der Diffraction wieder als Lichtbewegung auf.

Phys. Inst. d. Univ. Budapest, den 29. Januar 1878.

IX. *Hydrodynamische Probleme in Beziehung zur Theorie der Meeresströmungen; von K. Zöppritz.*

Der Zweck nachfolgender Seiten ist, zu zeigen, welche Bewegungen eine unbegrenzte Flüssigkeitsschicht unter dem Einflusse von nur auf die Oberfläche wirkenden äusseren Einflüssen annimmt, vorausgesetzt, dass in der Flüssigkeit innere Reibung stattfindet, wie dies beim Wasser und allen übrigen bekannten Flüssigkeiten in höherem oder geringerem Maasse der Fall ist.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung reibender Flüssigkeiten lauten folgendermaassen[1]):

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - X - \frac{k}{\mu}\Delta u = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - Y - \frac{k}{\mu}\Delta v = 0,$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - Z - \frac{k}{\mu}\Delta w = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

worin u, v, w die Geschwindigkeiten in den Richtungen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; X, Y, Z die Com-

1) s. z. B. Kirchhoff's Vorles. üb. math. Physik. (1) 26. Vorles. Gl. (3).

ponenten der äusseren Kräfte, p den Druck, μ die Dichte, k den Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit und Δ das Symbol für die Summe der 3 partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung nach x, y und z ist.

Die Oberflächenbedingungen lassen sich am einfachsten so aussprechen:

1) Die Theilchen der Oberfläche der Flüssigkeit sollen stets mit denen des angrenzenden Körpers in Berührung bleiben, d. h. beide müssen senkrecht zur Oberfläche dieselben Geschwindigkeitscomponenten haben. Nennt man diese v und v_1, so muss jederzeit:

$$v - v_1 = 0$$

sein. Diese Bedingung schliesst, wenn der angrenzende Körper selbst flüssig oder gasförmig ist, die Nothwendigkeit ein, dass der Normaldruck gegen die Oberfläche von beiden Seiten gleich sein muss, indem sonst der durch die vorige Gleichung ausgedrückte Zusammenhang gelöst werden würde. — 2) Die Geschwindigkeitsdifferenz der Theilchen der Flüssigkeit gegen diejenigen des berührenden Körpers, parallel der Berührungsebene, ist proportional der Tangentialcomponente T der auf die Oberfläche wirkenden inneren Druckkräfte und hat die entgegengesetzte Richtung. Nennt man τ und τ_1 die Tangentialgeschwindigkeiten von Flüssigkeit und berührendem Körper, so soll demnach die Gleichung bestehen:

$$T = \lambda(\tau_1 - \tau),$$

worin λ die nur von der Natur der beiden berührenden Körper abhängige äussere Reibungsconstante ist. Findet Benetzung eines Theils der Oberfläche statt, so ist daselbst $\tau = \tau_1$, demnach $\lambda = \infty$ zu setzen.

Die Flüssigkeit sei über eine feste Ebene ausgebreitet. Von äusseren Kräften wirke nur die Schwerkraft senkrecht gegen diese Ebene. Ihre Richtung sei die positive X-Richtung. Alsdann ist:

$$X = g, \qquad Y = Z = 0.$$

Die feste Ebene werde benetzt, so dass die ihr anliegenden Flüssigkeitstheilchen stets in Ruhe bleiben. Dies

erfordert, dass für sie stets $u = v = w = 0$ seien. Der mit der anderen Oberfläche in Berührung befindliche Körper soll an jedem Punkte gleiche und gleich gerichtete, im allgemeinen aber von der Zeit abhängige Geschwindigkeit haben. Wenn die ursprüngliche Bewegung der Flüssigkeit parallel derjenigen des berührenden Mediums (oder auch $= 0$) war, so können in Uebereinstimmung mit der zweiten Oberflächenbedingung jederzeit nur Bewegungen in derselben Richtung stattfinden. Legt man also die XZ-Ebene parallel dieser Richtung, so ist immer $v = 0$.

Die Differentialgleichungen werden dann:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - g - \frac{k}{\mu}\Delta u = 0,$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k}{\mu}\Delta w = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Bedingungen sind für die in Berührung mit der festen Fläche befindlichen Theilchen: $u = 0$ und $w = 0$; für die andere Oberfläche:

$$v - v_1 = 0, \qquad T = \lambda(\tau_1 - \tau).$$

Bezeichnet man die Winkel der Oberflächennormale mit der X- und der Z-Axe mit (n, x), bez. (n, z), so ergibt die erste Gleichung:

$$(u - u_1)\cos(n, x) + (w - w_1)\cos(n, z) = 0,$$

die zweite dagegen zerfällt in die beiden folgenden:

$$T\sin(n, x) = \lambda(u_1 - u), \qquad T\sin(n, z) = \lambda(w_1 - w).$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man die Oberfläche horizontal annimmt, d. h.:

$$\cos(n, x) = 1, \qquad \cos(n, y) = \cos(n, z) = 0$$

setzt, so dass die Schicht die constante Tiefe h erhält; wenn man ferner $u = u_1 = 0$ und:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = g,$$

also:

$$p = N + \mu g x$$

setzt. N bezeichnet dann den für $x = 0$, also, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in die obere Begrenzungsebene verlegt wird, den von dem berührenden Medium auf die Oberfläche ausgeübten, als constant angenommenen Druck. Hierdurch wird:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Da ausserdem die erste der Differentialgleichungen identisch erfüllt wird, so bleibt zur Bestimmung von w nur die dritte:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

indem die vierte nur aussagt, dass w von z unabhängig sei, und hiermit in vorstehender Gleichung den zweiten Differentialquotienten nach z zum Wegfall gebracht hat.

In der Bedingungsgleichung, die für $x=0$ stattfinden muss, bedeutet jetzt T die auf ein zur X-Axe senkrechtes Oberflächenelement parallel zur Z-Axe ausgeübte Druckcomponente. Nach der Bezeichnung von F. Neumann und Kirchhoff ist:

$$X_x = Z_x = -k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

also hier:

$$T = -k\frac{\partial w}{\partial x} = \lambda(w_1 - w).$$

Im allgemeinsten Falle ist $w_1 = \varphi(t)$ eine gegebene Function der Zeit.

Die Anwendung ist nicht auf solche Fälle beschränkt, in denen nur kleine Geschwindigkeiten eintreten, deren Quadrate gegen die erste Potenz vernachlässigt werden können. Da nämlich:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w,$$

aber hier: $u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$

so ist für das vorliegende Problem ohne Vernachlässigung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Die Aufgabe ist also jetzt die, die Function w so zu bestimmen, dass sie innerhalb eines von zwei zur X-Axe senkrechten, um h von einander entfernten Ebenen begrenzten Raumes der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1}$$

und den Bedingungen genügt:

$$\text{für } x = 0: \quad -\frac{\partial w}{\partial x} + pw = p\varphi(t), \tag{2}$$

$$\text{für } x = h: \quad w = 0, \tag{3}$$

und endlich zur Zeit $t = 0$ einen gegebenen Anfangswerth annimmt, also:

$$\text{für } t = 0: \quad w = f(x). \tag{4}$$

Zur Vereinfachung ist $\frac{k}{\mu} = \alpha$ und $\frac{\lambda}{k} = p$ gesetzt.

Hiermit ist aber die Aufgabe auf ein wohlbekanntes Wärmeproblem zurückgeführt, auf die Temperaturbestimmung in einer Wand, deren eine Begrenzungsebene auf der Temperatur 0 erhalten wird, während die zweite in ein Medium von als Function der Zeit gegebener Temperatur frei ausstrahlt. Die längstbekannte Lösung dieser Aufgabe soll im Folgenden in ihrer Beziehung zu einigen wesentlichen Erscheinungen der Meeresströmungen betrachtet werden.

Der für die Rechnung einfachste, aber praktisch wichtigste Fall tritt ein, wenn die Geschwindigkeit w_1 des berührenden Mediums von der Zeit unabhängig, also eine beständige Grösse, und die Bewegung eine stationäre geworden, also ebenfalls von der Zeit unabhängig ist. In diesem Falle wird die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

ist also vom Reibungscoëfficienten frei. Ihre Lösung hat die Form:

$$w = a + bx,$$

und die Constanten bestimmen sich durch die beiden Bedingungen für $x = 0$ und $x = h$, so dass:

$$w = w_1 \cdot \frac{p\,(h-x)}{ph+1}$$

wird. Die Geschwindigkeit in der Oberfläche wird:

$$w_0 = w_1 \frac{ph}{ph+1}.$$

und geht, wenn h sehr gross ist, in w_1 selbst über.

Demnach lässt sich w auch so schreiben:

$$w = w_0 \frac{h-x}{h}.$$

Diese einfache Gleichung löst die wichtige Frage, wie in einer sehr ausgedehnten Wasserschicht von gleichförmiger Tiefe, die unter dem Einflusse von beständig auf ihre Oberfläche wirkenden Winden in stationärer Bewegung begriffen ist, die Geschwindigkeit vertheilt ist. Sie zeigt, dass, wenn die Bodenschicht in Ruhe ist, in allen übrigen Schichten Bewegungen in der Richtung des Windes stattfinden, mit Geschwindigkeiten, die proportional der Erhebung $(h-x)$ über den Meeresboden von 0 bis zum Werthe w_0 in der Oberfläche wachsen. Die von verschiedenen Autoren, meist Geographen, gestellte Frage, wie tief der Einfluss der Passatwinde reiche, ist also dahin zu beantworten, dass er, sofern die Bewegung des Oceans unter diesem Einfluss als eine stationäre betrachtet werden darf, bis auf den Meeresgrund reicht, und auch die tieferen Schichten ihm nach Maassgabe des obigen Gesetzes folgen. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass keine anderen Ursachen, wie z. B. Verdrängungsströme, diese Schichten in andere Bewegung versetzen. Für den Fall, dass tiefere Schichten durch irgendeine fremde Ursache in genau entgegengesetzter Richtung in Bewegung erhalten würden, wie die oberen Schichten, muss sich zwischen beiden eine Ebene finden, wo die Geschwindigkeit $= 0$ ist. Betrachtet man diese als untere Begrenzungsebene der oberen Schicht und bezeichnet ihren Abstand von der

Oberfläche mit h_1, so gilt für die Bewegung in der oberen Masse die Gleichung:

$$w = w_0 \frac{h_1 - x}{h_1}.$$

Die Vertheilung der Geschwindigkeit in der oberen Schicht ist also dieselbe, wie wenn die untere feste Masse wäre.

Die für stationäre Bewegung gefundene Geschwindigkeit ist von dem Reibungscoëfficienten k nur durch w_0 abhängig, (welche Abhängigkeit für ein sehr grosses h ganz verschwindet) sie wird also in einer sehr zähen Flüssigkeit nach demselben Gesetz mit der Tiefe abnehmen, wie bei einer sehr leicht beweglichen. Der Einfluss der Reibung zeigt sich eben bei der stationären Bewegung nur in der Theilnahme aller Schichten an der Bewegung, die von aussen her nur der Oberfläche mitgetheilt wird.

Die Abhängigkeit vom Reibungscoëfficienten tritt erst bei der Betrachtung zeitlich veränderlicher Bewegungen ein und gibt, um ein bei mehreren Schriftstellern beliebtes Wort zu gebrauchen, ein Maass für die Tiefe des Eindringens des Oberflächenantriebs innerhalb einer bestimmten Zeit.

Die allgemeine Auflösung der Differentialgleichung (1) mit den Nebenbedingungen (2), (3), (4) ist schon von Poisson gegeben worden[1]). Dieselbe lässt sich eleganter ableiten nach der (wohl von Dirichlet herrührenden) Methode, die man in Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff, p. 140 auf das etwas einfachere Problem angewendet findet, wenn keine freie Ausstrahlung, sondern eine gegebene Temperatur an der Oberfläche stattfindet.

Die Function w lässt sich zusammenstellen aus zwei Functionen u und v, welche beide der allgemeinen Differentialgleichung (1) für w genügen und folgende Bedingungen erfüllen:

---

1) Journ. de l'école polytechnique, Cah. 19. p. 69. und Théorie mathématique de la chaleur p. 327.

für $x = 0$:	für $x = h$:	für $t = 0$:
$-\frac{\partial u}{\partial x} + pu = 0,$	$u = 0,$	$u = f(x),$
$-\frac{\partial v}{\partial x} + pv = p\varphi(t);$	$v = 0;$	$v = 0.$

Ihre Summe $u + v = w$ gehorcht dann den Bedingungen (2), (3) und (4).

Wenn m die unendlich vielen, sämmtlich reellen Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$m \cos mh + p \sin mh = 0 \tag{5}$$

bedeuten, so werden die Forderungen für u erfüllt durch den über alle Wurzeln m zu summirenden Ausdruck:

$$u = 2\sum_0^\infty \frac{m \cos mx + p \sin mx}{hm^2 + p(hp+1)} e^{-m^2 at} \int_0^h f(\xi)(m \cos m\xi + p \sin m\xi)\, d\xi. \tag{6}$$

Die Forderungen für v werden erfüllt durch:

$$v = \varphi(t) \left\{ \frac{p(h-x)}{ph+1} - 2p \sum_0^\infty \frac{m \cos mx + p \sin mx}{m(hm^2 + p(hp+1))} \right\} \tag{7}$$

$$+ 2ap \sum_0^\infty \frac{m(m \cos mx + p \sin mx)}{hm^2 + p(hp+1)} \int_0^t \varphi(\lambda) e^{-m^2 a(t-\lambda)} d\lambda.$$

Das erste Glied dient nur zur Darstellung der Function für $x = 0$, verschwindet aber, so oft $0 < x \leqq h$ ist, denn sein zweiter Term ist weiter nichts, als die Entwickelung des ersten nach Sinus des durch die Wurzeln der transcendenten Gleichung (5) vervielfachten Argumentes $(h-x)$, hebt sich also mit dem ersten Term weg, so lange $x > 0$ ist. Für die Anwendung auf innere Punkte kann also dies erste Glied weggelassen werden. Für solche Punkte ist demnach:

$$w = 2\sum_0^\infty \frac{m \cos mx + p \sin mx}{hm^2 + p(hp+1)} e^{-m^2 at} \int_0^h f(\xi)(m \cos m\xi + p \sin m\xi)\, d\xi \tag{8}$$

$$+ 2ap \sum_0^\infty m \cdot \frac{m \cos mx + p \sin mx}{hm^2 + p(hp+1)} \int_0^t e^{-m^2 a(t-\lambda)} \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Das erste dieser beiden Glieder, das vom Anfangszustande herrührt, verschwindet, wenn $f(x) = 0$ ist, wenn also zur Zeit $t = 0$ die ganze Masse in Ruhe war; verschwindet aber auch bei beliebigem Werthe von $f(x)$, wenn t sehr gross ist, d. h. wenn der Anfangszustand in sehr entfernter Vergangenheit liegt. In beiden Fällen ist die Bewegung im Inneren der Flüssigkeit durch das letzte Glied allein dargestellt. Die Gesetzmässigkeiten, welche aus diesem Ausdrucke bezüglich der Bewegung in verschiedenen Tiefen und zu verschiedenen Zeiten folgen, sind für dieses Problem theilweise dieselben, wie sie schon Fourier bei dem einfacheren Problem, wenn die Temperatur der Oberfläche gegeben ist, nachgewiesen hat; sie stimmen nämlich überein, soweit sie von dem beiden Problemen gemeinsamen Integral nach λ abhängen.

Ist $\varphi(t) = w_1$ eine von der Zeit unabhängige gegebene Grösse, so wird dieses Integral:

$$\int_0^t w_1 e^{-m^2\alpha(t-\lambda)} d\lambda = \frac{w_1}{m^2\alpha}\left(1 - e^{-m^2\alpha t}\right)$$

und demnach der vom Anfangszustand unabhängige Theil:

$$(9) \qquad v = 2pw_1 \sum_0^\infty \frac{m\cos mx + p\sin mx}{m(hm^2 + p(hp+1))}\left(1 - e^{-m^2\alpha t}\right).$$

Hieraus ersieht man zunächst, dass nach unendlich langer Zeit die Exponentialgrösse verschwindet und v im Grenzfalle durch die Summe ausgedrückt wird, von welcher oben schon bemerkt wurde, dass sie:

$$(10) \qquad = w_1 \frac{p(h-x)}{ph+1} = w_0 \frac{h-x}{h}$$

wird, wie es die directe Behandlung des stationären Zustandes ergeben hatte.

Wenn zu irgendeiner Zeit $\vartheta < t$ eine Aenderung der die Oberfläche beeinflussenden Geschwindigkeit w_1 um $+\gamma$ eintritt, so ist also:

$$\varphi(\lambda) = w_1 \qquad \text{von } \lambda = 0 \text{ bis } \lambda = \vartheta,$$
$$\varphi(\lambda) = w_1 + \gamma \qquad \text{von } \lambda = \vartheta \text{ bis } \lambda = t;$$

folglich theilt sich obiges Integral in zwei und hat den Werth:

$$\frac{w_1}{m^2\alpha}\left(1 - e^{-m^2\alpha t}\right) + \frac{\gamma}{m^2\alpha}\left(e^{-m^2\alpha\vartheta} - e^{-m^2\alpha t}\right).$$

Das zweite Glied, welches demnach zu v hinzutritt, stellt den ins Innere fortgepflanzten Einfluss der Geschwindigkeitsänderung γ dar. — Sind t und ϑ ungeheuer gross, ihr Unterschied aber klein, so nähert sich das zweite Glied dem Werthe:

$$\gamma(t - \vartheta).$$

Der Einfluss jener Aenderung ist dann in jeder Tiefe proportional ihrer Dauer und ihrer Grösse.

Wenn die Geschwindigkeit des berührenden Mediums an der Oberfläche eine periodische Function der Zeit ist, z. B.:

$$\varphi(t) = \cos(at - b),$$

so wird, wenn man $t - \lambda = \varrho$ als neue Variabele einführt:

$$\int_0^t e^{-m^2\alpha(t-\lambda)} \cos(a\lambda - b)\, d\lambda = \cos(at - b) \int_0^t e^{-m^2\alpha\varrho} \cos a\varrho\, d\varrho$$
$$+ \sin(at - b) \int_0^t e^{-m^2\alpha\varrho} \sin a\varrho\, d\varrho.$$

Nach unendlich langer Zeit werden diese beiden Integrale Constanten bezüglich der Zeit, und die Geschwindigkeit in jeder Tiefe wird also eine periodische Function der Zeit, von derselben Periode $\left(\frac{2\pi}{a}\right)$ wie die des berührenden Mediums, aber veränderter, von x abhängiger Amplitude und verschobener Eintrittszeit der Maxima und Minima. Ist $\varphi(t)$ eine periodische Function von allgemeinem Charakter, so kann es unter der Form dargestellt werden:

$$\varphi(t) = w_1 + w_1' \cos(at - b_1) + w_2' \cos(2at - b_2) + \ldots$$

Setzt man diesen Werth in das Integral, so ergibt sich für w ein Ausdruck, dessen erstes Glied für $t = \infty$ in

$$\frac{p(h-x)}{ph+1} w_1$$

übergeht, worauf eine Reihe von Gliedern mit $\cos(nat-b)$ und $\sin(nat-b)$ folgt, von derselben Art wie im vorigen einfacheren Falle für $n = 1$.

Will man die mittlere Geschwindigkeit während einer Periode $T = \frac{2\pi}{a}$ berechnen, so fallen in dem Zeitintegral alle mit Sinus und Cosinus behafteten Glieder hinweg, und es bleibt:

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^T w\,dt = w_1 \frac{p(h-x)}{ph+1}$$

als mittlere Geschwindigkeit, also dieselbe, wie bei der stationären Bewegung.

Bei dem Problem der Temperaturbestimmung im Innern einer nur durch eine Ebene begrenzten, auch nach der positiven X-Richtung hin unbegrenzten Masse, wenn die Temperatur der Ebene gegeben ist, lassen sich noch einige einfache Gesetze über die Temperaturzunahme mit der Tiefe ableiten, welche weiter unten mitgetheilt werden. Solche Gesetze lassen sich für das vorliegende Problem nicht angeben. Wendet man die Gleichungen (5) bis (8) auf eine Schicht von unendlicher Dicke an, setzt also $h = \infty$, so ist zur Lösung der transcendenten Gleichung:

$$mh\cos mh + ph\sin mh = \varphi\cos\varphi + ph\sin\varphi = 0$$

nur erforderlich, dass

$$\sin\varphi = \sin mh = 0,$$

also

$$mh = n\pi$$

wird, wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Es wird dann m eine continuirlich von 0 bis ∞ wachsende Grösse, denn

der Unterschied zwischen 2 aufeinanderfolgenden Wurzeln m wird:

$$\frac{\pi}{h} = dm.$$

Demnach erhält man aus Gleichung (8):

$$1)\quad w = u + v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-m^2\alpha t}\frac{m\cos mx + p\sin mx}{m(m^2+p^2)}\,dm\int_0^\infty f(\xi)(m\cos m\xi + p\sin m\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{2\alpha p}{\pi}\int_0^\infty \frac{m(m\cos mx + p\sin mx)}{m^2+p^2}\,dm\int_0^t \varphi(\lambda)e^{-m^2\alpha(t-\lambda)}\,d\lambda.$$

Es soll hiervon nur der zweite vom Anfangszustand unabhängige Theil v weiter betrachtet werden, und zwar für den Fall, dass $\varphi(\lambda) = w_1$ constant ist. Indem man den schon in Gleichung (9) benutzten Werth des dann sich ergebenden Integrals nach λ einsetzt und bemerkt, dass die von t unabhängige Summe den Werth der Gleichung (10) und also für $h = \infty$ den Werth w_1 annimmt, erhält man:

$$v = w_1 - \frac{2p w_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos mx}{m^2+p^2}e^{-m^2\alpha t}\,dm - \frac{2p^2 w_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin mx}{m(m^2+p^2)}e^{-m^2\alpha t}\,dm.$$

Diese beiden bestimmten Integrale lassen sich auf das Kramp'sche Integral reduciren. Die Reduction des ersten findet man am schon genannten Orte[1]) ausgeführt. Setzt man zur Abkürzung:

$$p\sqrt{\alpha t} = \tau, \qquad \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \xi,$$

so ist:

$$2p\int_0^\infty \frac{\cos mx}{m^2+p^2}e^{-m^2\alpha t}dm = \sqrt{\pi}e^{\tau^2}\left\{e^{2\tau\xi}\int_{\tau+\xi}^\infty e^{-z^2}dz + e^{-2\tau\xi}\int_{\tau-\xi}^\infty e^{-z^2}dz\right\}.$$

Das zweite Integral erhält man aus diesem durch Integration nach x von 0 bis x. Die entstehenden Doppel-

1) Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff, p. 166—169.

integrale reduciren sich durch partielle Integration auf einfache. Man erhält:

$$2p^2\int_0^\infty \frac{\sin mx}{m(m^2+p^2)}\, e^{-m^2at}dm = \sqrt{\pi}\, e^{\tau^2}\Big\{e^{2\tau\xi}\int_{\tau+\xi}^{\infty} e^{-z^2}dz - e^{-2\tau\xi}\int_{\tau-\xi}^{\infty} e^{-z^2}dz + 2\int_0^x d\xi e^{-\tau^2-\xi}$$

Hiermit wird:

$$(12)\qquad w = w_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}w_1\Big\{e^{p^2at+px}\int_{p\sqrt{at}+\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-z^2}dz + e^{-p^2at}\int_0^{2\sqrt{at}} e^{-z^2}dz\Big\}.$$

Will man hieraus den allgemeineren Ausdruck für $w_1 = \varphi(\lambda)$ erhalten, so hat man nur den zweiten Theil mit positivem Vorzeichen zu nehmen, $(t-\lambda)$ statt t einzusetzen, mit $\varphi(\lambda)\,d\lambda$ zu multipliciren und von 0 bis t zu integriren.

Die Geschwindigkeit in der Oberflächenschicht erhält man aus Gleichung (12), indem man darin $x = 0$ setzt:

$$w_0 = w_1\Big\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{p^2at}\int_{p\sqrt{at}}^{\infty} e^{-z^2}dz\Big\}.$$

Der zweite Theil dieses Ausdrucks nähert sich für wachsende Zeit dem reciproken Werthe von $p\sqrt{\pi\alpha t}$ und damit der Null. In Worte übersetzt, heisst dies: Die Geschwindigkeit der Oberflächenschicht nähert sich immermehr derjenigen des berührenden Mediums.

Diese nothwendige Folgerung der Theorie zieht aber eine Grenze für ihre Anwendbarkeit auf die Theorie der Meeresströmungen. Die Erfahrung lehrt, dass nirgends die Oberflächenschichten des Meeres die mittlere Geschwindigkeit der über sie hinwehenden Luftmassen annehmen, indem bei einigermaassen gesteigertem Wind periodische Bewegungen jener Schichten, Wellen entstehen, auf deren Seiten der Wind in ganz anderer Weise, nämlich durch Druck auf die Seitenflächen einwirkt, so dass bei noch mehr gesteigerter Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Luft und Wasser Zerreissungen des Zusammenhanges, discontinuirliche, turbulente Bewegungen auftreten.

Die oben zu Grunde gelegte Oberflächenbedingung kann also nur für sehr geringe Geschwindigkeiten der Wirklichkeit entsprechen, für grössere kann ihr die Wasseroberfläche als Ganzes nicht gehorchen. Es ist in diesem Falle zweckmässiger, die fortschreitende Bewegung der oberflächlichen Schicht des Oceans, die ja durch die Beobachtung an jeder Stelle leicht bestimmt werden kann, als gegebene Grösse, als bekannte Function der Zeit (event. als Constante) in das Problem als bedingende Grösse einzuführen. Man erhält dadurch ein erheblich einfacheres Problem, welches mathematisch aus dem vorigen abgeleitet werden kann, wenn man in diesem $p = \infty$ setzt. Die Oberflächenbedingung lautet dann für $x = 0$: $w = \varphi(t)$. Die transcendente Gleichung verwandelt sich in $\sin mh = 0$, deren Wurzeln:

$$m = \frac{n\pi}{h}$$

sind. Damit wird der allgemeine Ausdruck der Gleichung (8) für $p = \infty$ zu folgendem:

$$(13) \qquad w = \frac{2}{h}\sum_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \alpha t} \sin\frac{n\pi x}{h} \int_0^h f(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{h}\, d\xi$$

$$+ \frac{2\alpha\pi}{h^2}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} n \sin\frac{n\pi x}{h} \int_0^t \varphi(\lambda)\, e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \alpha (t-\lambda)}\, d\lambda.$$

Für den stationären Zustand erhält man dieselbe Formel, wie zuvor, nur ist jetzt $w_0 = w_1$.

Bezüglich der periodischen Bewegung in verschiedenen Tiefen gilt dasselbe, was oben für den allgemeineren Ausdruck nachgewiesen wurde. Wendet man aber die nachstehende Formel auf unendlich tiefes Wasser, also auf $h = \infty$ an, so erhält man noch die schon erwähnten Gesetze. Setzt man nämlich im Ausdruck (11) $p = \infty$, so wird der zweite, oben mit v bezeichnete Theil:

$$v = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty m \sin mx\, dm \int_0^t \varphi(\lambda)\, e^{-m^2\alpha(t-\lambda)} d\lambda .$$

Das Integral nach m lässt sich ausführen, denn es ist:

$$\int_0^\infty m \sin mx\, e^{-\gamma m^2} dm = -\frac{d}{dx}\int_0^\infty \cos mx\, e^{-\gamma m^2} dm .$$

Letzteres Integral ist aber bekannt. Es ist nämlich:

$$\int_0^\infty \cos mx\, e^{-\gamma m^2} dm = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\, e^{-\frac{x^2}{4\gamma}} .$$

Danach wird:

$$\int_0^\infty m \sin mx\, e^{-\gamma m^2} dm = \frac{x\sqrt{\pi}}{4\gamma^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4\gamma}},$$

also:

$$(14)\quad v = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\lambda)\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha(t-\lambda)}}}{(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}^\infty \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\alpha z^2}\right) e^{-z^2} dz .$$

Ist nun $\varphi(t)$ constant $= w_0$, so sieht man sofort, dass v dasselbe wird für Werthepaare x, t und x', t', für welche die untere Grenze des Integrals dieselbe ist, also:

$$(15)\qquad \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x'}{\sqrt{t'}},$$

d. h. dass dieselbe Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten in Tiefen eintritt, die sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Zeiten.

Die Formel, welche für constante Oberflächengeschwindigkeit w_0 gilt, nämlich:

$$v = \frac{2w_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}^\infty e^{-z^2} dz = w_0\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-z^2} dz\right\}$$

kann benutzt werden, um mit Hülfe der Tafeln, die für den Werth des Kramp'schen Integrals vorhanden sind, die Zeit zu berechnen, nach welcher ein Punkt in gegebener Tiefe eine bestimmte Geschwindigkeit erlangt. Die Geschwindigkeit w_0 der Oberfläche erreicht ein Punkt erst nach unendlich langer Zeit. Nimmt man einen Punkt in der Tiefe $x = 100$ m und fragt, nach welcher Zeit derselbe die halbe Geschwindigkeit der Oberfläche, $v = \frac{1}{2} w_0$ besitzen wird, so hat man die transcendente Gleichung zu lösen:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu}{kt}}} e^{-z^2} dz,$$

worin für α sein Werth (s. p. 586) gesetzt ist. Es sind hierin $x = 100$ m und für k und μ die Werthe für die betreffende Flüssigkeit zu setzen. Da nach den Tafeln von Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1834 der oberen Grenze 0,48 der Integralwerth 0,50275 entspricht, so wird also die gesuchte Zeit t sehr annähernd durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{x}{2\sqrt{t}} \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 0{,}48.$$

Die Reibungsconstante für Wasser und sehr verdünnte Salzlösungen ist bei gewöhnlicher Temperatur nach O. E. Meyer[1]) etwa = 0,013 bis 0,015. Nimmt man 0,0144 und setzt noch $\mu = 1$, von welchem Werthe die Dichte des Seewassers erst in der dritten Decimalstelle abweicht, so kann man für die Anwendung auf den Ocean:

$$\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{1}{0{,}12}$$

setzen. k enthält als Einheit den Quadratcentimeter, also muss auch x in Centimetern ausgedrückt, also $x = 10000$ gesetzt werden. Man erhält demnach:

1) Pogg. Ann. CXIII, p. 400.

$$\sqrt{t} = \frac{5000}{0{,}48 \,.\, 0{,}12},$$

wobei t in Secunden herauskommt. Man findet:

$$t = 7\,537\,000\,000 \text{ Secunden} = 239 \text{ Jahre}.$$

Wenn also die Oberflächentheilchen eines ruhenden Oceans von sehr grosser (eigentlich unendlicher) Tiefe zu einem Zeitpunkte $t = 0$ sich mit einer constanten Geschwindigkeit fortzubewegen beginnen, so wird in 100 m Tiefe erst nach 239 Jahren die halbe Geschwindigkeit der Oberfläche herrschen.

Fragt man, nach wie viel Zeit ein Zehntel der Oberflächengeschwindigkeit in 100 m Tiefe eingedrungen ist, so findet man 41 Jahre. Nach dem durch die Gleichung (15) ausgedrückten Satze werden in 10 m Tiefe dieselben Geschwindigkeiten schon nach 2,39 bez. 0,41 Jahren herrschen.

Diese Zahlen sind sehr geeignet, einen Begriff davon zu geben, mit welcher Langsamkeit sich Bewegungsänderungen in die Tiefe fortpflanzen; denn was soeben für die Fortpflanzung einer beginnenden Oberflächenbewegung in eine ruhende Flüssigkeit berechnet wurde, gilt ebenso für jede Bewegungsänderung in der bewegten Flüssigkeit, indem sich die vorhandene und die neueingedrungene Geschwindigkeit algebraisch addiren. Eine stationäre linear mit der Tiefe an Geschwindigkeit abnehmende Strömung wird deshalb durch vorübergehend auf ihre Oberfläche einwirkende Geschwindigkeitsänderungen (wie z. B. durch Gegenwinde oder Stürme) mit Ausnahme der oberflächlichsten Schichten nur äusserst wenig alterirt werden. Es wird vielmehr an jedem tiefer gelegenen Punkte derselben eine mittlere, mit der Zeit nur sehr wenig veränderliche Geschwindigkeit herrschen, die durch die mittlere Geschwindigkeit an der Oberfläche bestimmt wird. Diese letztere Geschwindigkeit hat die Richtung der vorherrschenden Winde und nimmt mit ihnen ab und zu nach einem nicht näher festzustellenden Gesetze. Dieses Beschränktsein erheblicher Einwirkung vorübergehender Ur-

sachen auf die der Oberfläche benachbarten Schichten rechtfertigt noch nachträglich die zur Erleichterung der Rechnung gemachte Annahme, dass der Ocean unendlich tief sei.

Ist die Geschwindigkeit der Oberfläche eine periodische Function der Zeit, wie dies alle von Jahreszeiten und Tagesstunden abhängigen Winde sind, so muss sie sich durch eine endliche Reihe von der Form:

$$\varphi(t) = \varrho_0 + \varrho_1 \cos\left(\frac{\pi t}{g} - \lambda_1\right) + \varrho_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{g} - \lambda_2\right) + \ldots$$

ausdrücken lassen. Wie schon bei dem vorigen complicirteren Problem gezeigt wurde, muss sich dann v durch eine Cosinus- und Sinus-Reihe von derselben Periode darstellen lassen. Durch Benutzung der Formel (14) erhält man folgende Reihe[1]):

$$v = \varrho_0 + \sum \varrho_m e^{-x\sqrt{\frac{m\pi\mu}{2gk}}} \cos\left(\frac{m\pi t}{g} - \lambda_m - x\sqrt{\frac{m\pi\mu}{2gk}}\right),$$

aus der man sofort ersieht, dass die Geschwindigkeit in jeder Tiefe dieselbe Periode $2g$ hat, dass aber die Amplituden:

$$\vartheta_m = 2\varrho_m e^{-x\sqrt{\frac{m\pi\mu}{2gk}}}$$

mit wachsender Tiefe abnehmen. Im Meerwasser ist:

$$\sqrt{\frac{\pi\mu}{k}} = 14{,}77.$$

Wenn x in Centimetern und $2g$ in Secunden ausgedrückt wird, so wird für $x = 100$ m und die einjährige Periode, also für $m = 1$, $2g = 1$ Jahr, der Exponent von e etwa -26, also die Amplitude dieser Oscillation schon auf einen verschwindenden Bruchtheil verkleinert; bei $x = 10$ m auf $e^{-2{,}6} = \frac{1}{13{,}5}$.

1) Die Ausführung siehe in Riemann's cit. Vorlesungen, p. 137.

Wenn die Tiefen in arithmetischer Reihe abnehmen, so nehmen die Oscillationsweiten in geometrischer Reihe ab, derart, dass in 4 Tiefen x_1, x_2, x_3, x_4, die so gelegen sind, dass $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$, die Amplituden ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 in den Verhältnissen stehen:

$$\vartheta_4 : \vartheta_3 = \vartheta_2 : \vartheta_1.$$

Je ein Maximum und das darauffolgende Minimum einer Oscillation von der Dauer $2g$ finden sich gleichzeitig in einem Tiefenabstand:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{2\pi g k}{\mu}},$$

was für $2g = 1$ Jahr ergibt:

$$x_2 - x_1 = 11{,}9\,\text{m}.$$

Um sich eine durch Zahlen unterstützte Vorstellung von der Zeit zu machen, welche eine zur Zeit $t = 0$ beginnende, constant bleibende Oberflächengeschwindigkeit w_0 gebraucht, um den Geschwindigkeitszustand in der Tiefe eines vorher ruhenden Oceans von der endlichen Tiefe h dem stationären entgegenzuführen (wobei $w = w_0 \frac{h-x}{h}$ ist), muss man die obige Formel (13) anwenden, worin $f(\xi) = 0$ und $\varphi(\lambda) = w_0$ zu setzen ist. Man erhält:

$$w = 2 w_0 \frac{k\pi}{\mu h^2} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n \sin \frac{n\pi x}{h} \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{k}{\mu}(t-\lambda)} d\lambda,$$

oder nach Ausführung des Integrals:

$$w = w_0 \left\{ \frac{x}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \frac{k}{\mu} t} \sin \frac{n\pi x}{h} \right\}.$$

Da:

$$\frac{k}{\mu} \pi^2 = 0{,}1421,$$

so wird für eine in Centimetern auszudrückende mittlere Meerestiefe von 4000 m der Exponent von e

$$= -\frac{0{,}1421}{4000000^2} n^2 t$$

ausserordentlich klein, solange nicht t ungeheuer gross ist, die Reihe also sehr schwach convergent. Wenn $t = 10000$ Jahre ist, so müssen immer noch 4 Glieder berechnet werden, um eine Genauigkeit von einem Tausendtel zu erhalten. Fragt man nach dem Werthe der Geschwindigkeit w_m in der halben Tiefe des Oceans, also für $x = \frac{h}{2}$, so verschwinden in der Reihe alle Glieder, die gerade Vielfache enthalten, während die stehenbleibenden Sinus die Werthe ± 1 annehmen. Man erhält dann für $t = 10000$ Jahre, bis auf 0,001 genau:

$$w_m = w_0 \left\{ \tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(e^{-0,280} - \tfrac{1}{3} e^{-2,52} \right) \right\} = 0,037\, w_0.$$

Da nach unendlich langer Zeit an dieser Stelle die Geschwindigkeit $0,5\, w_0$ herrschen muss, so sieht man, welch geringer Theil der definitiven Geschwindigkeit nach 10000 Jahren erst so tief eingedrungen ist. Für $t = 100\,000$ Jahre dagegen wird:

$$w_m = w_0 \left\{ \tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi} e^{-2,80} \right\} = 0,461\, w_0.$$

Die Geschwindigkeit ist also nach 100 000 Jahren dem definitiven Werthe schon sehr nahe gekommen; nach 200 000 Jahren weicht sie nur noch um 0,002 davon ab.

Aus den vorhergehenden theoretischen Betrachtungen haben sich namentlich zwei Resultate ergeben, die den bisherigen Anschauungen mehr oder weniger widersprechen: Erstens, dass die von einer unveränderlichen Oberflächengeschwindigkeit herrührende stationäre Bewegung im Innern einer unbegrenzten Wasserschicht sich mit linear abnehmender Geschwindigkeit bis auf den Grund hinab bemerklich macht; während man bisher vielfach die Ansicht ausgesprochen fand, dass der Einfluss solcher Oberflächenströme, wie z. B. die durch die Passatwinde erzeugte Trift in den Aequatorialgegenden des Oceans, nur in sehr beschränkte Tiefen hinabreiche. Zweitens wurde gefunden, dass alle zeitlich veränderlichen, periodischen oder un-

periodischen Veränderungen der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte sich ausserordentlich langsam, die periodischen mit sehr rasch abnehmender Amplitude, in die Tiefe hinein fortpflanzen. Aus der Zusammenfassung beider Sätze folgt, dass die Bewegung des Hauptkörpers einer, periodisch veränderlichen Oberflächenkräften unterworfenen Wasserschicht durch die mittlere Geschwindigkeit der Oberfläche bestimmt ist und dass die periodischen Veränderungen nur in einer verhältnissmässig sehr dünnen Oberflächenschicht bemerkbar sind.

Es ist hieraus ersichtlich, dass bisher der Einfluss der Reibung nach einer Richtung hin unterschätzt, nach einer anderen überschätzt worden ist; unterschätzt, insofern man glaubte, ihren Einfluss nicht als einen so tief eindringenden betrachten zu dürfen; überschätzt, insofern man ihr bezüglich der Fortpflanzung veränderlicher Strömungsbewegungen einen viel zu bedeutenden Einfluss zuzuschreiben pflegte. Mehr noch wurde ihr Wirken nach einer anderen Richtung hin überschätzt, worüber die nachfolgende Untersuchung einigen Aufschluss geben wird.

Bisher wurde die Flüssigkeitsschicht nach zwei Dimensionen hin als unbegrenzt vorausgesetzt. Es lässt sich aber auch der Fall von seitlich begrenzten Strömen behandeln [1]) und damit der Einfluss erkennen, den die Seitenwände, also die Ufer, auf die Strömung haben.

Die flüssige Schicht habe wieder die Tiefe h, sei aber von zwei parallelen, senkrechten, um $2b$ von einander abstehenden Wänden begrenzt, die sie benetzt, an denen also die Geschwindigkeit $= 0$ ist. Wird die X-Axe wie früher, die Y-Axe aber senkrecht zu den beiden Seitenwänden und der Anfangspunkt in die Mitte der Oberflächenlinie des Querschnittes gelegt, so ist die Geschwindigkeit w parallel den Wänden durch die Differentialgleichung gegeben:

1) Die entsprechenden Wärmeprobleme hat Lamé in der kürzesten und elegantesten Form zu behandeln gelehrt: Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, p. 327.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

und die Bedingungen:

für $x = 0$: $-\frac{\partial w}{\partial x} + pw = p\varphi(t,y)$; für $x = h$: $w = 0$;

für $y = b$: $w = 0$; für $y = -b$: $w = 0$.

Für den Fall der stationären Bewegung, der hier ausschliesslich weiter verfolgt werden soll, wird:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

ausserdem muss die Geschwindigkeit des berührenden Mediums von t unabhängig, also nur $= \varphi(y)$ sein. Diesen Forderungen genügt die Function:

$$w = \frac{1}{b}\sum_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}(2n+1)\pi\frac{h-x}{2b}\cos(2n+1)\pi\frac{y}{2b}}{\mathfrak{Sin}(2n+1)\pi\frac{h}{2b} + \frac{(2n+1)\pi}{2bp}\mathfrak{Cof}(2n+1)\pi\frac{h}{2b}} \int_{-b}^{+b} \varphi(\lambda)\cos(2n+1)\pi\frac{\lambda}{2b}\,d\lambda,$$

worin zur Abkürzung der hyperbolische Cosinus und Sinus in Fracturschrift geschrieben sind, so dass also:

$$\mathfrak{Sin}\,\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \qquad \mathfrak{Cof}\,\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}).$$

Wird die Geschwindigkeit der Luft als unabhängig von y angenommen, also $\varphi(y) = w_1$ gesetzt, so wird:

$$w = \frac{4w_1}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\mathfrak{Sin}(2n+1)\pi\frac{h-x}{2b}\cos(2n+1)\pi\frac{y}{2b}}{\mathfrak{Sin}(2n+1)\pi\frac{h}{2b} + \frac{(2n+1)\pi}{2bp}\mathfrak{Cof}(2n+1)\pi\frac{h}{2b}}.$$

Wenn man hierin die Breite $2b = \infty$ setzt, so muss dieselbe Formel herauskommen, wie für die Geschwindigkeit der stationären Bewegung in einer ganz unbegrenzten Schicht. Der Bruch unter dem Summenzeichen erhält für $2b = \infty$ die Form $\frac{0}{0}$. Durch Differentiation von Zähler und Nenner nach $\frac{1}{2b}$ erhält man, nach Einsetzen von $2b = \infty$:

$$w = \frac{4w_1}{\pi}\cdot\frac{p(h-x)}{ph+1}\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)\pi\frac{y}{2b}.$$

Diese Summe ist aber für alle positiven Werthe von y, die kleiner sind als b (der Werth $y = b$ selbst ist ausgeschlossen) gleich $\frac{\pi}{4}$, so dass w in der That den oben gefundenen Werth (10) erhält.

Die Bewegung in der Oberfläche, also für $x = 0$, wird unter Beibehaltung der Annahme, dass $\varphi(y) = w_1$, dargestellt durch:

$$w_0 = \frac{4 w_1}{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\cos(2n+1)\pi \frac{y}{2b}}{1 + \frac{(2n+1)\pi}{2bp} \operatorname{Ctg}(2n+1)\pi \frac{h}{2b}}.$$

welcher Ausdruck für $p = \infty$ in w_1 selbst übergeht.

Wäre diese Reihe, wenn auch nur für $y = 0$, summirbar, so liesse es sich wohl ermöglichen, durch geeignete Versuche den Werth von p bei kleinen Geschwindigkeiten wenigstens annäherungsweise zu ermitteln. Denkt man sich nämlich einen sehr langen Kanal von gegebenem rechteckigem Querschnitt — der Einfachheit halber werde er quadratisch, also $2b = h$, angenommen — durch einen seiner Axe parallel wehenden schwachen Wind von der Geschwindigkeit w_1 in stationäre Bewegung versetzt, so wird in der Mittellinie seiner Oberfläche ($y = 0$) die Geschwindigkeit:

$$w_{00} = \frac{4 w_1}{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)\left\{1 + \frac{(2n+1)\pi}{hp} \operatorname{Cotg}(2n+1)\pi\right\}}.$$

Bemerkt man, dass für $n = 0$ bereits $\operatorname{Ctg}\pi = 1{,}0037$ ist, und für grössere n der Werth von $\operatorname{Ctg}(2n+1)\pi$ sich der Einheit immer mehr nähert, so ist schon sehr annähernd:

$$w_{00} = \frac{4 w_1 ph}{\pi} \left\{ \frac{1}{ph+\pi} - \frac{1}{3} \frac{1}{ph+3\pi} + \frac{1}{5} \frac{1}{ph+5\pi} - \cdots \right\}.$$

Berücksichtigt man zunächst einmal nur 2 Glieder dieser Reihe, so ergibt sich für ph die quadratische Gleichung:

$$p^2h^2(8w_1 - 3\pi w_{00}) + ph \cdot 4\pi (8w_1 - 3\pi w_{00}) - 9\pi^3 w_{00} = 0,$$

wonach:

$$ph = 2\pi\left\{\sqrt{1 + \frac{9\pi w_{00}}{4(8w_1 - 3\pi w_{00})}} - 1\right\}.$$

Wäre z. B. $w_1 = 4\,\text{m}$, $w_{00} = 2\,\text{m}$, also $w_1 : w_{00} = 2$, so würde man $ph = 0{,}88\pi$ erhalten, oder:

$$p = \frac{2{,}77}{h},$$

und es würde in obiger Reihe das erste vernachlässigte Glied $= \frac{1}{29{,}4 \cdot \pi}$ sein, während das erste Glied $= \frac{1}{1{,}88 \cdot \pi}$ ist. Der Fehler würde also etwa $^1/_{16}$ des Werthes betragen und würde durch Berücksichtigung eines weiteren Gliedes auf etwa $^1/_{30}$ reducirt werden.

Wie es scheint, ist aber p zwischen Wasser und Luft sehr gross und deshalb das Verhältniss $w_1 = 2w_{00}$ nur bei sehr kleiner Kanalbreite möglich, während bei grösserer Breite w_{00} sich w_1 an Werth viel mehr nähert. Alsdann müssten von obiger Reihe viel mehr Glieder berücksichtigt werden. Je grösser p ist, um so näher kommt der Werth von w_0 dem Werthe von w_1; die Curve also, welche w_0 als Function des Abstandes y von der Mitte darstellt, nähert sich einer geraden zur Y-Axe parallelen Linie. Dasselbe lässt sich von der Geschwindigkeit in jeder Horizontallinie von der Tiefe x sagen. Man sieht also, dass, falls p sehr gross ist, die Ufer einen sehr geringen Einfluss auf die Geschwindigkeitsvertheilung ausüben.

Von dem Reibungscoëfficienten ist auch hier der stationäre Zustand unabhängig.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt noch, dass in einer Flüssigkeitsschicht von constanter Tiefe sehr wohl zwei parallel derselben Geraden, aber in entgegengesetzten Richtungen fliessende Strömungen, ohne sich zu stören, aneinandergrenzen können. Ihre Scheidefläche ist dann eine ihrer Richtung parallele Verticalebene, in welcher die Geschwindigkeit $= 0$ ist, und die sich gerade so verhält, wie ein festes Ufer. Solange die Kräfte, welche jede der beiden Strömungen hervorbringt, unverändert fortdauern, bleibt

die Bewegung beider stationär und keine Strömung stört die andere.

Die durchgehende Analogie, welche die Geschwindigkeitsvertheilung in einer mit Reibung begabten Flüssigkeitsmasse mit der Wärmevertheilung in einem festen Körper zeigt, weist darauf hin, sie auch noch in einer anderen Richtung zu verfolgen. Es wurde oben schon gezeigt, wie ausserordentlich langsam die an der Oberfläche vorhandene Geschwindigkeit in die Tiefe fortgepflanzt wird, falls hier zuvor die Geschwindigkeit 0 geherrscht hat. Man kann daraus umgekehrt schliessen, dass die Nachwirkung des Anfangszustandes mit derselben Langsamkeit verschwindet. Diese ist dargestellt durch das bisher ausser Acht gelassene erste Glied der Formeln (8), (11) und (13). Setzt man in denselben für $f(\xi)$ eine Constante oder eine lineare Function von ξ, so lässt sich das Integral nach ξ ohne weiteres ausführen, und das ganze vom Anfangszustand abhängige Glied wird in allen drei Formeln eine Summe von derselben Form, wie sie für das von $\varphi(\lambda)$ abhängige erhalten wurde, als $\varphi(\lambda) = \text{Const.}$ gesetzt war. Da die Exponenten von e dieselben wie dort sind, so gelten demnach für das Verschwinden des Anfangszustandes dieselben Zahlen, die oben berechnet wurden.

Wenn z. B. vor etwa 10 000 Jahren, also zu einer Zeit, von der jede historische Kunde fehlt, durch irgend ein kosmisches Ereigniss das Gleichgewicht der Meere in so erheblicher Weise gestört worden ist, dass daraus starke Strömungen folgten, so würde der Einfluss der damaligen Bewegungen in dem jetzigen Strömungszustand sicherlich noch nicht ganz verschwunden sein; er würde sogar heute noch die Bewegung des Oceans in den grösseren Tiefen sehr vorherrschend bestimmen, wenn die Erde vollständig mit einem Ocean von der gleichförmigen Tiefe von 4000 m bedeckt wäre. Die Unterbrechung des Oceans durch Länder und Inselmassen von unregelmässiger Gestalt wird dazu beitragen, jene Nachwirkung früherer Bewegungszustände erheblich abzuschwächen, weniger durch die ver-

mehrte Reibung am Bett, als durch die überall eindringenden Reflexions- und Verdrängungsströmungen; indessen muss nach der oben zahlenmässig nachgewiesenen langsamen Ausbreitung des Einflusses local wirkender Bewegungsänderungen in die Masse hinein dringend davor gewarnt werden, dass man sich mit der hergebrachten Redensart, die Reibung brauche alle diese Bewegungen rasch auf, über die Schwierigkeit genauerer Berechnung hinwegsetze.

Es würde möglich sein, durch Beobachtungen zu bestimmen, ob noch Nachwirkungen früherer Bewegungen im Ocean vorhanden sind. Es bedürfte zu diesem Zweck nur vergleichender Strömungsbeobachtungen in den verschiedensten Tiefen, anzustellen in den centralen Theilen der grossen Aequatorialströme und der Calmenregion. Jedoch würde man nicht hoffen können, kleine Rückstände früherer Bewegungen mit ähnlicher Sicherheit nachzuweisen, wie dies bezüglich der Nachwirkung des früheren höheren Temperaturzustandes der Erde durch unterirdische Temperaturmessung möglich ist.

Jene oben berechneten Zahlen geben ferner einen Fingerzeig, wie entfernt man sich den Anfangszustand wenigstens zu denken hat, beziehungsweise seit wie langer Zeit wenigstens man sich die Passatwinde in ihrer jetzigen Ausdehnung und Stärke muss wehend denken, um zur Annahme berechtigt zu sein, dass der jetzige Bewegungszustand der Aequatorialströmung annähernd stationär sei. Es sind dazu etwa 100 000 Jahre erforderlich, wenn man eine mittlere Meerestiefe von 4000 m zu Grunde legt und von dem dämpfenden Einflusse der Continente und Inseln absieht, welcher jene Zahl etwas verringern muss.

Dass aber jeder Anfangszustand schliesslich verschwindet und einem stationären Zustand von dem aufgestellten einfachen Vertheilungsgesetze Platz macht, sieht man aus der Form der Reihen für w und ist überdies von K. Von der Mühll für alle Temperaturprobleme allgemein nachgewiesen [1]. Giessen, den 5. Jan. 1878.

1) Math. Annalen II. p. 648.

X. *Eine Modification der Quecksilberluftpumpe; von Fr. Neesen.*

Beim Gebrauch der Geissler'schen Quecksilberluftpumpe treten einige Uebelstände auf.

Es kommt manchmal vor, dass man sich bei der Drehung des grossen Hahnes irrt, dass man denselben, nachdem das Quecksilber in die feste Kugel hineingedrückt ist, um 90° dreht, anstatt nur um 45°. Dann tritt Quecksilber in den Trockenapparat oder den auszupumpenden Apparat selbst. Es kann ferner vorkommen, dass nach erfolgter Evacuirung vergessen wird, einen der Hähne zu drehen. Dann ist die Gefahr des Zersprengens des Apparates vorhanden. Ich habe weiter bemerkt, dass sich das Quecksilber verschmiert, und glaube, dass dieses einerseits herrührt von dem Gummischlauch, durch welchen dasselbe bei der gewöhnlichen Einrichtung hindurchfliessen muss, andererseits aber von dem Fette, mit dem die Glashähne eingefettet werden, und das mit dem Quecksilber wenigstens etwas in Berührung tritt.

Diesen Uebelständen wird durch folgende Einrichtung abgeholfen, eine Einrichtung, die ausserdem den Vorzug hat, dass sie bedeutend billiger und bequemer zu handhaben ist, wie die gewöhnliche Pumpe.

B (Taf. IV Fig. 7) ist eine gewöhnliche Glasflasche mit zwei Tubulis. In die eine Oeffnung wird mit Kautschukstöpsel eine Glasröhre *H* eingesetzt, welche mit einer gewöhnlichen Luftpumpe in Verbindung steht; in die andere Oeffnung wird ein Glasrohr *K* bis dicht an den Boden des Gefässes *B* eingesetzt. An diesem Glasrohr befindet sich angeschmolzen eine Glaskugel *A* von etwas weniger Rauminhalt, wie das Gefäss *B*. Diese Kugel *A* mündet in ein Rohr *N*, welches sich bei *E* und *F* erst etwas verengt und dann erweitert. *E* und *F* sind Glasventile, d. h. einfach zwei Glaskugeln, welche in die Verengung der

Röhre *N* hineinpassen. Diese Ventile brauchen nicht luftdicht zu sein. Im Gegentheil müssen sie bei einigem Ueberdruck von oben Quecksilber durchlassen, und zwar *E* mehr wie *F*. Um das Ventil *F* festzuhalten, ist in die Erweiterung von *N* über *F* ein dünnes Glasrohr *G* eingesteckt, welches bei *a* eine Oeffnung hat und durch diese die äussere Luft mit *N* in Verbindung setzt. Unterhalb der Kugel *A* ist an das Rohr *K* seitlich ein Glasrohr *C* angeschmolzen, das sich, wie die Figur zeigt, umbiegt, nicht ganz 1 m hoch in die Höhe geht, sich wieder umbiegt und schliesslich in das Schliffstück *J* endet, an welches der auszupumpende Apparat direct oder erst das Trockengefäss nebst Barometerprobe angesetzt wird.

Die Röhren *C* und *N* sind ferner durch die an beide angeschmolzene Glasröhre *D* verbunden, von der noch zu bemerken ist, dass ihr Querschnitt dort, wo sie an *C* angeschmolzen ist, bei *b*, kleiner ist als im übrigen Theil.

Ueber die Wirkungsweise dieser Luftpumpe sei noch Folgendes bemerkt.

Das Heben und Senken des Quecksilbers geschieht auf die Poggendorff'sche Weise. Durch *H* wird vermittelst der gewöhnlichen Luftpumpe Luft in *B* hineingepresst. Durch dieselbe wird Quecksilber in die Röhre *K* und die Kugel *A* hineingedrückt. Das Quecksilber schliesst selber die Röhren *C* und *D* ab und hebt die Verbindung des auszupumpenden Apparates mit der Kugel *A* auf. Das aufsteigende Quecksilber drückt ferner die in *A* etwa noch befindliche Luft vor sich her, öffnet die Ventile *E* und *F* und steigt in den Raum über *F*. Die ausgepresste Luft entweicht durch *a* und *G*. Jetzt wird die Luft aus *B* durch *H* ausgesogen. Dann fällt das Quecksilber in *C* und *A*. Die Ventile *E* und *F* schliessen sich. In *A* entsteht ein luftleerer Raum, mit welchem, wenn das Quecksilber tief genug gefallen ist, der auszupumpende Apparat durch *D* zunächst und dann auch durch *C* communicirt. Darauf wird wieder Luft in *B* hineingepresst, das Quecksilber heraufgedrückt etc. Das doppelte Ventil *E* und *F*

ist aus demselben Grunde angebracht, wie bei der gewöhnlichen Geissler'schen Pumpe der kleine Hahn über dem grossen. Das Ventil *E* schliesst, wie erwähnt, nicht so dicht wie das Ventil *F*. Entsteht also in *A* ein luftleerer Raum, so sickert das Quecksilber durch *E*, und es entsteht, da das Quecksilber durch *F* wegen des besseren Schlusses nur langsam nachfällt, zwischen *E* und *F* ein luftleerer Raum, in den dann die letzten Luftblasen in *A* nachher leichter aufsteigen.

Die Röhre *D* ist hinzugefügt, weil, wenn dieselbe nicht vorhanden ist, die Luft aus dem auszupumpenden Apparat, welche das Quecksilber in der Röhre *C* eher niederdrückt, als bis dasselbe aus *A* ganz zurückgefallen ist, durch die Röhre *C* in *A* aufsteigt, durch das Quecksilber in letzterem hindurch. Dadurch wird der Apparat unangenehm erschüttert. Das fällt weg, wenn man der Luft einen Weg durch eine geringere Quecksilbermasse hindurch in den oberen Theil von *A* öffnet, was durch die Röhre *D* geschieht. Ausserdem fällt hierdurch das Quecksilber in *A* rascher, weil zu dem Quecksilberdruck noch der Druck der Luft hinzutritt.

Nachdem ich den skizzirten Apparat mir construirt hatte, fand ich, dass von Joule schon im Jahre 1875 eine Quecksilberluftpumpe construirt worden ist, bei welcher auch der grosse Hahn durch ein Ventil ersetzt ist, und auch der Abschluss von dem zu evacuirenden Apparat durch das aufsteigende Quecksilber bewirkt wurde. Ich glaube aber, dass der obige Apparat einige wesentliche Vorzüge vor dem Joule'schen hat, durch die Art der Anbringung der Ventile, durch den Gebrauch der zwei Ventile *E* und *F* und durch Hinzufügung der Röhre *D*.

Anmerkung. Die oben beschriebene Form der Quecksilberluftpumpe ohne Trockengefäss und Gestell liefert Hr. Glasbläser Müller (Berlin, Leipzigerstr. 22) zu 15 Mark. Das Trockengefäss mit Schliffstücken kommt auf etwa 30 Mark zu stehen.

Berlin, Januar 1878.

XI. *Ueber eine Methode zur genaueren Dickenmessung vermittelst des Sphärometers; von K. R. Koch in Freiburg i/Br.*

Die gewöhnlichen Messungsmethoden vermittelst des Sphärometers beruhen bekanntlich darauf, dass das Wackeln des Instrumentes oder die Ablösung des Schraubenkopfes als Kriterium der Berührung der Schraubenspitze gilt; beide haben aber den Uebelstand, dass man nie mit Genauigkeit anzugeben vermag, wann jene Berührung eintritt. Es kann diese Unsicherheit des Urtheils Abweichungen hervorrufen, die sich auf 0,002 mm belaufen.

Um die Messungen von jener Fehlerquelle möglichst unabhängig zu machen, kann man folgende Methode anwenden, die, soweit mir bekannt, noch nicht beschrieben ist. Man befestigt auf einer festen Unterlage (Taf. IV Fig. 8) eine unten berusste, möglichst ebene, starke Glasplatte B, kittet auf diese mit ihrer Kante $\alpha\beta$ die nicht zu dicke (1 mm) Glasplatte C ($\alpha\beta\gamma\delta$); so werden im Natriumlicht zwischen den Platten B und C die bekannten Interferenzstreifen erscheinen. Die Platte C trägt am Rande in der Mitte von $\beta\gamma$ ein oben abgerundetes Stahlstäbchen DO[1]) und gegenüber in der Mitte von $\alpha\delta$ einen Spiegel E, der für ein normal zur Linie XY blickendes Auge ein Spiegelbild der Spitze O zeigt. Der Spiegel hat den Zweck, die Sphärometerschraube senkrecht über die Spitze stellen zu können, ohne dass man nöthig hat, auch von der Seite her die Einstellung zu prüfen.

F ist irgendeine Vorrichtung zur Unterstützung des zu messenden Gegenstandes, der man durch Stellschrauben dieselbe Höhe wie der Spitze O geben kann. Nähert man die Sphärometerschraube der Spitze, resp. dem auf ihr

1) Es ist gut, den Kitt zum Befestigen der Platten und des Stäbchens zwischen den Berührungsflächen nur in sehr dünner Schicht anzuwenden, da man sich sonst leicht Fehlerquellen schafft.

ruhenden Körper, dessen Dicke man bestimmen will, so lässt sich schon beim Beobachten mit blossem Auge der Moment, wenn eine Berührung stattfindet, mit grosser Genauigkeit angeben, da in demselben Augenblicke die Interferenzstreifen zu wandern beginnen. Noch genauer verfährt man jedoch, wenn man die Streifen durch ein schwach vergrösserndes Mikroskop mit Fadenkreuz beobachtet; man schraubt die Sphärometerschraube soweit herunter, bis ein Streifen oder ein bestimmter Theil eines solchen das Fadenkreuz passirt hat. Die Messungen werden natürlich um so präciser, je genauer die Axen der Sphärometerschraube und des Stahlstäbchens DO in eine Linie fallen und je näher man am Punkte D beobachtet, da die Streifen natürlich dort, in der Mitte zwischen den Unterstützungspunkten der Platte, am beweglichsten sein werden.

Um einen Begriff von der Genauigkeit zu geben, die hierdurch erzielt wurde, setze ich von vielen anderen Messungen, die ich nach dieser Methode ausgeführt habe, als Probe die folgenden her. Die Sphärometerschraube wurde zuerst bis zur Berührung mit der Spitze heruntergeschraubt, ohne dass ein Gegenstand dazwischen gelegt war; dies gab folgende Einstellungen:

15,8148, 15,8147, 15,8149, 15,8148, 15,8148 mm.

Mittel: 15,8148 mm.

Es wurde nun eine Glasplatte zwischen Spitze und Sphärometerschraube gebracht und deren Dicke an zwei Punkten bestimmt. Eine Veränderung des Abstandes der beiden Platten B und C, also ein Wandern der Streifen, hervorgerufen durch den Druck des eigenen Gewichtes der Platte auf die Spitze O, war hierbei nicht zu bemerken. Es wurden folgende Ablesungen gemacht:

Am Punkte I:

17,1670, 17,1668, 17,1671, 17,1671, 17,1672 mm.

Mittel: 17,16704 mm.

Am Punkte II:

17,1684, 17,1682, 17,1683, 17,1685, 17,1683 mm.

Mittel: 17,16834.

Nach Entfernung der Platte gab die Einstellung auf die Spitze *O* wiederum:

15,8148, 15,8147, 15,8147, 15,8148, 15,8149 mm.
Mittel: 15,81478 mm.

Die Tausendtel Millimeter wurden hierbei am Instrumente direct abgelesen, die Bestimmung der Zehntausendstel geschah durch Schätzung.

Es ist also schon mit meinem nur ganz roh construirten Apparate möglich, durch Vervielfältigung der Beobachtungen noch Unterschiede in der Dicke wahrzunehmen, die nur 0,0001 mm, also circa $^1/_6$ der Wellenlänge des Natriumlichtes betragen. Berechnet man für die Mittel aus den einzelnen Ablesungen den wahrscheinlichen Fehler, so findet man, dass er im Resultate erst in der fünften Decimale Abweichungen ergibt, während die Beobachtungszahlen selbst bis zur vierten gehen, ein Zeichen, dass die Einheit, welche der Theilung des Instrumentes zu Grunde liegt, im Verhältniss zu der Genauigkeit, mit der man die Einstellungen machen kann, zu gross ist. Man müsste also das Sphärometer durch geringere Steigung, die man der Schraube gibt, und durch die Möglichkeit einer genaueren Ablesung vermittelst eines Nonius so einrichten, dass man noch Zehntausendtel und mit dem Nonius etwa noch Hunderttausendtel Millimeter ablesen könnte.

Die Vorzüge der Methode bestehen ausser der bedeutend grösseren Präcision der Einstellung in der Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit der man bei einiger Uebung mit dem Apparate arbeiten kann, und besonders darin, dass sich die Stellung der Fusspunkte des Sphärometers während der Beobachtung nie verändert, was bei den gewöhnlichen Methoden kaum zu vermeiden ist, und selbst bei sogenannten ebenen Platten, auf denen man die sphärometrischen Messungen auszuführen pflegt, ziemlich bedeutende Fehler verursachen kann.

Phys. Inst. d. Univ. Freiburg i/Br., Jan. 1878.

XII. *Notiz über zwei Modelle der Temperaturfläche des Wassers; von A. Ritter in Aachen.*

Die krumme Oberfläche der Taf. IV Fig. 9 u. 10 gezeichneten Modelle[1]) bildet die geometrische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die absolute Temperatur T mit dem Drucke p und dem Volumen v sich ändert[2]). Die Temperaturaxe steht vertical, die Druckaxe und die Volumenaxe liegen in der horizontalen Grundfläche. Die Volumenaxe ist parallel zur Hauptkante, die Druckaxe ist rechtwinkelig zur Hauptkante gerichtet. Die drei Liniensysteme sind resp.: die Isothermen (Linien constanter Temperatur), die Isobaren (Linien constanten Druckes) und die Isopleren (Linien constanten Volumens).

Das Modell Fig. 9 ist speciell dazu bestimmt: in übersichtlicher Weise die Formen- und Lagenverhältnisse der sämmtlichen sieben Kanten zur Anschauung zu bringen. Da das Längenverhältniss der beiden Abschnitte der Hauptkante ungefähr gleich 1 : 2 300 000 ist, so musste bei Herstellung dieses Modells im Interesse des genannten Zweckes von Wiedergabe der richtigen Verhältnisse Abstand genommen werden. Dieses Modell gibt daher ein verzerrtes Bild der Temperaturfläche.

Das Modell Fig. 10 ist in richtigen Verhältnissen ausgeführt und umfasst das ganze Flächengebiet von dem Nullpunkte des Coordinatensystems bis zur Isotherme $T = 1000^0$ (=300 mm), bis zur Isobare: $p=3$ Atmosphären (=360 mm) und bis zur Isoplere: $v=3$ cbm (=360 mm).

1) Von dem Herrn Bildhauer Blum in Aachen für die Modellsammlung des Polytechnicums ausgeführt.

2) Wied. Ann. II. p. 273. III. p. 447.

XIII. *Ueber das Spectrum des Lichtes explodirender Schiessbaumwolle; von Hermann W. Vogel.*

In Pogg. Ann. CX. p. 641 beschreibt Dr. O. Lohse das im Titel dieser Notiz bezeichnete Spectrum, gibt eine Zeichnung desselben und die Wellenlängen der an ihm beobachteten Banden.

Jüngst mit Versuchen über die Entzündlichkeit der photographischen Collodiumwolle beschäftigt, nahm ich die Gelegenheit wahr zum Studium des betreffenden Spectrums. Beim ersten Blick ins Spectroskop überraschte mich die auffallende Aehnlichkeit des Pyroxylinlichtspectrums mit dem Flammenspectrum des Chlorcalciums und bei gleichzeitiger Beobachtung beider Spectren in demselben Spectralapparat ergab sich die Identität ihrer Hauptlinien zweifellos. Die bekannten Kalklinien α und β (Bunsen) treten in dem Pyroxylinspectrum mit grösster Deutlichkeit hervor, ausserdem bemerkte ich ε (Bunsen), nicht aber γ. An Stelle des letzteren erschien ein lichter Schein, der sich über den Streif δ des Calciumspectrums hinaus erstreckte.

Ich untersuchte in dieser Weise ein Pyroxylin von Schering in Berlin, zwei Sorten von Lagrange in Berlin und eine amerikanische Sorte. Alle, ohne Ausnahme, gaben dieselbe Spectralreaction und offenbarten auch beim Ausziehen mit verdünnter Salpetersäure und Prüfung mit Oxalsäure und Ammonium ganz unzweifelhaften Gehalt an Kalk.

Derselbe darf nicht Wunder nehmen mit Rücksicht darauf, dass man zum Auswaschen der Pyroxyline behufs Abstumpfung der von der Nitrirung darin zurückbleibenden Säure gern kalkhaltige Wässer anwendet.

Ob Dr. Lohse eine wirkliche Schiessbaumwolle (die bekanntlich bedeutend höher nitrirt ist, als eine photographische Collodiumwolle) untersucht hat, ist mir nicht bekannt. Wahrscheinlich ist aber das von ihm beobachtete Spectrum im wesentlichen ebenfalls ein Kalkspectrum. Wenigstens lassen solches die von ihm gegebenen Wellenlängen schliessen, die ich nachfolgend (a. d. f. S.) mit den von

Spectrum des brennenden Pyroxylins nach Lohse.	Flammenspectrum des Chlorcalciums nach Lecoq.
λ 644,6 schwacher Streifen.	λ 644,1 bande nébuleuse *s*, milieu.
622 | 610 breites Lichtband.	627,97 environ commenc. de la bande principale *α*. 616,04 environ fin de la bande principale *α*.
601 | 589,5 desgl., jedoch schwächer.	606,8 | 597,08 bande *δ*.
589,5 | 588,9 die sehr hellen Natriumlinien.	
572,8 schwacher Streifen.	572,8 nébuleuse, large de $^2/_3$ à $^3/_4$ de division.
568,7 schwache, aber scharf begrenzte Linie.	564,4 très nébuleuse.
554,8 sehr helle, breite, verwaschene Linie.	554,3 raie nébuleuse forte.
550,4 helle, breite, verwaschene Linie.	551,7 raie nébuleuse, assez forte, mais notablement moins que la 1re partie de la bande.

Lecoq de Boisbaudran besonders publicirten[1]) zusammenstelle.

Ich führe hier nur diejenigen Banden aus Lecoq's Liste an, welche zum Vergleich mit Lohse's Angaben dienen können.

Einige Abweichungen in den Angaben der Wellenlängen zwischen Lohse und Lecoq dürften einerseits darauf zurückzuführen sein, dass bei Banden mit verschwommenen Rändern die Grenzen derselben sich nur unsicher bestimmen lassen und mit der Helligkeit des Spectrums variiren, andererseits aber auch darauf, dass das Momentane der Erscheinung bei der Verpuffung des Pyroxylins, wie Dr. Lohse ganz ausdrücklich angibt, die Ablesung erschwert.

Berlin, im März 1878.

1) Spectres lumineux. Paris, Gauthier Villars. 1874.

Berichtigungen.

Bd. II. p. 593 Z. 10 v. o. statt „(Tab. 17 u. 18) lies „(Tab. 17 bis 19)".
Ergänzungsband VIII. p. 664. Z. 12 v. o. im Titel statt „der Atmosphäre" lies „des Weltenraumes".

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Fig. 3.

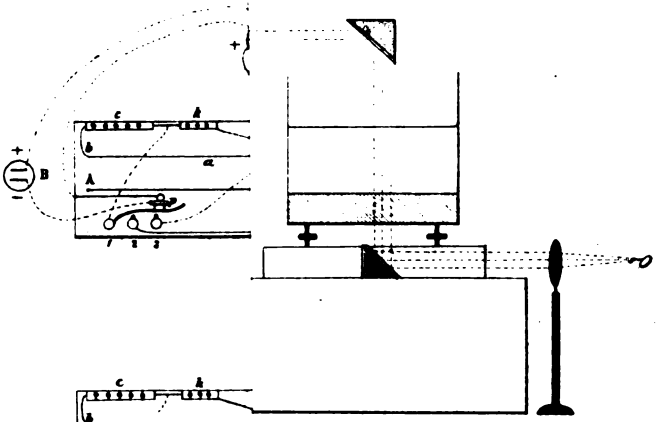


Fig. 7.

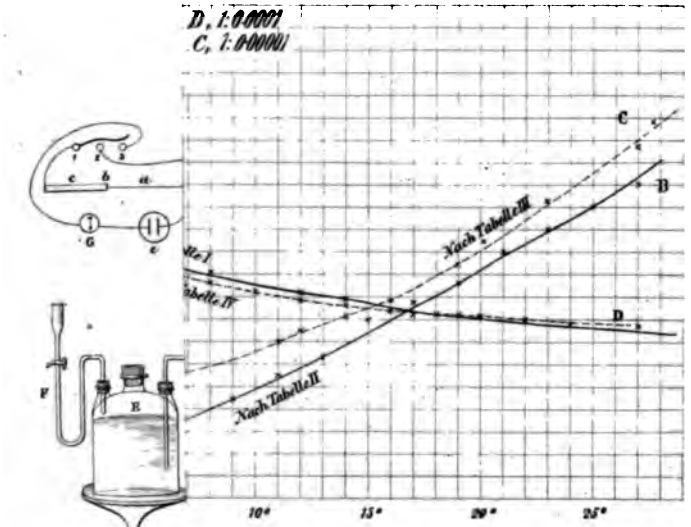


Fig. 5.

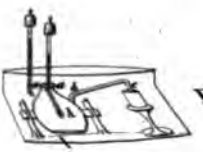


Fig. 6.

PHYSICS - MATHE
530.5
A613
x 3
1878

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

50M-12-60-96455

SEP 27 1961